



UNIVERSIDADE
E D U A R D O
MONDLANE

FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

**Obtenção de esforços em lajes maciças finas pelo Método de
Elementos Finitos.**

Autor:

NHAMONA, Chadreca Adriano

Supervisores:

Eng.^a Alexandra Neves

Dr. Nordino M. Muaievela

Maputo, Março de 2022



UNIVERSIDADE
E D U A R D O
MONDLANE

FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
LICENCIATURA EM ENGENHARIA CIVIL

**Obtenção de esforços em lajes maciças finas pelo Método de
Elementos Finitos.**

Autor:

NHAMONA, Chadreca Adriano

Supervisores:

Eng.^a Alexandra Neves

Dr. Nordino M. Muaievela

Maputo, Março de 2022



UNIVERSIDADE
E D U A R D O
MONDLANE

**FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

DECLARAÇÃO DE HONRA

Eu, Chadreca Adriano Nhamona, declaro sob compromisso de honra que o presente trabalho é resultado da minha investigação e foi concebido exclusivamente para ser submetido como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciatura em Engenharia Civil na Faculdade de Engenharia da Universidade Eduardo Mondlane.

O Autor

(Chadreca Adriano Nhamona)

Agradecimentos

Gostaria de endereçar os meus mais sinceros agradecimentos a todos aqueles que me apoiaram directa e/ou indirectamente para a realização do presente trabalho, quer em termos morais, quer materiais.

Sou imensamente grato aos meus supervisores, a Professora Alexandra Neves e o Doutor Nordino Muaievela, cujos conselhos, ideias e acompanhamento foram cruciais para a realização deste trabalho.

Ao Engenheiro Richaldo Elias, por ter partilhado a sua experiência no mundo da computação, não tenho palavras para descrever a emoção que sinto.

Aos Engenheiros Matheus Carini, Eugénio Chirime, Arcênio Nhabangue, Adilson Mucavel e José Gonçalves pelos conselhos e apoio no que diz respeito à maneira ideal de encarar o presente trabalho, de modo a tirar o máximo proveito neste percurso.

Agradeço aos Engenheiros: Juca Gonçalves e Munuma Sigelo, pela disponibilidade e apoio durante a realização do trabalho.

Agradeço também à minha mãe, Laurênciana Leonardo, pelo apoio incondicional e auxílio, o que me permitiu dedicar mais tempo aos estudos e ao meu trabalho.

À Ataíris Massuanganhe, pelo incentivo e apoio prestado.

Ao professor Antero Nhantumbo, pela amizade, conselhos e apoio, para além da revisão linguística do meu trabalho por via do projecto Textos, comunicação, Línguas e Serviços (TECLIS).

Gratidão a todos!

Dedicatória

Aos meus pais, Laurênciana Leonardo Guambe e

Adriano Carlos Nhamona!

Epígrafe

“Se vi mais longe, foi por estar de pé sobre os ombros de gigantes.”

Isaac Newton

Resumo

O crescimento constante da tecnologia, tanto dos programas de computadores assim como dos processadores, é uma realidade em todo mundo. Moçambique, sendo um país em via de desenvolvimento, pode tirar vantagem criando programas de computadores e/ou algoritmos pois, o seu desenvolvimento é menos dispendioso. Neste trabalho pesquisa-se como se pode tirar maior proveito deste crescimento tecnológico para o estudo de lajes finas em engenharia civil.

O método mais recomendado para o estudo de lajes é o método de elementos finitos por fornecer valores muito próximos ao da realidade. Portanto, fez-se uma pesquisa bibliográfica de modo a se entender como se comportam os materiais, sua elasticidade e as equações gerais.

Após entender os materiais e o seu comportamento, estudou-se as lajes de modo a entender o seu funcionamento em particular e obter as suas equações governantes. Também estudou-se de forma geral, outros métodos usados em lajes e se procura entender as vantagens e desvantagens de cada um.

Com base no comportamento e equações gerais das lajes, desenvolve-se um algoritmo que permita o cálculo de diversos valores como flechas, rotações, torções e momentos. Este algoritmo é desenvolvido tendo como base sub-rotinas já desenvolvidas pois, trata-se de um procedimento matemático e na maioria dos casos, certos cálculos já possuem sub-rotinas desenvolvidas.

Após o desenvolvimento do algoritmo, faz-se uma análise dos resultados que o mesmo fornece, comparando-os com os de um método simplificado e um software de modo a se avaliar a sua fiabilidade.

Palavras-chave: Crescimento tecnológico. Algoritmo. Lajes. Método de elementos finitos.

Abstract

The constant growth of technology, both software and processors, is a reality around the world. Mozambique, being a developing country, can take advantage creating software because its development is less expensive. This work researches how this technological growth can be taken advantage of in the study of slabs in civil engineering.

The most recommended method for studying slabs is the finite element method as it provides values very close to reality. Therefore, bibliographical research was carried out in order to understand how materials behave, their elasticity and general equations.

After understanding the materials and their behavior, the slabs were studied in order to understand their particular functioning and obtain their governing equations. It is also studied in general, other methods used in slabs and seeks to understand the advantages and disadvantages of each.

Based on the behavior and general equations of the slabs, an algorithm is developed that allows the calculation of different values such as nodal displacements, rotations, twists and moments. This algorithm is developed based on already developed subroutines because it is a mathematical procedure and, in most cases, certain calculations already have developed subroutines.

After the development of the algorithm, the results it provides are analyzed, comparing them with results obtained from a simplified method and software in order to assess its reliability.

Keywords: Technological growth. Algorithm. Slabs. Finite element method.

1 Índice

1. CAPÍTULO I – Introdução	1
1.1. Contextualização.....	1
1.2. Objectivos	3
1.2.1. Objectivo geral.....	3
1.2.2. Objectivos específicos	3
1.3. Motivação.....	4
1.4. Delimitações.....	4
1.5. Limitações.....	5
1.6. Estrutura do Trabalho	5
2. CAPÍTULO II – Metodologia.....	7
2.1. Classificações das Pesquisas	7
2.1.1. Quanto à natureza.....	7
2.1.2. Quanto aos objectivos gerais	7
2.1.3. Quanto à abordagem do problema.....	7
2.1.4. Quanto aos procedimentos técnicos	8
2.1.5. Paradigma de programação	8
2.1.6. Linguagem de programação.....	9
2.1.7. Validação do algoritmo	9
3. CAPÍTULO III – Revisão Bibliográfica.....	10
3.1. Elasticidade.....	10
3.1.1. Elasticidade Linear e Lei de Hooke	11
3.1.2. Equações Fundamentais da Elasticidade Tridimensional.....	13
3.1.3. Equações Fundamentais da Elasticidade Bidimensional.....	17
3.2. Lajes	20
3.2.1. Teoria de Flexão das placas Finas.....	21
3.2.2. Método de Marcus.....	27

3.3.	Método de Elementos Finitos.....	30
3.3.1.	Discretização	30
3.3.2.	Seleccção das funções de forma adequadas.....	32
3.3.3.	Formulação do elemento	36
3.3.4.	Introdução das Cargas actuantes e a obtenção das tensões	38
3.3.5.	Integração Numérica	41
3.3.6.	Modelagem em elementos finitos	43
3.3.7.	Programando em elementos finitos	44
4.	CAPÍTULO IV – Proposta de solução e Desenvolvimento do Algoritmo.....	46
4.1.	Descrição da solução.....	46
4.2.	Beneficiários pela Solução	47
4.3.	Modelo da solução Proposta.....	47
4.4.	Implementação da solução	48
4.5.	Desenvolvimento do Algoritmo.....	48
4.5.1.	Introdução de dados e Inicialização	49
4.5.2.	Determinação da matriz de Rigidez do Elemento e Assemblagem	50
4.5.3.	Leitura dos Carregamentos	50
4.5.4.	Determinação dos deslocamentos nos nós e momentos flectores.....	50
5.	CAPÍTULO V – Discussão de resultados.....	52
6.	CAPÍTULO VI – Conclusões e Recomendações	57
6.1.	Conclusões	57
6.2.	Recomendações	58
	Bibliografia	59
	Outra bibliografia.....	60
	Anexos	61
	Anexo 1: tabelas de momentos flectores de Libânio M. Pinheiros.	61

Anexo 2: tabelas das constantes β . Onde i,j correspondem a linhas e colunas respectivamente.	66
Anexo 3: Coeficientes da matriz de rigidez do elemento	68
Anexo 4: Quadratura de Gauss	69
Anexo 5: Algoritmo	70
Anexo 6: Condições de apoio ou contorno	78

Lista de figuras

Figura 1: gráfico tensão deformação. Fonte: aulas da disciplina materiais de construção.....	11
Figura 2:Esquema da dependência entre as relações constitutivas e as equações de equilíbrio e de compatibilidade. Fonte: Sanches(2011).....	12
Figura 3: corpo genérico em equilíbrio fonte:Timoshenko&Goodier	13
Figura 4: Tensor tensão de Cauchy fonte: wikipedia.org	14
Figura 5: Corpo plano em equilíbrio	17
Figura 6:lajes armadas em edifícios fonte:Szilard (2004).....	20
Figura 7:placa uniformemente carregada fonte:Szilard(2004)	22
Figura 8:detalhe de um elemento de placa fonte: Szilard(2004)	22
Figura 9:Secção antes e depois da deflexão da placa fonte: Szilard (2004).....	23
Figura 10: Esforços em um elemento de placa fonte:Folleto (2011)	25
Figura 11: Diversas condições de fronteira fonte: Szilard (2004).....	26
Figura 12: laje simplesmente apoiada nos nos quatro bordos fonte:Montoya et al. (adaptado por Folleto, 2011)	27
Figura 13: Condições de contorno das lajes rectangulares fonte: Araújo (2003, p. 72)	28
Figura 14: discretização do elemento continuo fonte: Adaptado de Szilard(2004)...	31
Figura 15: funções de forma devido a deslocamentos unitários fonte: adaptado de Szilard (2004).....	33
Figura 16: Elemento triangular baseado num polinómio do quinto grau completo Fonte: Szilard (2004).....	35
Figura 17: Elemento rectangular com 16 graus de liberdade Fonte: Szilard (2004)	35
Figura 18: elemento com 16 graus de liberdade fonte: Szilard(2004).....	36
Figura 19: Quadratura de gauss com nove pontes de amostragem Fonte: Adaptado de Szilard (2004).....	43
Figura 20: Exemplo do ficheiro criado de dados de iniciais.....	49
Figura 21: Exemplo de ficheiro criado com os valores obtidos	51
Figura 22: Diferenças entre os valores obtidos das tabelas de Pinheiro e do software	56
Figura 23: Diferenças entre as tabelas de Pinheiro e do algoritmo	56
Figura 24: Diferenças entre os resultados do software e do algoritmo	56

Lista de tabelas

Tabela 1: resumo das condições de fronteira fonte: Szilard (2004)	27
Tabela 2: beneficiários e benefícios da solução proposta	47
Tabela 3: Alternativas da implementação da solução	48
Tabela 4: Resultados obtidos pelas tabelas de Pinheiro	52
Tabela 5: Resultados obtidos através do software Robot Structural	52
Tabela 6: Resultados obtidos do algoritmo desenvolvido	53
Tabela 7:Diferenças entre os valores obtidos das tabelas de Pinheiro e do software	53
Tabela 8:Diferenças entre as tabelas de Pinheiro e do algoritmo	54
Tabela 9:Diferenças entre os resultados do software e do algoritmo	54

Lista de abreviaturas e acrónimos

Mef	Método de elementos finitos
Cad	Desenho auxiliado por computador
Software	Conjunto de instruções que permitem ao usuário realizar tarefas em um aparelho electrónico
Tic	Tecnologia de Informação e comunicação
Crackear	Piratear um software
Fortran 08	Linguagem de programação
INTERNET	É rede de computadores interligados que usam um conjunto próprio de protocolos.
NBR	Norma Brasileira
REBAP	Regulamento de betão armado e pré-esforçado
RSA	Regulamento de segurança e acções para estruturas de edifícios e pontes

1. CAPÍTULO I – Introdução

1.1. Contextualização

Modelar fenômenos físicos é uma das tarefas mais importantes que os engenheiros e cientistas desempenham. Teoricamente, todo o fenômeno na natureza, seja no espaço aéreo, biológico, químico, geológico ou mecânico, pode ser descrito com o auxílio das leis da Física ou por meio da álgebra, equações diferenciais e/ou integrais, relacionando diversas grandezas que se pretende estudar (Reddy, 2006).

O método de elementos finitos (MEF) tornou-se numa ferramenta fundamental para a solução numérica de muitos problemas de engenharia. As aplicações variam desde a análise de tensões e deformações em automóveis, aeronaves, edifícios e estruturas de pontes até à análise da propagação do calor, do fluxo de fluidos, do fluxo magnético, entre outros fenômenos. Com os avanços nas tecnologias computacionais e sistemas CAD, problemas complexos podem ser modelados com uma relativa facilidade (Chandrupatla & Belegundu, 2002).

Ainda que o termo “método de elementos finitos” seja recente, o seu conceito existe há muitos séculos. Os antigos matemáticos, por exemplo, determinaram o comprimento da circunferência de um círculo, aproximando-a pelo perímetro de um polígono (Rao, 2011).

Em 1941, Hrenikoff apresentou uma solução de problemas de elasticidade, usando o método da treliça. Nos estudos de Courant, usou-se a interpolação polinomial *piecewise*¹ em sub-regiões triangulares para modelar problemas de torção que apareceram em 1943.

Turner *et al.* derivaram as matrizes de rigidez para a treliça, viga e outros elementos e apresentaram as suas descobertas em 1956. Porém, o termo elemento finito foi criado e usado pela primeira vez por Clough em 1960 (Chandrupatla & Belegundu, 2002).

Na aplicação do MEF para a análise de qualquer problema físico contínuo, procede-se, habitualmente, da seguinte forma:

¹ Referente a uma função definida em partes ou troços.

1. Formulação forte do problema em análise - consiste no estabelecimento das equações diferenciais e condições de fronteira e iniciais.
2. Formulação fraca do problema – consiste na redução da ordem das derivadas através do tratamento adequado da sentença fraca.
3. Aproximação funcional e geométrica.
4. Montagem do sistema de equações lineares para o elemento (matriz do elemento e termo independente do elemento).
5. Assemblagem do sistema discretizado.
6. Introdução das condições de fronteira essencial.
7. Solução do sistema de equações resultante.
8. Computação das tensões resultantes (Szilard, 2004).

Podemos usar o MEF de três maneiras:

(a) Montando um sistema relativamente simples “à mão” e resolvendo equações simultâneas com ajuda de uma calculadora científica avançada e com um programa de resolução de equações;

(b) Gerando e escrevendo o código computacional necessário, aplicando as sub-rotinas disponíveis; e

(c) Usando um sistema comercial disponível de programa de elementos finitos (Szilard, 2004).

Em engenharia, o MEF é comumente utilizado na modelação de problemas complexos pela sua rapidez em fornecer resultados satisfatórios.

“Hoje, o MEF é bastante popular e utilizado como ferramenta para a análise na mecânica dos sólidos, sendo, todavia, também aplicado em outras áreas da Engenharia, como Mecânica dos Fluidos, transferência de calor, acústica ou electromagnetismo” (Yamassaki, 2014).

Neste trabalho, desenvolve-se uma ferramenta computacional que aplica o método de elementos finitos para a obtenção de esforços em lajes maciças finas.

A simples utilização de um programa computacional baseado no MEF sem a devida percepção dos princípios do método, pode estar na origem das más interpretações ou a dificuldade na análise crítica dos resultados obtidos. Azevedo (2003) indica que há um elevado numero de acidentes em construções novas devido a este facto.

Segundo Kerlinger(1979), um engenheiro deve , quando estiver diante de um dado problema, questionar-se sobre o método mais eficiente de resolvê-lo. Fazendo jus a esse princípio, indaga-se, neste trabalho, sobre como tirar maior proveito do crescimento tecnológico para obter os esforços em lajes maciças finas.

1.2. Objectivos

1.2.1. Objectivo geral

- Desenvolver uma ferramenta computacional que aplica o método de elementos finitos para a obtenção de esforços em lajes maciças finas.

1.2.2. Objectivos específicos

- Descrever os diversos tipos de lajes, métodos empregues para o cálculo de esforços e a teoria em torno do MEF;
- Desenvolver um algoritmo que calcula as flechas e momentos flectores numa laje fina pelo MEF.
- Determinar os deslocamentos verticais que ocorrem numa laje maciça devido a uma carga uniformemente distribuída;
- Determinar os momentos flectores;
- Comparar os resultados obtidos com os dos métodos simplificados e um programa comercial.

1.3. Motivação

Com o avanço das tecnologias de informação e comunicação, o uso de métodos numéricos tem vindo a ganhar maior espaço no mundo académico e profissional, permitindo a análise de problemas mais complexos num reduzido espaço de tempo e com resultados satisfatórios.

É muito comum recorrer-se a *softwares* comerciais para se dimensionar elementos estruturais, principalmente em elementos bidimensionais e tridimensionais. Entretanto, o uso desses *softwares* é sujeito a termos e condições que podem envolver o pagamento de valores monetários para o seu uso pleno. Assim, por vezes recorre-se a vias não aconselháveis para o uso dos mesmos, sendo uma das mais usuais é a pirataria, onde se usa de forma ilegal (“*crackear*”) um *software* para que se possam obter todas as vantagens do mesmo.

Hoje em dia, muita gente possui um computador com capacidades de memória e de cálculo muito grandes porém, poucos fazem o devido uso dessas capacidades para facilitar o seu trabalho sem que infrinja a lei. No entanto, uma ferramenta computacional livre para o uso académico assim como profissional pode ser vantajosa.

1.4. Delimitações

A pesquisa restringe-se aos conteúdos abaixo descritos:

- Estudo de lajes maciças finas;
- Desenvolvimento de uma ferramenta computacional que permita efectuar cálculos de esforços para as diversas condições de apoio apresentadas nas tabelas de marcus.

1.5. Limitações

O trabalho possui algumas limitações no que se refere ao vasto campo das lajes maciças, pelo que:

- a) Considera apenas o uso do REBAP e RSA;
- b) Centra-se apenas em lajes com a geometria rectangular e/ou quadrangular;
- c) Aplicação apenas de cargas verticais e uniformemente distribuídas;
- d) Uso apenas de uma única linguagem de programação, o *fortran 2008*.

1.6. Estrutura do Trabalho

O trabalho é constituído por seis (6) capítulos devidamente enumerados e duas (2) secções não enumeradas que são a bibliografia e os anexos. Abaixo são descritos os capítulos e as respectivas secções:

- ❖ Capítulo I – Introdução
Visa esclarecer ao leitor os principais tópicos abordados no trabalho de forma geral e a sua respectiva importância.
- ❖ Capítulo II – Metodologia
Neste capítulo, descrevem-se os métodos e/ou estratégias usadas para a realização deste trabalho.
- ❖ Capítulo III – Revisão Bibliográfica
Contém a base teórica usada para suportar o presente trabalho.
- ❖ Capítulo IV – Proposta de Solução e Desenvolvimento do Algoritmo
Compreende a solução encontrada após o desenvolvimento do trabalho realizado, correspondendo às saídas para fazer face ao problema apresentado na introdução, tendo em conta diversos factores condicionantes associados ao mesmo. Apresentam-se também diversos aspectos técnicos a ter em conta no desenvolvimento do algoritmo e a descrição um pouco mais pormenorizada sobre o seu funcionamento.
- ❖ Capítulo V – Discussão dos Resultados
Tendo em conta os resultados obtidos pelo algoritmo, *software* e por tabelas, incluindo as questões normativas e teóricas, faz-se uma análise da solução proposta validando-a ou não.

❖ Capítulo VI – Conclusões e Recomendações

Apresentam-se as ilações do trabalho e as recomendações que abordam temas que podem ser tidos em consideração para futuras pesquisas ligadas ao assunto.

❖ Referências Bibliográficas

Nesta secção apresenta-se a lista das fontes usadas para o desenvolvimento do presente trabalho.

❖ Anexos

Nesta secção apresentam-se os elementos que auxiliaram no levantamento de dados e informações que contribuíram para a realização do trabalho, incluindo o algoritmo desenvolvido para que estudantes e/ou profissionais testem e façam o seu uso.

2. CAPÍTULO II – Metodologia

Descreve-se, nesta secção, os métodos que se recorreu de modo a responder ao problema apresentado e aos objectivos traçados. Além disso, apresentam-se as classificações das pesquisas essenciais para a compreensão do presente trabalho

2.1. Classificações das Pesquisas

2.1.1. Quanto à natureza

Nesta classificação, podemos ter pesquisas básicas e aplicadas. O presente trabalho enquadra-se numa pesquisa aplicada, pois segundo Silva & Menezes (2001, p. 20) pretende “gerar conhecimentos para aplicação prática dirigido a soluções de problemas específicos”.

Com base no método dos elementos finitos, procura-se obter uma solução prática de modo a se determinar os esforços em lajes maciças.

2.1.2. Quanto aos objectivos gerais

As pesquisas podem ser exploratórias, descritivas e explicativas. O presente trabalho desenvolve-se numa perspectiva exploratória, pois, segundo Gil (2002, p.41), este tipo de pesquisa "tem como objectivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vista a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses".

2.1.3. Quanto à abordagem do problema

Quanto à abordagem do problema as pesquisas podem ser quantitativas, qualitativas e mistas ou quali-quantitativas.

Para Silva & Menezes (2001, p.20), a pesquisa quantitativa “considera que tudo pode ser quantificável, o que significa traduzir em números opiniões e informações para classificá-las e analisá-las”.

Segundo Gerhardt & Silveira (2009, p.31), “a pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc”.

Tendo em consideração o problema que se pretende resolver e as suas diversas componentes neste trabalho, será feita uma pesquisa quali-quantitativa.

2.1.4. Quanto aos procedimentos técnicos

Quanto aos procedimentos técnicos, existem várias classificações tais como, a pesquisa bibliográfica, pesquisa documental, pesquisa experimental, levantamento, estudo de caso, pesquisa Expost-facto, pesquisa-Accão e pesquisa participante.

No presente trabalho, realiza-se uma pesquisa bibliográfica porque recorreu-se a livros, artigos e material publicado na *internet*. E de acordo com Gil (apud Silva & Menezes, 2001, p.21) este tipo de pesquisa é “elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de livros, artigos de periódicos e actualmente com material disponibilizado na *Internet*”.

A pesquisa bibliográfica é feita de modo a entender melhor o funcionamento das lajes no geral assim como do método que se pretende empregar para a solução do problema. Elabora-se, com base na revisão bibliográfica, uma proposta de solução que, essencialmente, será uma ferramenta computacional para a solução do problema em questão.

Foi feita também uma pesquisa documental que, de acordo com Matos e Lerche (apud Fonseca, 2002, p.32), “recorre a fontes mais diversificadas e dispersas, sem tratamento analítico tais como: tabelas estatísticas, jornais, revistas, relatórios, documentos oficiais, cartas, filmes, fotografias, pinturas, tapeçarias, relatórios de empresas, vídeos de programas de televisão, etc.”

2.1.5. Paradigma de programação

Paradigma é o estilo de se programar em computadores electrónicos e podem ser os seguintes: Paradigma Imperativo, Paradigma Estruturado, Paradigma Orientado a Objectos, Paradigma Funcional e Paradigma Lógico.

No presente trabalho foi adoptado o paradigma Imperativo, que segundo Manzano & Oliveira (2016, p.13), “possibilita o desenvolvimento da programação de forma

estruturada, permitindo a construção de rotinas por meio de módulos de procedimentos ou de funções que estejam interligados.”

2.1.6. Linguagem de programação

Para o desenvolvimento da solução do problema, código computacional, foi utilizada a linguagem de programação *fortran 08*, que é muito usada na ciência da computação e análise numérica e também pela familiaridade que os estudantes de engenharia civil têm com o mesmo.

2.1.7. Validação do algoritmo

O programa de cálculo proposto no presente trabalho é validado a partir de lajes cujos esforços foram calculados usando tabelas e programas comerciais de modo a ser aplicado em problemas diversos que o usuário possa enfrentar e que sejam de mesma natureza.

3. CAPÍTULO III – Revisão Bibliográfica

3.1. Elasticidade

De acordo com Timoshenko & Goodier(1951), todos os materiais possuem um grau de elasticidade até um certo limite. Portanto, é bastante importante abordar o grau de elasticidade dos materiais para que melhor se compreenda o comportamento estrutural das lajes em determinadas condições.

Para melhor se prosseguir é necessário definir as seguintes grandezas que de acordo com Timoshenko & Gere(1983):

- Designa-se por tensão a força por unidade de área e geralmente representa-se por uma letra grega.
- Designa-se por deformação ao deslocamento por unidade de comprimento.
- Designa-se também, por deslocamento a variação de comprimento.

Na elasticidade é importante o entendimento da relação entre a tensão e a deformação de um determinado material e para tal, faz-se o teste de tracção. Este teste ,de acordo com Timoshenko(1983), consiste em colocar “um corpo de prova, em geral barreta de secção circular, na máquina de testar e sujeito à tracção. A força actuante e os deslocamentos resultantes são medidos com o aumento da carga”.

Posteriormente, as tensões são obtidas com base nas forças aplicadas no corpo de prova e a sua secção transversal e as deformações com base nos deslocamentos obtidos divididos pelo comprimento inicial do corpo de prova. Com as tensões e deformações é possível obter um diagrama de tensão-deformação do material testado. A figura 1 mostra um gráfico de tensão deformação do aço que serve apenas de exemplo.

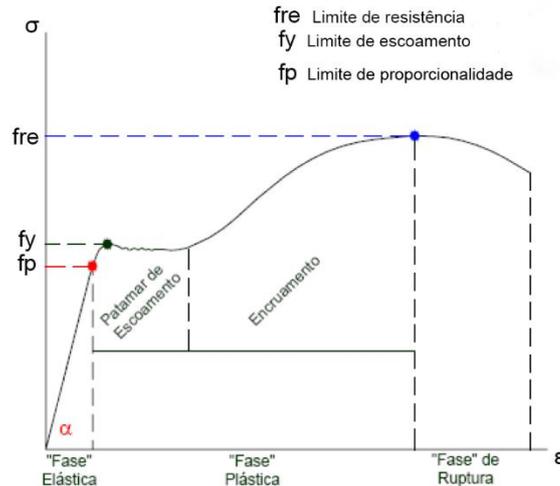


Figura 1: gráfico tensão deformação.
 Fonte: aulas da disciplina materiais de construção

Aos materiais que sofrem grandes deformações antes de atingir a fractura são classificados como dúcteis e os que rompem a relativamente pequenas deformações são designados por frágeis (Timoshenko & Gere, 1983). Temos o exemplo do aço e alumínio para o primeiro caso e do betão e materiais cerâmicos para o segundo caso.

3.1.1. Elasticidade Linear e Lei de Hooke

Para uma barra em tracção, a relação linear entre a tensão e a deformação pode ser descrita pela seguinte equação, conhecida como a lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{3.1}$$

Onde E é a constante de proporcionalidade ou módulo de elasticidade ou, ainda, módulo de Young e é diferente para cada material (Timoshenko & Gere, 1983).

Também, pode se afirmar que o módulo de Young é a tensão necessária para causar uma deformação unitária num corpo.

Define-se por *flexibilidade* de uma barra como a deformação decorrente de uma carga unitária e *rijeza* à força necessária para produzir uma deformação unitária. E chama-se

rigidez axial ao produto entre o módulo de elasticidade e a área da secção a ser estudada (Timoshenko & Gere,1983).

Quando se exerce uma determinada força de tracção ou compressão num determinado corpo, ocorre um aumento ou diminuição da secção do corpo de prova. A relação existente entre a deformação lateral e longitudinal designa-se por coeficiente de poisson ou relação de poisson e é constante na região elástica (Timoshenko & Gere, 1983) :

$$\nu = \frac{\text{deformacao lateral}}{\text{deformacao longitudinal}} \quad 3.2$$

Como mostra a figura 1, na região elástica o gráfico é uma linha recta, ou seja, da origem até ao ponto A.

De acordo com Sanches(2011), na região elástica existem diversas relações, entre as quais temos as equações de equilíbrio, equações constitutivas e equações de compatibilidade. O esquema abaixo apresenta essas relações com as equações apresentadas de forma matricial onde, “ ∂^* ” é o operador diferencial de equilíbrio, σ é o vector que agrupa as tensões generalizadas, \mathbf{D} é um operador constitutivo de rigidez generalizado, σ_0 é o vector que agrupa as tensões generalizadas iniciais, ϵ é o vector que reúne as deformações generalizadas, ∂ é o operador diferencial de compatibilidade, \mathbf{u} é o campo dos deslocamentos generalizados e \mathbf{f} é o vector das forças generalizadas”.

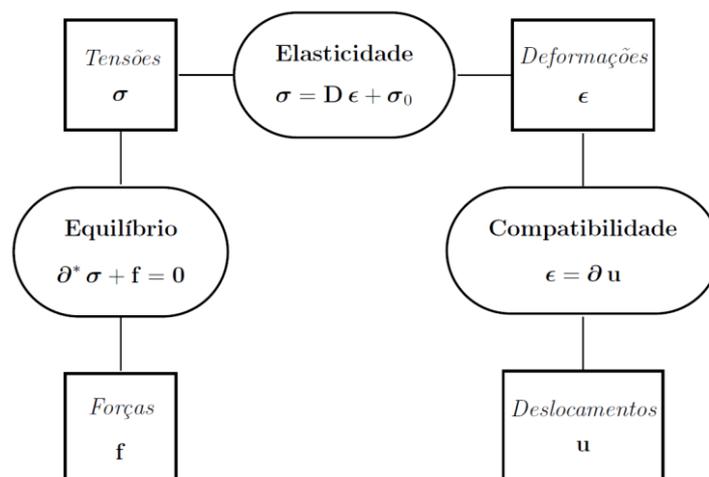


Figura 2:Esquema da dependência entre as relações constitutivas e as equações de equilíbrio e de compatibilidade.
Fonte: Sanches(2011)

3.1.2. Equações Fundamentais da Elasticidade Tridimensional

Abaixo são apresentadas as equações fundamentais na elasticidade tridimensional e de forma matricial. Porém, é necessário entender a classificação das condições de fronteira e de acordo com Castro & Freitas(2008), podemos ter duas condições de fronteira num elemento a ser estudado:

- Essencial ou ainda, cinemática, onde se especifica qual o valor dos deslocamentos numa determinada fronteira, por exemplo, deslocamento transversal e rotação.
- Natural ou ainda, estáticas, que passam pela imposição de um determinado valor para as cargas directamente aplicadas nessa fronteira. Exemplo, momento flector e o esforço transversal.

De acordo com Sanches (2011), para a elasticidade tridimensional, e um domínio genérico V , figura 3, a fronteira S pode ser parametrizada a partir de um espaço de duas dimensões e decomposta pela parcela natural S_t e essencial S_u .

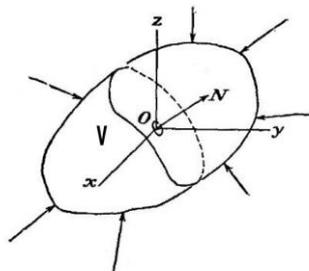


Figura 3: corpo genérico em equilíbrio
fonte: Timoshenko & Goodier

De acordo com Sanches(2011), temos:

a) Equações de Equilíbrio

No domínio V do corpo livre, as equações de equilíbrio podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\partial^* \sigma_{ij} + f_j = 0$$

3.3

Onde: $\sigma_{i,j}$ são componentes do tensor das tensões de Cauchy (fig.4) e f_j são as componentes das forças de massa.

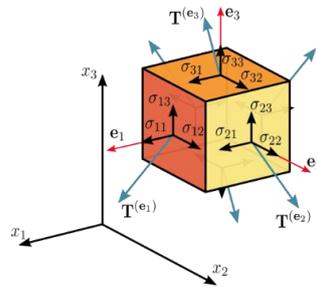


Figura 4: Tensor tensão de Cauchy
fonte: wikipedia.org

Na fronteira natural, têm-se as seguintes equações:

$$\sigma_{i,j} n_i = \bar{t}_j$$

3.4

Onde: n_i são as componentes do vector unitário normal a superfície exterior e \bar{t}_j são componentes das tracções aplicadas.

Os vectores que agrupam as tensões, as forças de massa e as tensões na fronteira natural são:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}; f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}; \bar{t} = \begin{bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_3 \end{bmatrix}$$

As matrizes de operadores diferenciais e componentes das normais na fronteira natural:

$$\partial^* = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{bmatrix}; N^* = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & 0 & n_3 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix}$$

De modo geral tem-se a equação 3.5 :

$$\partial^* \sigma + f = 0 \quad 3.5$$

b) Equações de Compatibilidade

No domínio V, tem-se:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \partial(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad 3.6$$

Onde, ϵ_{ij} são as componentes do tensor de deformações infinitesimais e u_i são as componentes do campo dos deslocamentos.

Na fronteira essencial tem-se:

$$u_i = \bar{u}_i \quad 3.7$$

Onde \bar{u}_i são as componentes do campo de deslocamento prescritas na fronteira cinemática.

Para a distorção tem-se:

$$\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}, i \neq j \quad 3.8$$

Os vectores que agrupam as deformações, deslocamentos e deslocamentos na fronteira cinemática são:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix}$$

A matriz de operadores diferenciais:

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \end{bmatrix}$$

De modo geral:

$$\epsilon = \partial u \quad 3.9$$

c) Relações Constitutivas

Assumindo que o material é elástico linear, homogêneo e isotrópico e considerando os efeitos da temperatura tem-se a seguinte relação:

$$\sigma_{i,j} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{i,j} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \delta_{ij} \quad 3.10$$

Onde E é módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson, α é o coeficiente de dilatação térmica linear e ΔT é a variação de temperatura.

De forma matricial temos:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0 = -\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De forma genérica tem-se:

$$\sigma = D\epsilon + \sigma_0$$

3.11

3.1.3. Equações Fundamentais da Elasticidade Bidimensional

De acordo com Sanches (2011), com a mudança do número de dimensões, figura 5, apenas a relação constitutiva altera e as restantes equações permanecem as mesmas com o facto de que considerar-se-á apenas as relevantes.

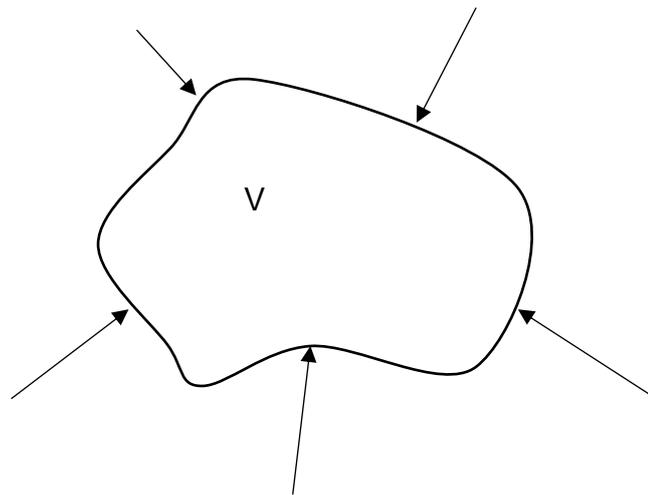


Figura 5: Corpo plano em equilíbrio

Nas equações que se seguem faz-se o uso dos índices gregos, assim, tem-se:

a) Equações de Equilíbrio

Na posição indeformada do domínio V , as equações de equilíbrio podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\partial^* \sigma_{\alpha\beta} + f_\beta = 0$$

3.12

Onde: $\sigma_{\alpha\beta}$ são componentes do tensor das tensões de Cauchy e f_β são as componentes das forças de massa.

Na fronteira estática temos as seguintes equações:

$$\sigma_{\alpha\beta}n_{\alpha} = \bar{t}_{\beta}$$

Onde: n_{α} são as componentes do vector normal unitário na superfície e \bar{t}_{β} são componentes das tracções aplicadas na fronteira estática.

Os vectores que agrupam as tensões, as forças de massa e as tensões na fronteira são:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}; f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \bar{t} = \begin{bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{bmatrix}$$

As matrizes de operadores diferenciais e normais na fronteira estática:

$$\partial^* = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}; N^* = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}$$

b) Equações de Compatibilidade

No domínio V, tem-se:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad 3.13$$

Onde, $\epsilon_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor de deformações infinitesimais e u_{α} são as componentes do campo dos deslocamentos.

Na fronteira essencial tem-se:

$$u_{\alpha} = \bar{u}_{\alpha}$$

Onde \bar{u}_{α} são as componentes do campo de deslocamento prescritas na fronteira essencial.

Para a distorção tem-se:

$$\gamma_{\alpha\beta} = 2\epsilon_{\alpha\beta}, \alpha \neq \beta$$

Os vectores que agrupam as deformações e deslocamentos na fronteira cinemática são:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

A matriz de operadores diferenciais:

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix}$$

c) Relações Constitutivas

Na relação da elasticidade tridimensional, obtém-se o *estado plano de tensão* fazendo a seguinte imposição: $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, o que resulta em:

$$\gamma_{13} = 0$$

$$\gamma_{23} = 0$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{\alpha\alpha} + \alpha\Delta T$$

Assim:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \quad 3.14$$

E os operadores na forma matricial:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = -\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2. Lajes

“As lajes são elementos estruturais que constituem os pisos e cobertura dos edifícios, e as plataformas de outro tipo de construções cuja função é formar superfícies planas ou horizontais ou inclinadas possibilitando a circulação e a colocação de equipamentos” (Apletton, et al., 2014, p. 70).

Segundo a NBR 6118 (*apud* Folleto, 2011, p. 22) designa-se por placas os “Elementos de superfície plana sujeitos principalmente a acções normais ao seu plano”.

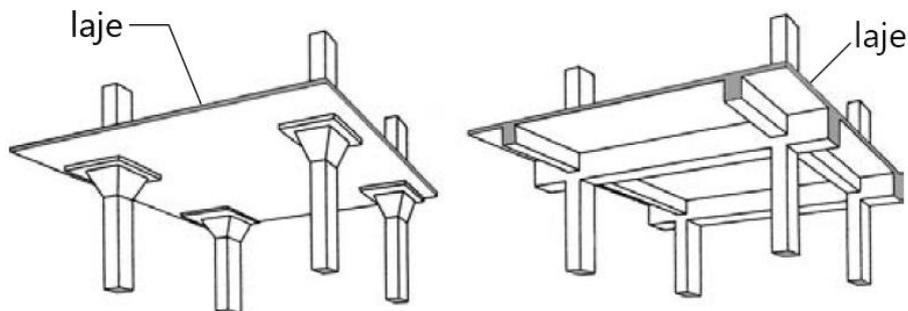


Figura 6: lajes armadas em edifícios
fonte: Szilard (2004)

É comum as placas ou peças laminares planas serem designadas por lajes em estruturas de betão armado. As mesmas podem ser classificadas de acordo com o tipo de apoio (lajes vigadas, fungiformes, e em meio elástico), constituição (monolíticas e mistas), modo de flexão dominante (lajes armadas numa direcção e lajes armadas em duas direcções) e a forma de fabrico (betonadas “in situ” e pré-fabricadas) (Apletton, et al., 2014).

Para o presente trabalho, importa referir a classificação que se baseia na relação entre a espessura (h) e o menor vão (l), ou o vão que absorve maior parte dos esforços. A seguir apresenta-se a definição que de acordo com Szilard (2004), as placas podem ser:

- Placas duras ou finas quando a relação h/l está entre $1/50$ e $1/10$;
- Membranas ou placas muito finas quando a relação h/l é menor que $1/50$;
- Placas moderadamente espessas quando a relação h/l está entre $1/10$ e $1/5$;
- E placas espessas cuja relação h/l é maior que $1/5$.

De modo a analisar estruturalmente as peças laminares, recorre-se a dois grupos de métodos que são: os métodos elásticos e os métodos plásticos. E de acordo com

Montoya et. al. (*apud* Folleto, 2011, p. 24), “com o método elástico é possível obter, com uma boa aproximação dos esforços na situação de serviço, entretanto o método plástico é mais indicado para uma obtenção mais racional da carga última na situação de ruína da placa”.

De acordo com Folleto (2011), podemos mencionar os seguintes métodos elásticos: teoria de flexão das placas, método das diferenças finitas, método da analogia da grelha equivalente, método dos elementos finitos e métodos simplificados (por exemplo, método de marcus). E quanto aos métodos plásticos podemos citar o método das charneiras plásticas ou método das linhas de rotura.

Para o presente trabalho, aborda-se, em seguida, a teoria de flexão das placas finas, o método de elementos finitos e o método de marcus.

3.2.1. Teoria de Flexão das placas Finas

Para as placas, normalmente, tem-se em consideração duas teorias que são aplicadas: à teoria de Reissner-Mindlin e à de Kirchhoff. Segundo Duarte (*apud* Folleto, 2011, p. 25) “a teoria de Kirchhoff interpreta satisfatoriamente o comportamento para placas com relação entre espessura e o menor vão de 1/10 até 1/100”. E de acordo com Folleto (2011), as lajes em edificios geralmente possuem uma relação entre a espessura e o menor vão de 1/40 a 1/60 e, portanto, a teoria apresentada por Kirchhoff é satisfatória para o presente trabalho.

De acordo com Szilard (2004), as simplificações feitas na teoria kirchhoff baseiam-se nas seguintes hipóteses:

- O material é homogéneo, isotrópico e elástico linear e, portanto, segue a lei de Hooke.
- A placa é inicialmente plana.
- O plano médio da placa permanece indeformado durante a curvatura.
- A espessura constante da placa é pequena comparada com as outras dimensões e ,portanto, a menor dimensão lateral da placa é no mínimo 10 vezes maior que a espessura.
- As deflexões transversais $w(x, y)$ são pequenas comparadas com a espessura da placa. A máxima deflexão deverá ser de 1/10 da espessura da placa;

- As rotações do plano médio são pequenas comparadas com a unidade;
- Secções normais ao plano médio antes da deformação permanecem planas e normais ao plano médio deformado. Portanto, as deformações devido ao esforço transversal são negligenciadas.
- A tensão normal na direcção transversal ao plano da placa pode ser negligenciada.

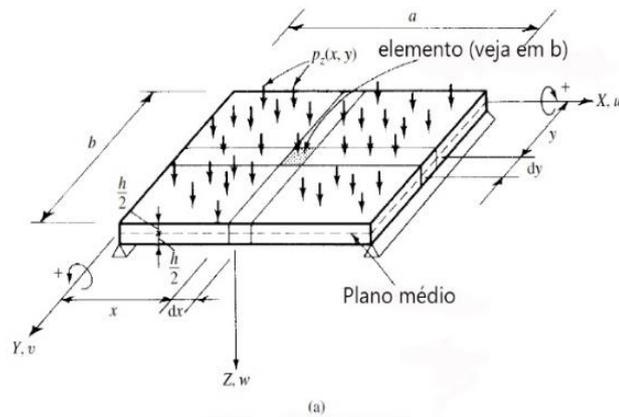


Figura 7: placa uniformemente carregada
fonte: Szilard(2004)

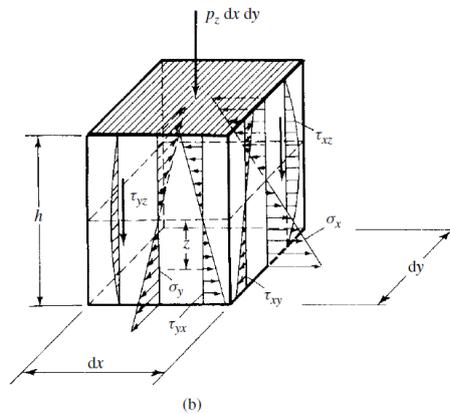


Figura 8: detalhe de um elemento de placa
fonte: Szilard(2004)

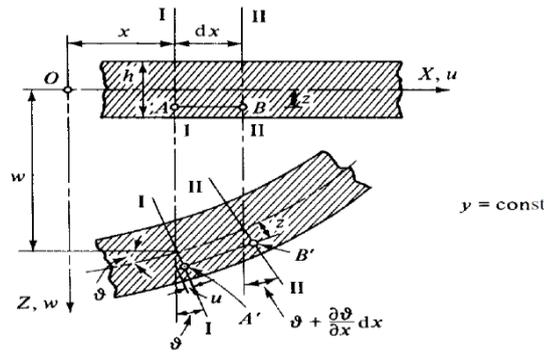


Figura 9: Secção antes e depois da deflexão da placa
 fonte: Szilard (2004)

A seguir apresentam-se algumas equações importantes para o estudo das placas finas. As mesmas equações podem ser encontradas em diversa bibliografia como por exemplo, em Szilard (2004).

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 3.15$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad 3.16$$

$$m_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad 3.17$$

$$v_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 3.18$$

$$v_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 3.19$$

Onde: m_x é o momento flector na direcção x (em torno do eixo y); m_y é o momento flector na direcção y (em torno do eixo x); m_{xy} é o momento torsor; v_x é esforço

transverso na direcção x; v_y é esforço transverso na direcção y; ν e D é o coeficiente de Poisson e a rigidez a flexão da placa, respectivamente.

A rigidez à flexão é dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Onde: h é a espessura da placa e E é o módulo de elasticidade.

O equilíbrio das forças verticais na placa onde actua a carga $p(x, y)$ resulta em:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p(x, y) = 0 \quad 3.20$$

Fazendo o equilíbrio dos momentos nos eixos x e y, usando as equações dos momentos e do equilíbrio das forças verticais, obtém-se a equação governante das placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P(x, y)}{D} \quad 3.21$$

E pode ser escrita da seguinte forma:

$$D \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = P(x, y) \quad 3.22$$

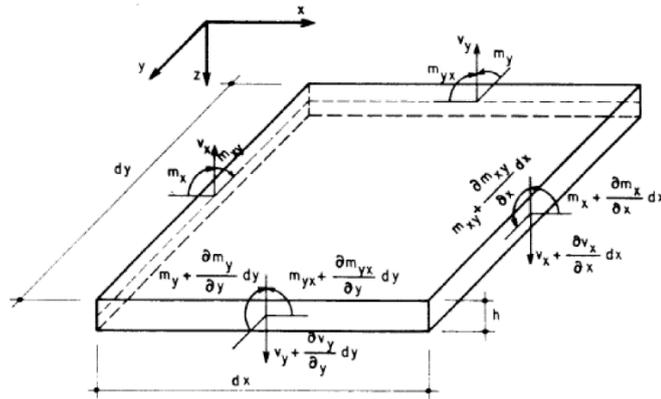


Figura 10: Esforços em um elemento de placa
 fonte: Folleto (2011)

Condições de fronteira da teoria de Kirchhoff para as placas

De acordo com Folleto (2011, p. 28), a equação governante das placas é de quarta ordem e, portanto, “são necessárias duas condições de contorno para cada bordo da placa”.

De acordo com Szilard (2004), podemos ter algumas das seguintes condições de fronteira:

- Condições de fronteira essenciais (deslocamentos e rotações nulas numa fronteira).
- Condições de fronteira natural (momento e esforço transversal nulo numa fronteira).
- Condições de fronteira mistas (deslocamento nulo, momento nulo e surgimento forças de canto).
- Apoio elástico e restrição.

Abaixo segue-se o resumo das condições de fronteira mencionadas com as respectivas equações matemáticas.

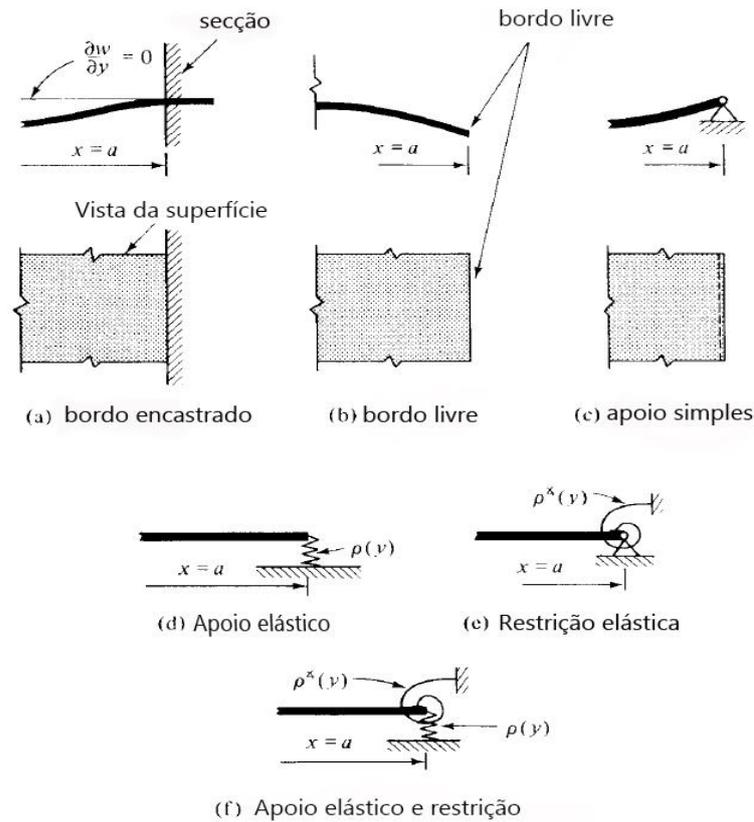


Figura 11: Diversas condições de fronteira
 fonte: Szilard (2004)

tipo de apoio em $x = a$

expressões matemáticas

apoio simples (fig. 11c)	$(w)_{x=a} = 0;$ $(m_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$
bordo encastrado (fig. 11a)	$(w)_{x=a} = 0; \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$
bordo livre (fig. 11b)	$(m_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$ $(v_x)_{x=a} = \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0$
bordo parcialmente encastrado (fig. 11e)	$(w)_{x=a} = 0;$ $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = -(\rho^x)^{-1} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a}$
apoio elástico (fig. 11d)	$(m_x)_{x=a} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$

Apoio elástico e restrição	$(w)_{x=a} = \rho^{-1}D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a}$
	$(w)_{x=a} = \rho^{-1}D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a}$
	$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = -(\rho^{\ast})^{-1}D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a}$

Tabela 1: resumo das condições de fronteira
 fonte: Szilard (2004)

Onde: ρ é a rigidez translacional do apoio e ρ^{\ast} é a rigidez rotacional do apoio.

3.2.2. Método de Marcus

“O processo de Marcus nada mais é que fazer a divisão da laje por uma grelha de vigas e depois aplicar adequados coeficientes que levam em conta exactamente esse aspecto nas lajes de solidariedade conjunta e integrada total de toda a malha de vigas” (Botelho & Marchetti, 2011, p. 97).

“O método consiste em considerar duas faixas de largura unitária, uma em cada direcção, as quais se cruzam no centro da laje” (Folletto, 2011, p. 31).

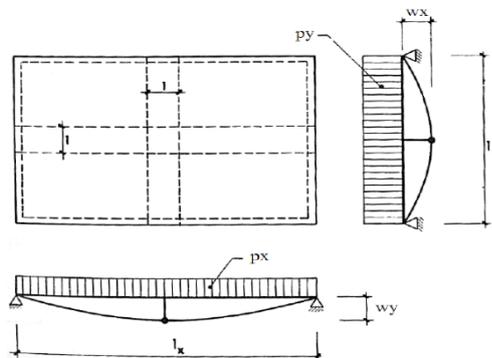


Figura 12: laje simplesmente apoiada nos nos quatro bordos
 fonte: Montoya et al. (adaptado por Folletto, 2011)

O método de Marcus é adoptado apenas para lajes armadas em duas direcções e uma das direcções não é superior ao dobro da outra (Botelho & Marchetti, 2011).

Este método simplificado considera seis (6) casos de condições de fronteira ou apoio em lajes: 1) laje simplesmente apoiada em todos bordos; 2) laje encastrada em um (1) lado e simplesmente apoiada no resto dos bordos; 3) laje encastrada em dois (2) bordos adjacentes e simplesmente apoiada nos bordos restantes; 4) laje encastrada em dois bordos opostos e simplesmente apoiada nos bordos restantes; 5) laje encastrada em três (3) bordos adjacentes e simplesmente apoiada no bordo restante; 6) E laje encastrada nos quatro (4) bordos.

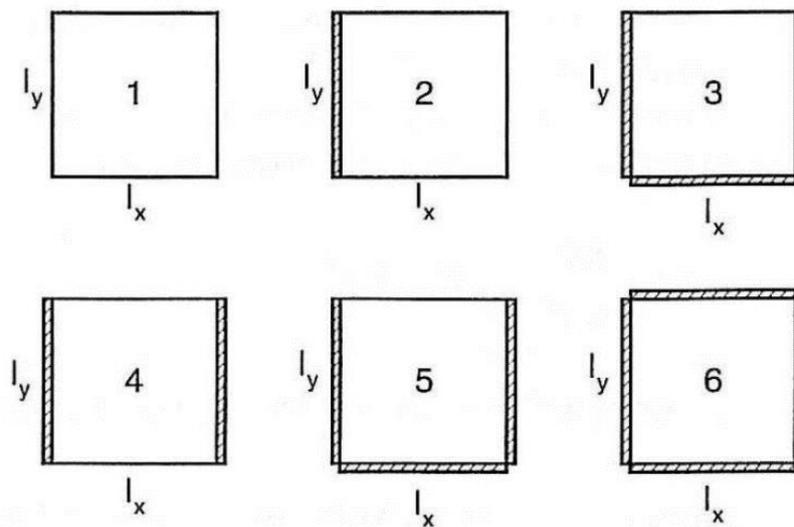


Figura 13: Condições de contorno das lajes rectangulares
 fonte: Araújo (2003, p. 72)

Tendo em consideração a fig. 12, de acordo com Montoya et al (apud Folleto, 2011, p. 31), a carga p que actua sobre a laje deve ser dividida em p_x e p_y de tal forma que as flexões w_x e w_y sejam iguais.

Portanto, pode-se escrever as seguintes relações:

$$p = p_x + p_y$$

3.23

$$w_x = \frac{5}{384} \frac{p_x l_x^4}{EI} \quad 3.24$$

$$w_y = \frac{5}{384} \frac{p_y l_y^4}{EI} \quad 3.25$$

$$w_x = w_y \quad 3.26$$

Onde: E é o módulo de elasticidade do betão e I é o momento de inércia da faixa de largura unitária.

Considerando que $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$, pode também se escrever o seguinte:

$$q_x = k_x q \quad 3.27$$

$$q_y = 1 - q_x \quad 3.28$$

$$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \quad 3.29$$

$$k_y = 1 - k_x \quad 3.30$$

Assim, os momentos máximos nas direcções x e y serão:

$$M_x = m_x q l_x^2 \quad 3.31$$

$$M_y = m_y q l_x^2 \quad 3.32$$

Onde, $m_x = \frac{k_x}{8}$ e $m_y = \frac{k_y \lambda^2}{8}$.

Considerando a rigidez a torção introduz-se o coeficiente C e assim, os momentos flectores positivos corrigidos serão:

$$M_{x0} = C_x M_x; \quad M_{y0} = C_y M_y$$

Onde: $C_x = 1 - \frac{20k_x}{3\alpha_x \lambda^2}$ e $C_y = 1 - \frac{20k_y}{3\alpha_y}$

Os coeficientes α_x e α_y dependem das condições de apoio:

- a) $\alpha = 8$ para a faixa biapoiada;
- b) $\alpha = 14.22$ para a faixa encastrada e apoiada;
- c) $\alpha = 24$ para a faixa biencastrada;

De modo mais comodo pode se usar as tabelas em anexo1 que são uma adaptação de Pinheiro.

3.3. Método de Elementos Finitos

No presente capitulo faz-se uma abordagem geral ao MEF e a forma de resolver o problema das lajes recorrendo ao mesmo método. O MEF possui uma sequência lógica e clara ao resolver um problema e esta será abordada detalhadamente. Os passos apresentados são detalhados em Szilard (2004).

3.3.1. Discretização

O MEF faz o uso de soluções locais aproximadas de modo a obter a solução do problema geral aplicando a aproximação *piecewise*. A placa ou o elemento contínuo é subdividido em pequenas sub-regiões, designadas por elementos finitos. As mesmas podem ser rectangulares, triangulares com lados rectos ou curvilíneos. Estas sub-regiões não devem se sobrepôr e a conexão entre elas deve ser apenas através dos seus nós. A este primeiro procedimento designa-se por discretização. O passo a seguir envolve o cálculo da matriz de rigidez do elemento $K_e^{(N)}$. Este relaciona os deslocamentos de um determinado nó com as forças em outros nós da mesma sub-região. Os coeficientes k_{ij} da matriz de rigidez do elemento representam as forças activas ou reactivas causadas por um deslocamento unitário num determinado nó enquanto os outros mantêm-se fixas.

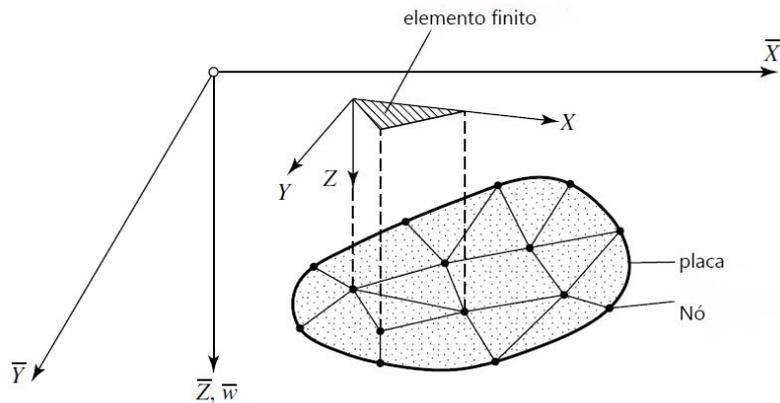


Figura 14: discretização do elemento continuo
 fonte: Adaptado de Szilard(2004)

Faz-se também o cálculo da matriz das forças ou carregamentos locais do elemento, \mathbf{p} . E com estes dados faz-se a assemblagem de modo a se obter a matriz de rigidez global $\bar{\mathbf{K}}$ e o vector das forças globais $\bar{\mathbf{P}}$.

Por fim, obtém-se a equação governante dos elementos finitos:

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{P}} \quad 3.33$$

Ou

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1}\bar{\mathbf{P}} \quad 3.34$$

Onde $\bar{\mathbf{d}}$ representa a matriz dos deslocamentos globais.

- **Formulação da Matriz de rigidez do elemento**

Pode-se obter a matriz de rigidez do elemento aplicando um dos seguintes princípios: o princípio dos trabalhos virtuais, princípio da energia potencial mínima, princípio da energia complementar mínima, segundo teorema de Castigliano e o método de deslocamento unitário.

Através dum dos princípios acima obtém-se as seguintes equações:

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} dV \quad 3.35$$

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad 3.36$$

Onde: \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez do elemento, \mathbf{D} é a matriz que armazena as derivadas das funções de forma, \mathbf{d} é a matriz dos deslocamentos do elemento, \mathbf{E} é a matriz de elasticidade do elemento para materiais elásticos e isotrópicos e \mathbf{p} é o vector das forças ou carregamentos nos nós do elemento.

3.3.2. Selecção das funções de forma adequadas

A precisão da solução do problema depende muito das funções de interpolação escolhidas.

A função de forma N_i para um nó i deve possuir um valor unitário no nó i e deve ser zero para todos outros nós do elemento e lados que não contem o nó i (Szilard, 2004). Veja a figura 15.

Os requisitos básicos para a função de forma de um elemento são:

- Continuidade no elemento
- Continuidade sobre as fronteiras dos elemento
- Compatibilidade entre elementos
- Deslocamentos do corpo rígido que devem ser representados
- Invariabilidade por deslocamentos do corpo rígido
- Capacidade de representar curvaturas constantes
- Uma boa aproximação das verdadeiras deflexões da placa devido a deslocações unitárias nos nós.

Para além dos requisitos acima, ao escolher uma função de forma é necessário ter em conta o formato do elemento e o número de nós. Geralmente as funções polinomiais são as mais escolhidas por serem fáceis de integrar e derivar.

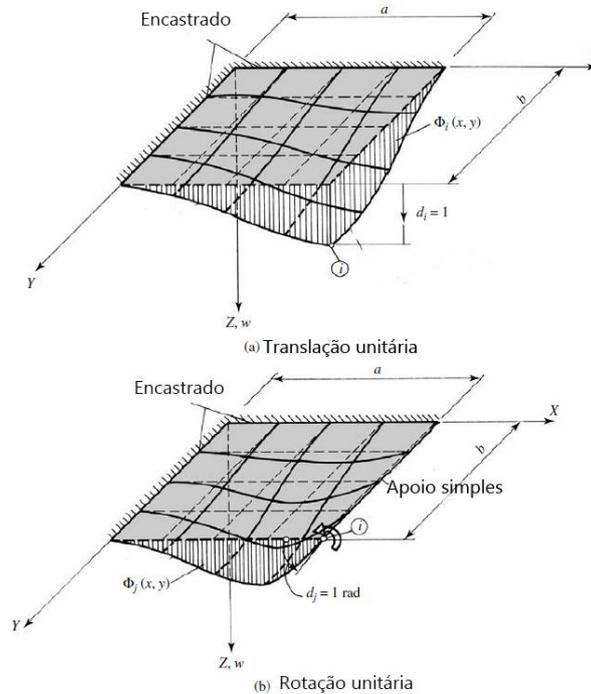


Figura 15: funções de forma devido a deslocamentos unitários
 fonte: adaptado de Szilard (2004)

A forma polinomial das funções de forma é a seguinte:

$$w(x,y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \dots] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad 3.37$$

Para além dos requisitos apresentados, ao escolher a função de forma há necessidade de ter em conta o seguinte:

- O número de coeficientes α_i deve ser igual ao número de graus de liberdade do elemento;

- O polinómio não deve apenas conter termos com x ou y, mas ambos.
- O polinómio de ordem n que possui todos os termos não varia quando transformado de um sistema de coordenadas para o outro.

A escolha de um polinómio adequado não é uma tarefa fácil, pois há que ter em consideração todos os requisitos mencionados e por vezes há necessidade de se criar mecanismos de se adicionar mais deslocamentos por determinar em um nó de modo a se cumprir os requisitos acima.

De acordo com Szilard (2004), para elementos triangulares, o polinómio abaixo tem dado excelentes resultados:

$$w(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \dots \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{21} \end{Bmatrix} \quad 3.38$$

Onde em cada nó do elemento temos 6 incógnitas que são o deslocamento transversal, a rotação em torno do eixo y e x, os momentos em torno do eixo y e x e o momento torsor $(w \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})$. Tem-se também três rotações $(\frac{\partial w}{\partial n})$ nos pontos intermédios do elemento. Assim, totalizando 21 incógnitas. Veja a figura abaixo.

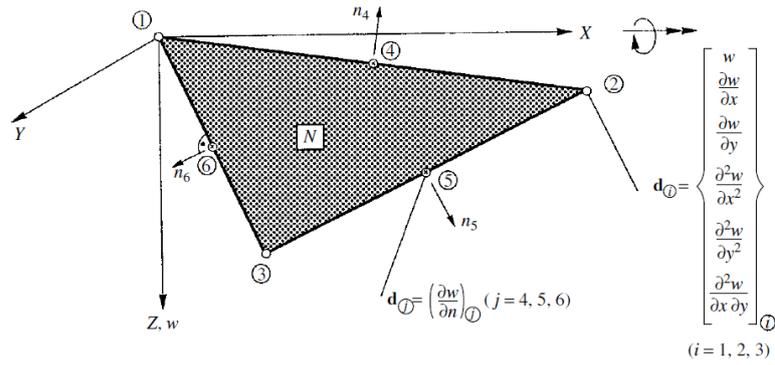


Figura 16: Elemento triangular baseado num polinómio do quinto grau completo
 Fonte: Szilard (2004)

Em placas rectangulares, a escolha de elementos rectangulares é mais adequada. De acordo com Szilard (2004), para o elemento rectangular, o polinómio do sexto grau abaixo fornece bons resultados:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 \\
 & + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} xy^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 \\
 & + \alpha_{16} x^3 y^3
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Onde em cada nó do elemento temos o deslocamento transversal, a rotação em x e y e o momento torsor.

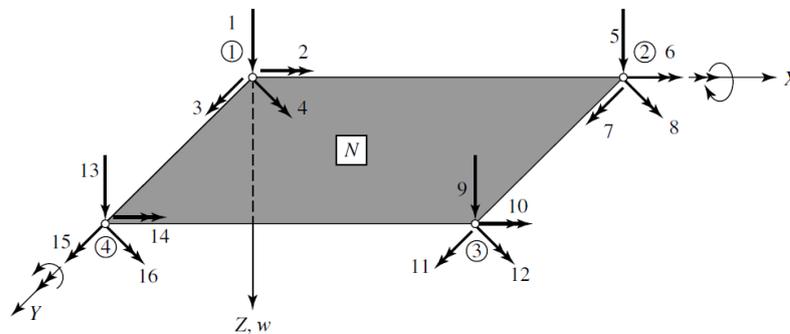


Figura 17: Elemento rectangular com 16 graus de liberdade
 Fonte: Szilard (2004)

3.3.3. Formulação do elemento

O presente trabalho dá mais ênfase as placas ou lajes com formas rectangulares e, portanto, o elemento a ser analisado é rectangular. O elemento rectangular em análise tem 16 graus de liberdade e o mesmo permite a escolha de uma função de forma que obedece a todos os requisitos mencionados. Este elemento tem em cada nó o deslocamento transversal, a rotação em x e em y e a torção:

$$d_i = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_{xy} \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}_i \text{ para } i = 1,2,3,4. \quad 3.40$$

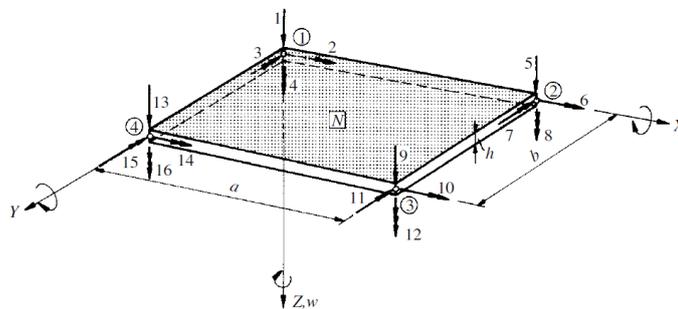


Figura 18: elemento com 16 graus de liberdade
fonte: Szilard(2004)

A função polinomial de interpolação tem a seguinte forma:

$$w(x, y) = \mathbf{w}^T \quad 3.41$$

Em geral tem-se:

$$w(x, y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_{16}] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{16} \end{Bmatrix} \quad 3.42$$

Seja:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{a^3}(a^3 - 3ax^2 + 2x^3), & q_1 &= \frac{1}{b^3}(b^3 - 3by^2 + 2y^3), \\ p_2 &= \frac{1}{a^2}(a^2x - 2ax^2 + x^3), & q_2 &= \frac{1}{b^2}(b^2y - 2by^2 + y^3), \\ p_3 &= \frac{1}{a^3}(3ax^2 - 2x^3), & q_3 &= \frac{1}{b^3}(3by^2 - 2y^3), \\ p_4 &= \frac{1}{a^2}(x^3 - ax^2), & q_4 &= \frac{1}{b^2}(y^3 - by^2), \end{aligned}$$

Onde a e b são as dimensões do elemento. E portanto, as funções de forma para os 16 deslocamentos serão:

$$\begin{aligned} N_1 &= p_1q_1, & N_9 &= p_3q_3, \\ N_2 &= p_2q_1, & N_{10} &= p_4q_3, \\ N_3 &= p_1q_2, & N_{11} &= p_3q_4, \\ N_4 &= p_2q_2, & N_{12} &= p_4q_4, \\ N_5 &= p_1q_3, & N_{13} &= p_3q_1, \\ N_6 &= p_2q_3, & N_{14} &= p_4q_1, \\ N_7 &= p_1q_4, & N_{15} &= p_3q_2, \\ N_8 &= p_2q_4, & N_{16} &= p_4q_2, \end{aligned}$$

Os coeficientes da matriz de rigidez do elemento são obtidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= D \int_0^b \int_0^a \left[\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + 2(1 \right. \\ &\quad \left. - \nu) \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad 3.43 \end{aligned}$$

A equação acima pode também ser expressa da seguinte maneira:

$$k_{ij} = \frac{Eh^3}{12ab(1-\nu^2)} \left[\beta_1 \left(\frac{b}{a} \right) + \beta_2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \beta_3 + \beta_4 \nu \right] a^{\beta_5} b^{\beta_6} \quad 3.44$$

Onde as constantes $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_6$ podem ser obtidas na tabela em anexo 2.

Na matriz de rigidez do elemento não é necessário determinar todos os seus coeficientes, pois é simétrica e é necessário determinar apenas as quatro colunas da matriz e mudar os índices i e j adequadamente e o sinal se necessário. A matriz é representada em anexo 3.

3.3.4. Introdução das Cargas actuantes e a obtenção das tensões

De acordo com Szilard (2004) podemos ter cinco formas diferentes de cargas actuando no elemento e que são: forças concentradas e momentos actuando num determinado nó, cargas distribuídas, deslocamentos prescritos na fronteira, forças devido ao volume do corpo (exemplo, peso próprio) e forças devido a variação da temperatura.

As cargas concentradas e os momentos devem ser aplicados directamente aos nós com o correspondente grau de liberdade na matriz de rigidez. A divisão da laje ou placa deve ser feita de modo que os nós coincidam com os pontos de aplicação das cargas concentradas.

As cargas distribuídas devem ser convertidas para cargas concentradas ou nodais. Esta conversão pode ser feita de três maneiras: método directo, equivalência estática das cargas e representações consistentes da carga.

Através do método directo, a carga distribuída é transformada em uma carga concentrada multiplicando a área do elemento finito pelo valor da carga distribuída. A carga concentrada é depois dividida pelo número de nós do elemento de igual forma. Sendo o elemento muito pequeno, este método fornece bons resultados.

No método de equivalência estática faz-se a sua respectiva equivalência estática da carga distribuída, transformando a em cargas concentradas e momentos equivalentes.

O método mais exacto é o de representações consistentes da carga. Este método baseia-se no princípio dos trabalhos virtuais, o qual afirma que o trabalho realizado pelas cargas concentradas deve ser igual ao trabalho realizado pela carga distribuída.

A carga consistente no nó i do elemento é obtida da seguinte maneira:

$$P_i^N = \iint \phi_i^{(N)}(x, y) P_z(x, y) dx dy \quad 3.45$$

$$M_i^N = \iint \phi_j^{(N)}(x, y) P_z(x, y) dx dy \quad 3.46$$

Onde ϕ_i e ϕ_j representam as seguintes funções de forma para vigas:

$$\phi_i(x, y) = \left[3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right] \left[3 \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right] \quad 3.47$$

$$\phi_j(x, y) = \left[a \left(\frac{x}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right] \left[3 \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right] \quad 3.48$$

De um modo mais preciso ainda, deve se usar as funções de forma do elemento e não as acima. Porém, de qualquer forma obtém-se resultados muito satisfatórios.

A introdução dos deslocamentos deve ser muito cuidadosa, pois uma pequena alteração no seu valor pode ocasionar grandes mudanças nas tensões resultantes. Essa introdução pode ser feita de duas maneiras demonstradas abaixo. Seja a seguinte equação global:

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \dots & \bar{k}_{1n} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \dots & \bar{k}_{2n} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \dots & \bar{k}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{k}_{n1} & \bar{k}_{n2} & \bar{k}_{n3} & \dots & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \vdots \\ \bar{d}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{Bmatrix} \quad 3.49$$

Na primeira forma faz-se a multiplicação do coeficiente correspondente ao deslocamento por um número muito grande e se faz a substituição do respectivo deslocamento. Como exemplo, considere-se que $\bar{d}_2 = \delta$ na equação global anterior. Multiplica-se o coeficiente \bar{k}_{22} por um número enorme e neste caso, seja 10^{10} e \bar{p}_2 será substituído por $\bar{k}_{22}10^{10}\delta$:

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \dots & \bar{k}_{1n} \\ \bar{k}_{21} & 10^{10}\bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \dots & \bar{k}_{2n} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \dots & \bar{k}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{k}_{n1} & \bar{k}_{n2} & \bar{k}_{n3} & \dots & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \vdots \\ \bar{d}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{k}_{22}10^{10}\delta \\ \bar{p}_3 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{Bmatrix} \quad 3.50$$

A outra forma, também muito eficaz, é o rearranjo da matriz global. Considerando o exemplo dado acima podemos ter a seguinte matriz global:

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & 0 & \bar{k}_{13} & \dots & \bar{k}_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \dots & \bar{k}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{k}_{n1} & 0 & \bar{k}_{n3} & \dots & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \vdots \\ \bar{d}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 - \bar{k}_{12}\delta \\ \delta \\ \bar{p}_3 - \bar{k}_{32}\delta \\ \vdots \\ \bar{p}_n - \bar{k}_{n2}\delta \end{Bmatrix} \quad 3.51$$

Esta equação não só nos dá o valor do deslocamento \bar{d}_2 mas também, o seu efeito nos outros nós.

Tensões

Uma vez obtidos os deslocamentos ou os valores correspondentes aos graus de liberdade, já se pode determinar as derivadas em cada nó e, portanto, é possível obter as tensões e outros esforços desejados na laje fazendo uso das equações da teoria da flexão das placas finas.

3.3.5. Integração Numérica

Muitos dos integrais que é necessário calcular no âmbito da aplicação do MEF não são triviais, i.e., ou a primitiva da função integranda não existe explicitamente, ou é demasiado complicada para viabilizar a sua utilização prática. Por este motivo é essencial recorrer a técnicas de integração numérica, que também recebem a designação de quadratura (Azevedo, 2003, p. 73).

A integração numérica possui a vantagem de ser facilmente programada e, portanto, pode ser facilmente calculada por um computador.

Segundo Szilard(2004), de um modo geral, em integração numérica, o integral definido é aproximado a uma soma de valores do integrando e multiplicados por um factor designado por coeficiente de peso.

Existem vários métodos de integração numérica, entretanto neste trabalho aborda-se a quadratura de Gauss para um elemento rectangular que para além de fornecer resultados muito satisfatórios é amplamente usada.

O primeiro passo é a mudança de coordenadas de modo que os nossos limites de integração sejam +/-1 em cada direcção. Assim, para a figura 16 abaixo, tem-se:

$$x = \frac{a}{2}\xi + \frac{a}{2} \text{ e } y = \frac{b}{2}\eta + \frac{b}{2}$$

O integral:

$$\int_0^a \int_0^b \psi(x, y) dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad 3.52$$

Usando a quadratura de Gauss tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi(\xi, \eta) W_i W_j \quad 3.53$$

Onde W_i e W_j são os pesos, m é o número de pontos, ξ e η representam as coordenadas dos pontos de amostragem e os mesmos não devem estar na fronteira do elemento. Em anexo 4 tem-se a tabela da quadratura de Gauss.

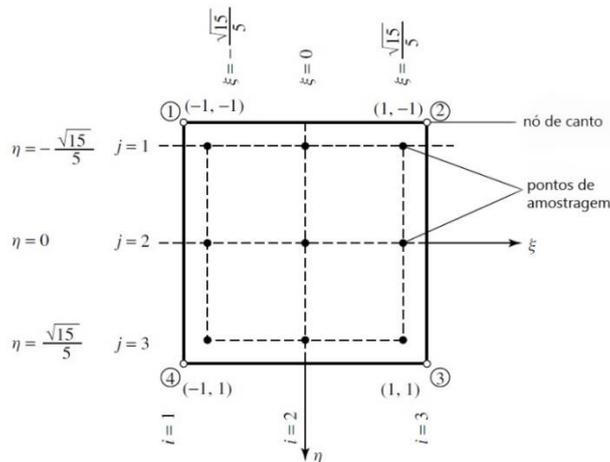


Figura 19: Quadratura de gauss com nove pontos de amostragem
Fonte: Adaptado de Szilard (2004)

3.3.6. Modelagem em elementos finitos

É essencial o conhecimento do comportamento físico esperado da laje antes que se modele. As fronteiras e as cargas devem ser muito bem definidas de antemão e para uma boa modelagem em elementos finitos Szilard(2004) propõe o seguinte:

- Sempre que possível a malha de elementos finitos deve ser uniforme e refinada caso haja uma mudança na geometria e/ou carregamento.
- O elemento rectangular deve ser preferível. No caso de geometria ou fronteira e carregamento irregular deve se escolher o elemento triangular.
- A razão entre a maior e a menor dimensão do elemento não deve ser excessiva e o mais próximo da unidade (1). Em elementos triangulares não são desejáveis ângulos inferiores a 30 graus.
- Caso elementos rectangulares e triangulares sejam combinados, elementos com nós de canto são preferíveis e os graus de liberdade devem ser iguais para os dois elementos.
- A escolha do elemento tipo deve ser feita de acordo as características geométricas da placa e a convergência do elemento.
- Grandes variações de rigidez entre elementos deve ser evitada.
- Em zonas com pilares, aberturas ou cargas externas concentradas na laje, a malha deve ser refinada de modo a se obter resultados satisfatórios.

- Para uma estrutura simétrica em uma direcção pode se analisar a metade da mesma e para uma estrutura com simetria em duas direcções pode se analisar apenas um quarto da mesma.

3.3.7. Programando em elementos finitos

De acordo com Szilard(2004) ao elaborar um código computacional para o método de elementos finitos deve-se dar prioridade a legibilidade do código. Pode se garantir a legibilidade escolhendo o estilo certo de programação e fazendo os devidos comentários no código de modo que o usuário seja guiado durante a execução do mesmo.

Segundo Szilar (2004), a programação em elementos finitos envolve três fases:

a) Pré-processamento

Consiste na preparação e introdução de dados como coordenadas dos nós, condições de fronteira, carregamento, características do material e a elaboração da malha de elementos finitos. Esta fase exige mais tempo e um pouco de esforço, pois é durante a introdução dos dados que pode ocorrer vários erros. É desejável que o programa tenha vários comentários para chamar a atenção do usuário dos prováveis erros que possam ocorrer.

b) Análise

Esta fase consiste na elaboração da matriz de rigidez do elemento, transformação de coordenadas locais para globais, assemblagem da matriz de rigidez global, introdução das condições de fronteira e a resolução da equação governante. Para a resolução da equação governante deve-se prestar atenção no método de resolução de modo a resolve-la de uma maneira mais cómoda e económica. As técnicas mais usadas são a factorização de Cholesky² e a técnica da solução frontal³ de Bruce Irons.

² É a decomposição de uma matriz hermitiana e positiva definida em um produto de uma matriz triangular inferior e sua matriz adjunta.

³ É uma variante da eliminação de Gauss que evita automaticamente um grande número de operações envolvendo termos nulos

c) Pós-processamento

E, por fim, nesta fase faz-se o tratamento dos resultados obtidos representando os esforços e as tensões internas e validando os mesmos.

4. CAPÍTULO IV – Proposta de solução e Desenvolvimento do Algoritmo

Tendo como base os constrangimentos enfrentados de modo a se resolver o problema anteriormente descrito nos capítulos introdutórios, o presente capítulo aborda as diversas possibilidades com que a solução pode ser implementada e propôr uma alternativa viável.

Este capítulo aborda também aspectos mais técnicos do desenvolvimento do algoritmo, ou seja, assuntos mais ligados a programação em linguagem *fortran 08*. E por fim, a validação ou teste do algoritmo que será feita analisando os resultados obtidos através de diversos métodos para um problema em comum.

4.1. Descrição da solução

O processo de dimensionamento em estruturas envolve a necessidade de se obter os esforços actuantes e tendo-se o objectivo de se tirar maior proveito ao crescimento tecnológico encontra-se algumas dificuldades como o custo de aquisição de softwares de modo a fazer o uso pleno, limitações quando o software é adquirido gratuitamente e as mesmas vão desde as funções disponíveis do mesmo, tempo de uso e a finalidade que não deve ser comercial.

- **Solução proposta**

Criação de uma ferramenta computacional baseada no método de elementos finitos de modo a se fazer frente às limitações que os programas comerciais impõem e tirar maior proveito do crescimento tecnológico.

Em qualquer circunstância é imprescindível que se conheça o comportamento esperado pela estrutura para que se possa avaliar da melhor maneira os resultados obtidos.

4.2. Beneficiários pela Solução

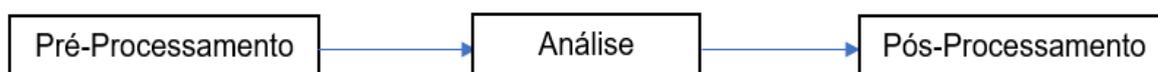
Abaixo apresenta-se os beneficiários e os respectivos benefícios da solução proposta

Tabela 2: beneficiários e benefícios da solução proposta

Beneficiários	Benefícios
Estudantes de engenharia Civil e Engenheiros Civis	Uso livre pois e apenas limitado pela conhecimento do usuário em programação
Todo aquele que vai se beneficiar dos serviços de um engenheiro civil	Não havendo necessidade de se usar um programa pago para se chegar a uma solução, o custo do consumidor final reduz
Governo	A redução das importações, compra de <i>softwares</i> estrangeiros, tem um impacto positivo na economia de um país.

4.3. Modelo da solução Proposta

A solução possui um modelo simples que possui o pré-processamento que consiste na identificação das diversas características da laje que se pretende estudar por parte do usuário que podem ser a geometria da laje, classe do betão, tensão de rotura, módulo de elasticidade, coeficiente de poisson, acções actuantes e condições de contorno e com base nestes dados faz-se uma análise com o uso do algoritmo e depois, segue-se para o pós-processamento onde são obtidos os deslocamentos e os esforços internos.



4.4. Implementação da solução

O modelo desta solução pode ser implementado pelo menos de duas maneiras apresentadas no quadro abaixo e mostra as vantagens e desvantagens.

Tabela 3: Alternativas da implementação da solução

Alternativa	Vantagens	Desvantagens
Criação de um algoritmo de acesso restricto	<ul style="list-style-type: none">• A integridade do algoritmo é garantida.	<ul style="list-style-type: none">• Apenas o desenvolvedores do <i>software</i> podem melhorar o algoritmo, e isso implica a não resolução de um problema que pode ser muito especifico e com um determinado grau de precisão.
Criação de um algoritmo de acesso livre	<ul style="list-style-type: none">• Por ser livre não possui custos elevados e modificações no código de modo a melhorá-lo podem ser feitas pelo usuário• Há possibilidade de se resolver problemas muitos específicos e com grande precisão	<ul style="list-style-type: none">• A integridade do software não é garantida pois, qualquer usuário pode fazer modificações.

Das duas alternativas escolheu-se a segunda, criação de algoritmo de acesso livre, pois desde que o usuário aprenda a linguagem de programação poderá resolver um grande numero de problemas sem que se limite aos casos programados no algoritmo.

4.5. Desenvolvimento do Algoritmo

A solução escolhida para resolver o problema deste trabalho é um algoritmo computacional com uma sequência simples de modo a ser compreendido por todos. As operações a serem feitas no método de elementos finitos são muito bem conhecidas e portanto, maior parte das sub-rotinas já foi desenvolvida e pode ser encontrada na

bibliografia adequada. De modo a se entender o código, explica-se a função de cada sub-rotina no código.

4.5.1. Introdução de dados e Inicialização

Nesta fase cria-se um arquivo, com a ajuda de várias sub-rotinas, com todos os dados iniciais do problema a ser resolvido. Esses dados incluem as propriedades geométricas do problema, o número de elementos finitos, módulo de Young, coeficiente de Poisson, condições de fronteira e carregamentos nos nós, como mostra a figura 17.

Os carregamentos nos nós foram obtidos através das equações 3.45 e 3.46 recorrendo-se as respectivas funções de forma.

As Condições de fronteira são representadas pelo binário 0 e 1, sendo 0 quando o deslocamento é nulo e 1 quando existente.

Após a criação deste arquivo, segue-se para a inicialização onde é feita a devida alocação destes dados as devidas matrizes para que posteriormente os cálculos sejam feitos. Antes do cálculo propriamente dito, o programa faz uma análise de todos os elementos de modo a determinar o tamanho da matriz global

```
elementos(número de elementos em x, número de elementos em y, homogeneidade)
2 2 1

elemento(dimensão do elemento finito em x, dimensão do elemento finito em y, espessura da laje)
2.500E-01 2.500E-01 1.000E+00

propriedades (Módulo de young, coeficiente de poisson)
1.000E+01 2.000E-01

número de nós na fronteira ou nos apoios
8

Nó, deslocamento vertical, rotação em x, rotação em y, torção
1 0 0 0 1
2 0 0 1 1
3 0 0 1 0
4 0 1 0 1
6 1 0 1 0
7 1 0 1 0
8 1 1 0 0
9 1 0 0 0

número de nós carregados
9

Nó, carga vertical concentrada, momento em x, momento em y, momento torsor)
1 1.562E-02 6.510E-04 -6.510E-04 -2.713E-05
2 3.125E-02 0.000E+00 -1.302E-03 0.000E+00
3 1.562E-02 -6.510E-04 -6.510E-04 2.713E-05
4 3.125E-02 1.302E-03 0.000E+00 0.000E+00
5 6.250E-02 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
6 3.125E-02 -1.302E-03 0.000E+00 0.000E+00
7 1.562E-02 6.510E-04 6.510E-04 2.713E-05
8 3.125E-02 0.000E+00 1.302E-03 0.000E+00
9 1.562E-02 -6.510E-04 6.510E-04 -2.713E-05

deslocamento imposto
0
```

Figura 20: Exemplo do ficheiro criado de dados de iniciais

4.5.2. Determinação da matriz de Rigidez do Elemento e Assemblagem

No terceiro capítulo é explicado como é feita a obtenção da matriz de rigidez de forma analítica. No entanto, neste trabalho faz-se o uso do poder computacional para a determinação da matriz de rigidez.

Nesta etapa, com base na integração numérica, determina-se a matriz de rigidez do elemento finito. Esta integração é feita usando a sub-rotina “*sample*” que fornece as coordenadas de cada elemento e os coeficientes para a integração numérica.

Após a determinação da matriz do elemento, faz-se o uso de uma sub-rotina para a devida assemblagem e determinação da matriz de rigidez global.

4.5.3. Leitura dos Carregamentos

Nesta fase do código computacional continua-se com a leitura do ficheiro obtido na fase inicial do programa. Inicialmente faz-se a leitura dos carregamentos e estes foram abordados no terceiro capítulo quando se referia das cargas actuantes. A cada leitura no ficheiro, faz-se a alocação dos dados na sua devida matriz para cálculo posterior.

O código é feito de modo a ter em conta as cargas verticais e uniformemente distribuídas e não considera casos especiais onde as cargas podem ter um determinado angulo diferente de 90° em relação ao plano horizontal da laje.

4.5.4. Determinação dos deslocamentos nos nós e momentos flectores

Terminada a leitura das cargas actuantes, com o uso das sub-rotinas descritas no código, encontra-se a solução da matriz global de modo a se obter as incógnitas em cada nó. Estas incógnitas correspondem ao deslocamento vertical, rotação da direcção x, rotação na direcção y e a torção em cada nó.

Esta solução é obtida usando uma sub-rotina que resolve um sistema de equações e neste caso, toma-se o devido cuidado devido ao tamanho do sistema de equações que é geralmente grande. Com base nos resultados obtidos determina-se os momentos e as flechas no centro de cada elemento finito e dependendo das condições de fronteira, mostra-se o momentos críticos para o dimensionamento da laje. A figura 18 mostra um exemplo do ficheiro criado com o valores obtidos.

E por fim, corre a sub-rotina que de acordo com as condições de fronteira apresenta na tela o momentos críticos. Para uma análise mais detalhada dos valores obtidos na laje pode se recorrer ao ficheiro criado.

O algoritmo é apresentado no anexo 5 e os módulos e as sub-rotinas não foram incluídas por questões de espaçamento para tal.

Nó	Disp	Rot-x	Rot-y	Torc-xy
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.5392E-01
2	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.1002E-01	-0.3256E-01
3	0.0000E+00	0.0000E+00	-0.1397E-01	0.0000E+00
4	0.0000E+00	0.1156E-01	0.0000E+00	-0.7091E-01
5	0.2237E-02	0.6537E-02	-0.7053E-02	-0.2099E-01
6	0.3070E-02	0.0000E+00	-0.9288E-02	0.0000E+00
7	0.2025E-02	0.0000E+00	-0.6224E-02	0.0000E+00
8	0.3330E-02	0.6795E-02	0.0000E+00	0.0000E+00
9	0.4292E-02	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

Elemento	x-momento	y-momento	xy-moment
1	-0.6029E-02	-0.3174E-02	-0.2702E-01
2	-0.1551E-01	-0.1706E-01	-0.9902E-02
3	-0.3710E-02	-0.7324E-02	0.8406E-02
4	-0.3155E-01	-0.3573E-01	-0.1553E-02

Figura 21: Exemplo de ficheiro criado com os valores obtidos

A figura acima essencialmente, apresenta dois (2) tipos de resultados. O primeiro tipo apresenta os deslocamentos, rotações e torções calculados em cada nó e o segundo apresenta os momentos calculados no centro de cada elemento finito.

5. CAPÍTULO V – Discussão de resultados

O presente capítulo tem como objectivo fazer uma análise comparativa dos resultados obtidos através dos diversos métodos nomeadamente, método simplificado recorrendo a tabelas de Libânio M. Pinheiro adaptadas de Marcus, software comercial da autodesk, robot Structural, e o algoritmo criado.

Para o presente trabalho fez-se o estudo de uma laje rectangular com o comprimento de 6 metros, largura de 5 metros e uma espessura de 20 cm, betão de classe B30 e uma carga permanente uniformemente distribuída de 7 kN/m². As tabelas abaixo apresentam resultados máximos obtidos através dos métodos supracitados e dependendo da condição de contorno, o resultado analisado ocorre no mesmo ponto e secção. No anexo 6 explica-se melhor as condições de contorno ou apoio abordadas nas tabelas.

Tabela 4: Resultados obtidos pelas tabelas de Pinheiro

Caso ou condição de contorno	Flexa máxima $a_i (mm)$	Momento positivo na direcção x-x $m_x (kNm/m)$	Momento positivo na direcção y-y $m_y (kNm/m)$	Momento negativo na direcção x-x $m_x' (kNm/m)$	Momento negativo na direcção y-y $m_y' (kNm/m)$
1	1.19	7.385	10.063	–	–
2	0.896	6.755	7.613	17.29	–
3	0.609	4.585	6.353	13.353	15.208
4	0.67	6.23	5.635	15.138	–
5	0.496	4.638	5.25	12.583	13.51
6	0.362	3.308	5.023	9.783	11.253

Tabela 5: Resultados obtidos através do software Robot Structural

Caso ou condição de contorno	Flexa máxima $a_i (mm)$	Momento positivo na direcção x-x $m_x (kNm/m)$	Momento positivo na direcção y-y $m_y (kNm/m)$	Momento negativo na direcção x-x $m_x' (kNm/m)$	Momento negativo na direcção y-y $m_y' (kNm/m)$
1	1.19	8.023	10.622	–	–
2	0.913	7.578	8.289	17.367	–

3	0.633	5.351	7.288	13.327	15.172
4	0.667	6.598	6.119	15.255	–
5	0.505	5.044	5.861	12.42	12.782
6	0.359	3.573	4.994	9.653	11.152

Tabela 6: Resultados obtidos do algoritmo desenvolvido

Caso ou condição de contorno	Flexa máxima $a_i (mm)$	Momento positivo na direcção x-x $m_x (kNm/m)$	Momento positivo na direcção y-y $m_y (kNm/m)$	Momento negativo na direcção x-x $m_x' (kNm/m)$ m_x'	Momento negativo na direcção y-y $m_y' (kNm/m)$
1	1.167	7.846	10.364	–	–
2	0.9	7.425	8.131	16.139	–
3	0.626	5.265	7.179	12.363	14.276
4	0.66	6.517	6.041	14.671	–
5	0.501	4.999	5.795	11.963	12.037
6	0.356	3.551	4.976	9.298	10.828

As tabelas abaixo apresentam os diferenças, em percentagens, dos valores obtidos para os diversos métodos. Tendo o objectivo de validar ou não o algoritmo desenvolvido, os valores obtidos pelo algoritmo desenvolvido são comparados com os valores obtidos pelas tabelas e pelo *software* comercial.

Tabela 7: Diferenças entre os valores obtidos das tabelas de Pinheiro e do *software*

Caso ou condição de contorno	Diferenças em percentagens				
	Flexa máxima $a_i (%)$	Momento positivo na direcção x-x $m_x (%)$	Momento positivo na direcção y-y $m_y (%)$	Momento negativo na direcção x-x $m_x' (%)$	Momento negativo na direcção y-y $m_y' (%)$
1	0.00%	-8.64%	-5.56%	–	–
2	-1.90%	-12.18%	-8.88%	-0.45%	–
3	-3.94%	-16.71%	-14.72%	0.19%	0.24%
4	0.45%	-5.91%	-8.59%	-0.77%	–

5	-1.81%	-8.75%	-11.64%	1.30%	5.39%
6	0.83%	-8.01%	0.58%	1.33%	0.90%

Tabela 8: Diferenças entre as tabelas de Pinheiro e do algoritmo

Caso ou condição de contorno	Diferenças em percentagens				
	Flexa máxima a_i (%)	Momento positivo na direcção x-x m_x (%)	Momento positivo na direcção y-y m_y (%)	Momento negativo na direcção x-x m_x' (%)	Momento negativo na direcção y-y m_y' (%)
1	1.93%	-6.24%	-2.99%	–	–
2	-0.45%	-9.92%	-6.80%	6.66%	–
3	-2.79%	-14.83%	-13.00%	7.41%	6.13%
4	1.49%	-4.61%	-7.20%	3.08%	–
5	-1.01%	-7.78%	-10.38%	4.93%	10.90%
6	1.66%	-7.35%	0.94%	4.96%	3.78%

Tabela 9: Diferenças entre os resultados do software e do algoritmo

Caso ou condição de contorno	Diferenças em percentagens				
	Flexa máxima a_i	Momento positivo na direcção x-x m_x	Momento positivo na direcção y-y m_y	Momento negativo na direcção x-x m_x'	Momento negativo na direcção y-y m_y'
1	1.93%	2.21%	2.43%	–	–
2	1.42%	2.02%	1.91%	7.07%	–
3	1.11%	1.61%	1.50%	7.23%	5.91%
4	1.05%	1.23%	1.27%	3.83%	–
5	0.79%	0.89%	1.13%	3.68%	5.83%
6	0.84%	0.62%	0.36%	3.68%	2.91%

Analisando as flechas máximas obtida em todos os métodos, percebe-se que as diferenças são muito pequenas e para o caso em estudo, obteve-se uma diferença

máxima em torno de 4%. E observando-se a flecha máxima regulamentar que é do menor vão dividido por 400 ($L/400$) e o máximo de 1,5cm e a teoria das lajes finas que permite apenas um máximo de 10% da espessura da laje, pode se afirmar que os valores calculados pelo algoritmo são satisfatórios.

Tendo como referência uma diferença máxima admissível de 10%, valida-se, deste modo, as flechas calculadas pelo algoritmo.

Tendo a tabela 7 em análise, percebe-se que as diferenças nos momentos positivos são um pouco maiores e chegando em torno de 16%. Os momentos positivos obtidos pelo método simplificado são menores que os obtidos pelo *software*. Entretanto, o mesmo não acontece com os momentos negativos, onde a máxima diferença está em torno de 5%. Essas diferenças existem provavelmente, porque são métodos diferentes e possuem aproximações distintas. Outro facto relevante é a precisão que é menor no cálculo recorrendo as tabelas porque houve diversas simplificações.

A tabela 8 é um pouco semelhante a anterior pois, apresenta diferenças de valores obtidos por métodos diferentes. Observa-se também uma grande diferença que está em torno de 15% para os momentos positivos e 11% para momentos negativos.

Por fim, tem-se a tabela 9 que compara os valores obtidos pelo *software* e pelo algoritmo criado, ambos baseados no mesmo método de cálculo. Nota-se que o *software* possui valores um pouco maiores mas, a diferença dos momentos positivos em relação ao algoritmo é bastante pequena e está abaixo dos 3%. Quanto aos momentos negativos nota-se também que os valores obtidos pelo *software* são ligeiramente maiores e estão em torno dos 7%. Tendo em consideração que foi usado o mesmo método de cálculo é expectável que os valores sejam próximos. Essas diferenças são, provavelmente, devido a provável diferença na precisão do algoritmo e do *software* pois, não se conhece o grau de precisão dos números no *software* como por exemplo, quantas casas decimais se considera.

Baseando-se numa diferença máxima admissível de 10%, valida-se os momentos calculados pelo algoritmo. E de modo geral, valida-se o algoritmo para o cálculo de flechas e momentos em lajes rectangulares com cargas uniformemente distribuídas. De forma resumida, os gráficos das figuras abaixo demonstram a variação das diferenças em percentagens.

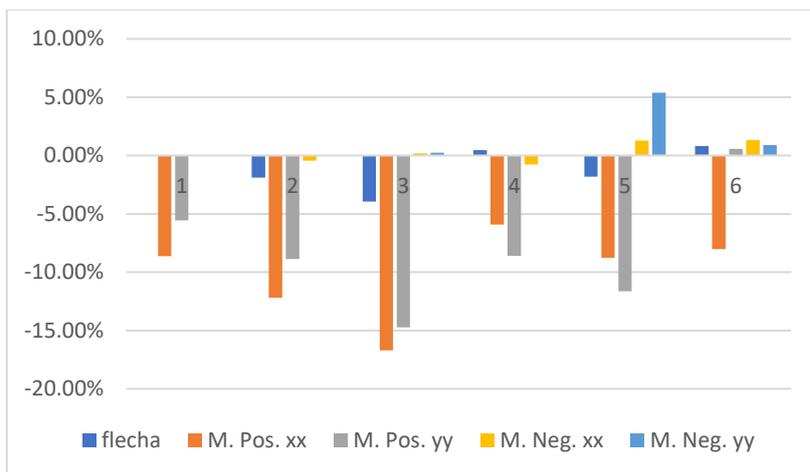


Figura 22: Diferenças entre os valores obtidos das tabelas de Pinheiro e do software

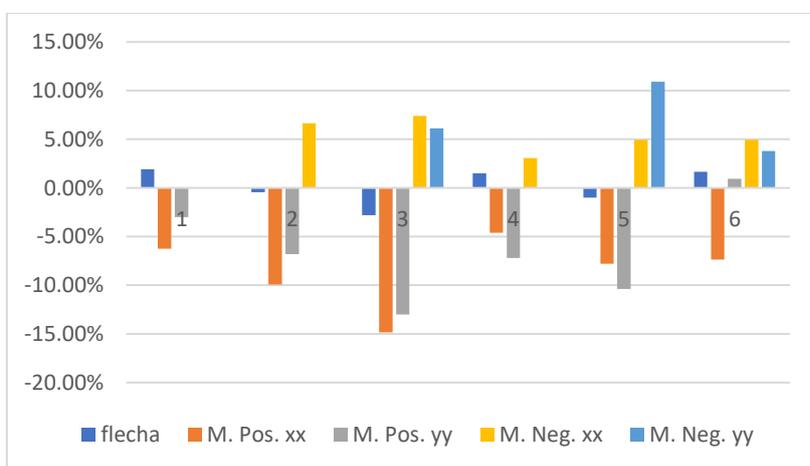


Figura 23: Diferenças entre as tabelas de Pinheiro e do algoritmo

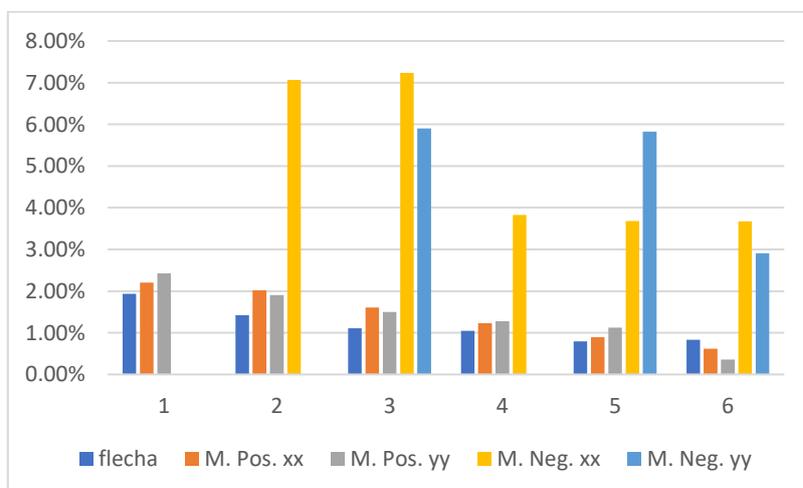


Figura 24: Diferenças entre os resultados do software e do algoritmo

6. CAPÍTULO VI – Conclusões e Recomendações

6.1. Conclusões

O desenvolvimento do presente trabalho permitiu fazer uma análise de como a tecnologia pode facilitar o estudo das lajes maciças finas com o recurso a *softwares* e/ou algoritmos no cálculo de flechas e momentos. Permitiu também analisar a questão de custos envolvidos no aproveitamento da tecnologia pois, é um assunto de extrema importância para um país em via de desenvolvimento como Moçambique.

A criação de um algoritmo de acesso livre é grátis e portanto, não envolve custos monetários. Neste trabalho desenvolveu-se um algoritmo que teve como base a teoria em volta do método de elementos finitos e algoritmos previamente desenvolvidos. Houve também uma referência de forma geral doutros métodos para o cálculo de esforços em lajes.

O algoritmo permitiu obter valores desejados para vários casos de apoios contemplados nas tabelas de Marcus. E para todos casos, analisou-se a flecha e os momentos nas direções x e y por serem os momentos que mais são estudados quando se pretende dimensionar uma laje maciça. Entretanto, o algoritmo fornece ainda a rotação em x e y e a torção em cada nó do elemento e momento torsor para cada elemento finito. Contudo, é preciso notar que o algoritmo não foi testado para condições de apoio não contempladas nas tabelas de Marcus e lajes armadas em uma direcção, requerendo um estudo posterior.

Constatou-se dos valores obtidos que as flechas possuem a menor diferença entre os métodos, estando muito abaixo dos 10% ou próximo. Para os momentos positivos, nota-se que método simplificado com recurso a tabelas de Pinheiro possui valores relativamente menores que o método de elementos finitos e o contrário para os momentos negativos.

Tendo como base o que foi dito nos parágrafos anteriores pode-se claramente concluir que todos os objectivos gerais e específicos deste trabalho foram alcançados com sucesso.

6.2. Recomendações

A computação é de extrema importância e já faz parte do dia-a-dia de quase todo mundo. A mesma pode ser útil principalmente naquelas actividades que possuem uma sequência lógica e em simultâneo trabalhosos para o ser humano.

O método de elementos finitos apesar de ser de simples percepção é bastante trabalhoso e portanto, o uso de computadores é ideal. Este trabalho foca-se apenas nas lajes rectangulares apoiadas em vigas e considera que a mesma tem um comportamento elástico-linear. Portanto, recomenda-se aos próximos investigadores a estudarem:

- Lajes armadas em uma única direcção,
- Lajes com cargas não uniformemente distribuídas como por exemplo, carregamento triangular e trapezoidal,
- formas de lajes não rectangulares,
- lajes na fase do comportamento plástico,
- outras condições de apoio como por exemplo, lajes fungiformes e ensoleiramento geral.

Além das lajes, recomenda-se que se estude a outros elementos estruturais tais como vigas, pilares, fundações, entre outros.

Bibliografia

- Apletton, J., Marchão, C., Camara, J., Costa, A., Almeida, J., & Cruz, S. (2014). *Estruturas de Betão II: Folhas de apoio às aulas*. Lisboa: IST.
- Araújo, J. M. (2003). *Curso de Concreto Armado*. Rio Grande: Editora Dunas.
- Azevedo, A. F. (2003). *Metodo dos Elementos Finitos*. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto.
- Botelho, M. H., & Marchetti, O. (2011). *Concreto Armado eu te amo*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.
- Castro, L., & Freitas, J. T. (18 de 12 de 2008). *Ciências da Engenharia*. Obtido de e-escola: instituto superior técnico: e-escola.tecnico.ulisboa.pt/topico.asp
- Chandrupatla, T. R., & Belegundu, A. D. (2002). *Introduction to Finite Elements In Engineering*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Folleteo, I. C. (2011). *Desenvolvimento de programa computacional para o projeto de lajes maciças de concreto armado*. Porto Alegre: UFRS.
- Fonseca, J. J. (2002). *METODOLOGIA DA PESQUISA CIENTIFICA*. Ceara: Universidade Estadual do Ceara.
- Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). *Metodos de Pesquisa*. Rio Grande do Sul: Editora da UFRGS.
- Gil, A. C. (2002). *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. Sao Paulo: Editora Atlas.
- Jungthon, G., & C. M. (26 de fevereiro de 2021). *Paradigmas de Programação*. Obtido de cpsoftware: <https://cpsoftware.com.br/lnpg/intro-paradigmas.pdf>
- Koutromanos, I., McClure, J., & Roy, C. (2018). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Rao, S. S. (2011). *The Finite Element Method in Engineering*. Burlington: Elsevier Inc.
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. New York: Mc-Graw-Hill Companies, Inc.

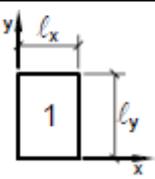
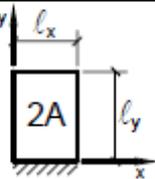
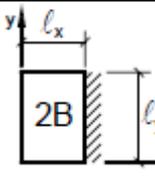
- Sanches, P. M. (2011). *Elementos finitos triangulares compatíveis na análise estrutural de lajes finas*. Lisboa: Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa.
- Silva, E. L., & Menezes, E. M. (2001). *Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação*. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC.
- Szilard, R. (2004). *Theories and Applications of Plate Analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Timoshenko, S. P., & Gere, J. E. (1983). *Mecânica dos Sólidos 1*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos.
- Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Zhu, B. (2018). *The finite Element Method*. Singapore : John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd.

Outra bibliografia

- Brainerd, W. S. (2015). *Guide to Fortran 2008*. Tucson: Springer-Verlag.
- Chitsungo, Z. (Dezembro de 2019). Política e Estratégia de Habitação para Moçambique. Maputo, Moçambique.
- Dahlman, C., & Westphal, I. (1983). A transferência de tecnologia. *IMF survey*.
- Kerlinger, F. N. (1979). *Metodologia da pesquisa em ciências sociais: um tratamento conceitual*. São Paulo: Editora pedagógica e universitária Ltda.
- Manzano, J. A., & Oliveira, J. F. (2016). *Algoritmos: lógica para desenvolvimento de programação de computadores*. São Paulo: Érica.
- Neto, C. L. (2006). *Simulação numérica da laminação a frio no laminador Sendzimir Número 2 da Acesita*. Minas Gerais: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS .
- Yamassaki, R. T. (2014). *Um Programa de Elementos Finitos em GPU e Orientado a Objetos para Análise Dinâmica não linear de Estruturas*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

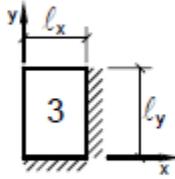
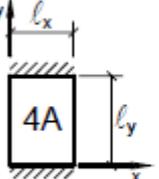
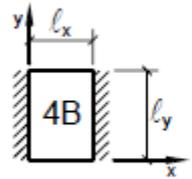
Anexos

Anexo 1: tabelas de momentos flectores de Libânio M. Pinheiros.

MOMENTOS FLECTORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
Tipo				Tipo					
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	4,23	4,23	2,91	3,54	8,40	3,54	8,40	2,91	1,00
1,05	4,62	4,25	3,26	3,64	8,79	3,77	8,79	2,84	1,05
1,10	5,00	4,27	3,61	3,74	9,18	3,99	9,17	2,76	1,10
1,15	5,38	4,25	3,98	3,80	9,53	4,19	9,49	2,68	1,15
1,20	5,75	4,22	4,35	3,86	9,88	4,38	9,80	2,59	1,20
1,25	6,10	4,17	4,72	3,89	10,16	4,55	10,06	2,51	1,25
1,30	6,44	4,12	5,09	3,92	10,41	4,71	10,32	2,42	1,30
1,35	6,77	4,06	5,44	3,93	10,64	4,86	10,54	2,34	1,35
1,40	7,10	4,00	5,79	3,94	10,86	5,00	10,75	2,25	1,40
1,45	7,41	3,95	6,12	3,91	11,05	5,12	10,92	2,19	1,45
1,50	7,72	3,89	6,45	3,88	11,23	5,24	11,09	2,12	1,50
1,55	7,99	3,82	6,76	3,85	11,39	5,34	11,23	2,04	1,55
1,60	8,26	3,74	7,07	3,81	11,55	5,44	11,36	1,95	1,60
1,65	8,50	3,66	7,28	3,78	11,67	5,53	11,48	1,87	1,65
1,70	8,74	3,58	7,49	3,74	11,79	5,61	11,60	1,79	1,70
1,75	8,95	3,53	7,53	3,69	11,88	5,68	11,72	1,74	1,75
1,80	9,16	3,47	7,56	3,63	11,96	5,75	11,84	1,68	1,80
1,85	9,35	3,38	8,10	3,58	12,05	5,81	11,94	1,67	1,85
1,90	9,54	3,29	8,63	3,53	12,14	5,86	12,03	1,59	1,90
1,95	9,73	3,23	8,86	3,45	12,17	5,90	12,08	1,54	1,95
2,00	9,91	3,16	9,08	3,36	12,20	5,94	12,13	1,48	2,00
> 2,00	12,50	3,16	12,50	3,36	12,20	7,03	12,50	1,48	> 2,00

Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$m = \mu \frac{p l_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $l_x =$ menor vão

MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME											
Tipo											Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	2,69	6,99	2,69	6,99	2,01	3,09	6,99	3,09	6,99	2,01	1,00
1,05	2,94	7,43	2,68	7,18	2,32	3,23	7,43	3,22	7,20	1,92	1,05
1,10	3,19	7,87	2,67	7,36	2,63	3,36	7,87	3,35	7,41	1,83	1,10
1,15	3,42	8,28	2,65	7,50	2,93	3,46	8,26	3,46	7,56	1,73	1,15
1,20	3,65	8,69	2,62	7,63	3,22	3,56	8,65	3,57	7,70	1,63	1,20
1,25	3,86	9,03	2,56	7,72	3,63	3,64	9,03	3,66	7,82	1,56	1,25
1,30	4,06	9,37	2,50	7,81	3,99	3,72	9,33	3,74	7,93	1,49	1,30
1,35	4,24	9,65	2,45	7,88	4,34	3,77	9,69	3,80	8,02	1,41	1,35
1,40	4,42	9,93	2,39	7,94	4,69	3,82	10,00	3,86	8,11	1,33	1,40
1,45	4,58	10,17	2,32	8,00	5,03	3,86	10,25	3,91	8,13	1,26	1,45
1,50	4,73	10,41	2,25	8,06	5,37	3,90	10,49	3,96	8,15	1,19	1,50
1,55	4,86	10,62	2,16	8,09	5,70	3,90	10,70	4,00	8,20	1,14	1,55
1,60	4,99	10,82	2,07	8,12	6,03	3,89	10,91	4,04	8,25	1,08	1,60
1,65	5,10	10,99	1,99	8,14	6,35	3,85	11,08	4,07	8,28	1,03	1,65
1,70	5,21	11,16	1,91	8,15	6,67	3,81	11,24	4,10	8,30	0,98	1,70
1,75	5,31	11,30	1,85	8,16	6,97	3,79	11,39	4,12	8,31	0,95	1,75
1,80	5,40	11,43	1,78	8,17	7,27	3,76	11,53	4,14	8,32	0,91	1,80
1,85	5,48	11,55	1,72	8,17	7,55	3,72	11,65	4,15	8,33	0,87	1,85
1,90	5,56	11,67	1,66	8,18	7,82	3,67	11,77	4,16	8,33	0,83	1,90
1,95	5,63	11,78	1,63	8,19	8,09	3,60	11,83	4,16	8,33	0,80	1,95
2,00	5,70	11,89	1,60	8,20	8,35	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,60	8,20	12,50	3,52	11,88	4,17	8,33	0,76	> 2,00

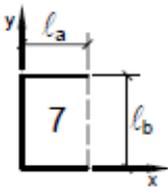
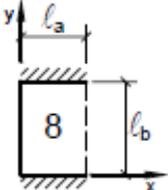
Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$m = \mu \frac{p l_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $l_x =$ menor vão

MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME													
Tipo													Tipo
$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	μ_x	μ'_x	μ_y	μ'_y	$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$
1,00	2,02	5,46	2,52	6,17	2,52	6,17	2,02	5,46	2,02	5,15	2,02	5,15	1,00
1,05	2,27	5,98	2,56	6,46	2,70	6,47	1,97	5,56	2,22	5,50	2,00	5,29	1,05
1,10	2,52	6,50	2,60	6,75	2,87	6,76	1,91	5,65	2,42	5,85	1,98	5,43	1,10
1,15	2,76	7,11	2,63	6,97	3,02	6,99	1,84	5,70	2,65	6,14	1,94	5,51	1,15
1,20	3,00	7,72	2,65	7,19	3,16	7,22	1,77	5,75	2,87	6,43	1,89	5,59	1,20
1,25	3,23	8,31	2,64	7,36	3,28	7,40	1,70	5,75	2,97	6,67	1,83	5,64	1,25
1,30	3,45	8,59	2,61	7,51	3,40	7,57	1,62	5,76	3,06	6,90	1,77	5,68	1,30
1,35	3,66	8,74	2,57	7,63	3,50	7,70	1,55	5,75	3,19	7,09	1,71	5,69	1,35
1,40	3,86	8,88	2,53	7,74	3,59	7,82	1,47	5,74	3,32	7,28	1,65	5,70	1,40
1,45	4,05	9,16	2,48	7,83	3,67	7,91	1,41	5,73	3,43	7,43	1,57	5,71	1,45
1,50	4,23	9,44	2,43	7,91	3,74	8,00	1,35	5,72	3,53	7,57	1,49	5,72	1,50
1,55	4,39	9,68	2,39	7,98	3,80	8,07	1,29	5,69	3,61	7,68	1,43	5,72	1,55
1,60	4,55	9,91	2,34	8,02	3,86	8,14	1,23	5,66	3,69	7,79	1,36	5,72	1,60
1,65	4,70	10,13	2,28	8,03	3,91	8,20	1,18	5,62	3,76	7,88	1,29	5,72	1,65
1,70	4,84	10,34	2,22	8,10	3,95	8,25	1,13	5,58	3,83	7,97	1,21	5,72	1,70
1,75	4,97	10,53	2,15	8,13	3,99	8,30	1,07	5,56	3,88	8,05	1,17	5,72	1,75
1,80	5,10	10,71	2,08	8,17	4,02	8,34	1,00	5,54	3,92	8,12	1,13	5,72	1,80
1,85	5,20	10,88	2,02	8,16	4,05	8,38	0,97	5,55	3,96	8,18	1,07	5,72	1,85
1,90	5,30	11,04	1,96	8,14	4,08	8,42	0,94	5,56	3,99	8,24	1,01	5,72	1,90
1,95	5,40	11,20	1,88	8,13	4,10	8,45	0,91	5,60	4,02	8,29	0,99	5,72	1,95
2,00	5,50	11,35	1,80	8,12	4,12	8,47	0,88	5,64	4,05	8,33	0,96	5,72	2,00
> 2,00	7,03	12,50	1,80	8,12	4,17	8,33	0,88	5,64	4,17	8,33	0,96	5,72	> 2,00

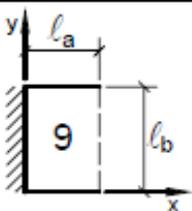
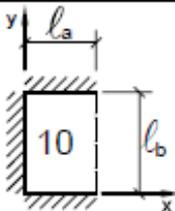
Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$m = \mu \frac{p \ell_x^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell_x =$ menor vão

MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME									
Tipo									Tipo
$\gamma = \frac{l_a}{l_b}$	μ_x	μ_y	μ_{yb}	μ_x	μ_y	μ_{yb}	μ^2_y	μ^2_{yb}	$\gamma = \frac{l_a}{l_b}$
0,30	11,33	15,89	28,44	10,44	14,22	25,55	41,89	77,00	0,30
0,35	10,63	15,60	27,19	8,85	12,86	22,37	35,69	62,94	0,35
0,40	9,94	15,31	25,94	7,25	11,50	19,19	29,50	48,88	0,40
0,45	9,13	14,48	24,47	6,22	10,39	16,82	25,89	41,36	0,45
0,50	8,32	13,64	23,00	5,20	9,28	14,44	22,28	33,84	0,50
0,55	7,58	12,95	21,56	4,57	8,35	12,82	19,64	28,76	0,55
0,60	6,83	12,25	20,11	3,94	7,42	11,19	17,00	23,67	0,60
0,65	6,21	11,59	18,71	3,46	6,76	9,94	15,26	20,55	0,65
0,70	5,59	10,92	17,31	2,98	6,10	8,69	13,51	17,43	0,70
0,75	5,09	10,24	15,86	2,61	5,54	7,77	12,28	15,38	0,75
0,80	4,59	9,55	14,41	2,23	4,98	6,84	11,05	13,33	0,80
0,85	4,16	9,09	13,61	1,96	4,65	6,15	10,12	11,91	0,85
0,90	3,73	8,63	12,80	1,68	4,31	5,46	9,19	10,49	0,90
0,95	3,39	8,14	11,94	1,47	3,97	4,96	8,45	9,49	0,95
1,00	3,05	7,64	11,08	1,26	3,62	4,45	7,71	8,48	1,00
1,05	3,05	7,94	11,31	1,23	3,68	4,45	7,80	8,48	1,05
1,10	3,06	8,24	11,55	1,19	3,74	4,46	7,88	8,47	1,10
1,15	3,06	8,53	11,78	1,16	3,80	4,47	7,97	8,46	1,15
1,20	3,07	8,83	12,01	1,12	3,86	4,47	8,05	8,46	1,20
1,25	3,03	9,01	12,12	1,09	3,90	4,47	8,09	8,46	1,25
1,30	3,00	9,19	12,22	1,06	3,93	4,47	8,13	8,46	1,30
1,35	2,97	9,38	12,33	1,03	3,97	4,48	8,17	8,46	1,35
1,40	2,94	9,56	12,43	0,99	4,01	4,48	8,20	8,45	1,40
1,45	2,91	9,74	12,54	0,96	4,05	4,49	8,24	8,45	1,45
1,50	2,88	9,92	12,64	0,92	4,08	4,49	8,28	8,45	1,50
1,55	2,84	10,04	12,69	0,90	4,09	4,49	8,29	8,45	1,55
1,60	2,81	10,16	12,74	0,88	4,10	4,49	8,29	8,45	1,60
1,65	2,77	10,29	12,80	0,86	4,11	4,49	8,30	8,45	1,65
1,70	2,74	10,41	12,85	0,84	4,12	4,49	8,30	8,45	1,70
1,75	2,70	10,53	12,90	0,82	4,13	4,50	8,31	8,45	1,75
1,80	2,66	10,65	12,95	0,80	4,13	4,50	8,31	8,45	1,80
1,85	2,63	10,77	13,00	0,78	4,14	4,50	8,32	8,45	1,85
1,90	2,59	10,90	13,06	0,76	4,15	4,50	8,32	8,45	1,90
1,95	2,56	11,02	13,11	0,74	4,16	4,50	8,33	8,45	1,95
2,00	2,52	11,14	13,16	0,72	4,17	4,50	8,33	8,45	2,00
> 2,00	2,52	12,50	13,16	0,72	4,17	4,50	8,33	8,45	> 2,00

Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$m = \mu \frac{p \ell^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell =$ menor valor entre ℓ_a e ℓ_b

MOMENTOS FLETORES EM LAJES COM CARGA UNIFORME											
Tipo									Tipo		
$\gamma = \frac{l_a}{l_b}$	μ_x	μ'_x	μ_y	μ_{yb}	μ_x	μ'_x	μ_y	μ_{yb}	μ'_y	μ'_{yb}	$\gamma = \frac{l_a}{l_b}$
< 0,30	-12,50	50,00	0,78	6,22	-12,50	50,00	2,11	8,67	14,56	37,00	< 0,30
0,30	-7,33	43,08	0,78	6,22	-4,89	38,33	2,11	8,67	14,56	37,00	0,30
0,35	-5,17	39,98	1,89	7,89	-2,57	33,08	3,18	9,74	14,84	35,53	0,35
0,40	-3,00	36,87	3,00	9,56	-0,25	27,83	4,25	10,81	15,13	34,06	0,40
0,45	-1,78	33,89	3,62	10,54	0,54	23,94	4,53	10,77	14,26	31,21	0,45
0,50	-0,56	30,91	4,24	11,52	1,32	20,04	4,80	10,72	13,40	28,36	0,50
0,55	0,25	28,02	4,62	11,82	1,62	17,40	4,86	9,99	12,48	25,26	0,55
0,60	1,06	25,13	5,00	12,11	1,92	14,76	4,92	9,25	11,56	22,17	0,60
0,65	1,47	22,90	5,25	12,12	1,91	12,91	4,68	8,55	10,81	19,63	0,65
0,70	1,88	20,66	5,49	12,12	1,90	11,06	4,43	7,84	10,06	17,08	0,70
0,75	2,06	18,84	5,61	11,81	1,82	9,86	4,14	7,15	9,42	15,17	0,75
0,80	2,23	17,02	5,72	11,50	1,73	8,65	3,86	6,45	8,77	13,25	0,80
0,85	2,26	15,59	5,66	11,05	1,64	7,78	3,59	5,86	8,19	11,87	0,85
0,90	2,28	14,16	5,60	10,59	1,54	6,91	3,33	5,26	7,60	10,49	0,90
0,95	2,25	12,99	5,48	10,07	1,40	6,25	3,11	4,81	7,12	9,50	0,95
1,00	2,21	11,82	5,36	9,55	1,25	5,59	2,88	4,35	6,64	8,51	1,00
1,05	2,33	11,91	5,72	9,91	1,25	5,59	2,98	4,37	6,82	8,50	1,05
1,10	2,45	12,00	6,08	10,27	1,24	5,58	3,08	4,39	6,99	8,50	1,10
1,15	2,57	12,08	6,44	10,62	1,24	5,58	3,18	4,41	7,17	8,49	1,15
1,20	2,69	12,17	6,80	10,98	1,24	5,57	3,27	4,43	7,34	8,48	1,20
1,25	2,67	12,20	7,09	11,20	1,20	5,57	3,34	4,44	7,44	8,48	1,25
1,30	2,64	12,22	7,37	11,42	1,17	5,57	3,41	4,45	7,54	8,47	1,30
1,35	2,62	12,25	7,55	11,64	1,14	5,57	3,49	4,46	7,64	8,47	1,35
1,40	2,59	12,28	7,93	11,85	1,11	5,58	3,56	4,47	7,73	8,47	1,40
1,45	2,57	12,31	8,22	12,07	1,09	5,58	3,63	4,48	7,83	8,46	1,45
1,50	2,54	12,33	8,50	12,29	1,06	5,58	3,70	4,49	7,93	8,46	1,50
1,55	2,56	12,35	8,68	12,37	1,04	5,58	3,74	4,49	7,97	8,46	1,55
1,60	2,58	12,36	8,86	12,45	1,01	5,58	3,77	4,49	8,00	8,46	1,60
1,65	2,59	12,38	9,04	12,53	0,99	5,57	3,81	4,49	8,04	8,46	1,65
1,70	2,61	12,39	9,22	12,61	0,97	5,57	3,84	4,49	8,08	8,46	1,70
1,75	2,63	12,41	9,41	12,68	0,95	5,57	3,88	4,50	8,12	8,46	1,75
1,80	2,65	12,42	9,59	12,76	0,93	5,57	3,92	4,50	8,15	8,45	1,80
1,85	2,67	12,44	9,76	12,84	0,91	5,57	3,95	4,50	8,19	8,45	1,85
1,90	2,68	12,45	9,94	12,92	0,88	5,56	3,99	4,50	8,23	8,45	1,90
1,95	2,70	12,47	10,13	13,00	0,86	5,56	4,02	4,50	8,26	8,45	1,95
2,00	2,72	12,48	10,31	13,08	0,84	5,56	4,06	4,50	8,30	8,45	2,00
> 2,00	2,72	12,48	12,50	13,08	0,84	5,56	4,17	4,50	8,33	8,45	> 2,00

Valores extraídos de BARES (1972) e adaptados por L.M. Pinheiro.

$m = \mu \frac{p \ell^2}{100}$ $p =$ carga uniforme $\ell =$ menor valor entre l_a e l_b

Anexo 2: tabelas das constantes β . Onde i, j correspondem a linhas e colunas respectivamente.

j	i	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
1	1	$\frac{156}{35}$	$\frac{156}{35}$	$\frac{72}{25}$	0	0	0	169
1	2	$\frac{22}{35}$	$\frac{78}{35}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{143}{6}$
1	3	$\frac{78}{35}$	$\frac{22}{35}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{5}$	1	0	$\frac{143}{6}$
1	4	$\frac{11}{35}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{5}$	1	1	$\frac{121}{36}$
1	5	$-\frac{156}{35}$	$\frac{54}{35}$	$-\frac{72}{25}$	0	0	0	$\frac{117}{2}$
1	6	$-\frac{22}{35}$	$\frac{27}{35}$	$-\frac{6}{25}$	$-\frac{6}{5}$	0	1	$\frac{33}{4}$
1	7	$\frac{78}{35}$	$-\frac{13}{35}$	$\frac{6}{25}$	0	1	0	$-\frac{169}{12}$
1	8	$\frac{11}{35}$	$-\frac{13}{70}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$	1	1	$-\frac{143}{75}$
1	9	$-\frac{54}{35}$	$-\frac{54}{35}$	$\frac{72}{25}$	0	0	0	$\frac{81}{4}$
1	10	$\frac{13}{35}$	$\frac{27}{35}$	$-\frac{6}{25}$	0	0	1	$-\frac{39}{8}$
1	11	$\frac{27}{35}$	$\frac{13}{35}$	$-\frac{6}{25}$	0	1	0	$-\frac{39}{8}$
1	12	$-\frac{13}{70}$	$-\frac{13}{70}$	$\frac{1}{50}$	0	1	1	$\frac{169}{144}$
1	13	$\frac{54}{35}$	$-\frac{156}{35}$	$-\frac{72}{25}$	0	0	0	$\frac{117}{2}$
1	14	$-\frac{13}{35}$	$\frac{78}{35}$	$\frac{6}{25}$	0	0	1	$-\frac{169}{12}$
1	15	$\frac{27}{35}$	$-\frac{22}{35}$	$-\frac{6}{25}$	$-\frac{6}{5}$	1	0	$\frac{33}{4}$
1	16	$-\frac{13}{70}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$	1	1	$-\frac{143}{72}$

j	i	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
2	2	$\frac{4}{35}$	$\frac{52}{35}$	$\frac{8}{25}$	0	0	2	$\frac{13}{3}$
2	4	$\frac{2}{35}$	$\frac{22}{105}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{2}{15}$	1	2	$\frac{11}{18}$
2	6	$-\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$-\frac{8}{25}$	0	0	2	$\frac{3}{2}$
2	8	$\frac{2}{35}$	$-\frac{13}{105}$	$\frac{2}{75}$	0	1	2	$-\frac{13}{36}$
2	10	$\frac{3}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{2}{25}$	0	0	2	$-\frac{9}{8}$
2	12	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{13}{210}$	$-\frac{1}{150}$	0	1	2	$\frac{13}{48}$
2	14	$-\frac{3}{35}$	$\frac{26}{35}$	$-\frac{2}{25}$	0	0	2	$-\frac{13}{4}$
2	16	$-\frac{3}{70}$	$\frac{11}{105}$	$-\frac{1}{150}$	$-\frac{1}{30}$	1	2	$-\frac{11}{24}$
3	2	$\frac{11}{35}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{6}{5}$	1	1	$\frac{121}{36}$
3	3	$\frac{52}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{8}{25}$	0	2	0	$\frac{13}{3}$
3	4	$\frac{22}{105}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{2}{15}$	2	1	$\frac{11}{18}$
3	6	$-\frac{11}{35}$	$\frac{13}{70}$	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{143}{72}$
3	7	$\frac{26}{35}$	$-\frac{3}{35}$	$-\frac{2}{25}$	0	2	0	$-\frac{13}{4}$
3	8	$\frac{11}{105}$	$-\frac{3}{70}$	$-\frac{1}{150}$	$-\frac{1}{30}$	2	1	$-\frac{11}{24}$
3	10	$\frac{13}{70}$	$\frac{13}{70}$	$-\frac{1}{50}$	0	1	1	$-\frac{169}{144}$
3	11	$\frac{9}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{25}$	0	2	0	$-\frac{9}{8}$
3	12	$-\frac{13}{210}$	$-\frac{3}{70}$	$-\frac{1}{150}$	0	2	1	$\frac{13}{48}$
3	14	$-\frac{13}{70}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$	1	1	$-\frac{141}{72}$
3	15	$\frac{18}{35}$	$-\frac{4}{35}$	$-\frac{8}{25}$	0	2	0	$\frac{3}{2}$
3	16	$-\frac{13}{105}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{75}$	0	2	1	$-\frac{13}{36}$
4	4	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{8}{225}$	0	2	2	$\frac{1}{9}$
4	8	$\frac{2}{105}$	$-\frac{1}{35}$	$-\frac{2}{225}$	0	2	2	$-\frac{1}{12}$
4	12	$-\frac{1}{70}$	$-\frac{1}{70}$	$\frac{1}{450}$	0	2	2	$\frac{1}{16}$
4	16	$-\frac{1}{35}$	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{225}$	0	2	2	$-\frac{1}{12}$

Anexo 4: Cuadratura de Gauss

$\pm\xi_i$ Coordenadas			m	Coeficientes de peso, W_i		
0.57735	0.02691	0.89626	2	1.00000	0.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	3	0.88888	0.88888	0.88889
0.77459	0.66692	0.41483		0.55555	0.55555	0.55556
0.33998	0.10435	0.84856	4	0.65214	0.51548	0.62546
0.86113	0.63115	0.94053		0.34785	0.48451	0.37454
0.00000	0.00000	0.00000	5	0.56888	0.88888	0.88889
0.53846	0.93101	0.05683		0.47862	0.86704	0.99366
0.90617	0.98459	0.38664		0.23692	0.68850	0.56189
0.23861	0.91860	0.83197	6	0.46791	0.39345	0.72691
0.66120	0.93864	0.66265		0.36076	0.15730	0.48139
0.93246	0.95142	0.03152		0.17132	0.44923	0.79170
0.00000	0.00000	0.00000	7	0.41795	0.91836	0.73469
0.40584	0.51513	0.77397		0.38183	0.00505	0.05119
0.74153	0.11855	0.99394		0.27970	0.53914	0.89277
0.94910	0.79123	0.42759		0.12948	0.49661	0.68870
0.18343	0.46424	0.95650	8	0.36268	0.37833	0.78362
0.52553	0.24099	0.16329		0.31370	0.66458	0.77887
0.79666	0.64774	0.13627		0.22238	0.10344	0.53374
0.96028	0.98564	0.97536		0.10122	0.85362	0.90376

Anexo 5: Algoritmo

```
PROGRAM laje_Carga_Uniforme
```

```
!-----
```

```
! Análise de uma laje maciça usando elementos finitos retangulares com apenas 4  
pontos.
```

```
! Material homogêneo com elementos idênticos.
```

```
! Malha numerada nas direções x- ou y-.
```

```
!-----
```

```
USE main
```

```
USE geom
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
INTEGER,PARAMETER::iwp=SELECTED_REAL_KIND(15)
```

```
INTEGER::fixed_freedoms,i,iel,k,loaded_nodes,ndim=2,ndof=16,nels,neq, &  
nlp=16,nn,nod=4,nodof=4,nprops=2,np_types,nr,nxe,nye,nlen
```

```
REAL(iwp)::aa,bb,d,d4=4.0_iwp,d12=12.0_iwp,e,one=1.0_iwp, &  
penalty=1.0e20_iwp,th,two=2.0_iwp,v,zero=0.0_iwp
```

```
CHARACTER(LEN=15)::element='quadrilateral',argv
```

```
!-----Matrizes dinâmicas -----
```

```
INTEGER,ALLOCATABLE::etype(:),g(:),g_g(:,:),g_num(:,:),kdiag(:),nf(:,:), &  
no(:),node(:),num(:),sense(:)
```

```
REAL(iwp),ALLOCATABLE::bm(:),coord(:,:),dtd(:,:),d2x(:),d2xy(:),d2y(:), &  
g_coord(:,:),km(:,:),kv(:),loads(:),points(:,:),prop(:,:),x_coords(:), &  
y_coords(:),value(:),weights(:),def(:),flec(:),rot1(:),rot2(:),torc(:),N(:),&  
mom1(:),mom2(:),mom3(:)
```

!-----Introdução de dados e Inicialização-----

```
CALL getname(argv,nlen)
```

```
OPEN(10,FILE=argv(1:nlen)//'.dat')
```

```
OPEN(11,FILE=argv(1:nlen)//'.res')
```

```
READ(10,*)nxe,nye,np_types,aa,bb,th
```

```
CALL mesh_size(element,nod,nels,nn,nxe,nye)
```

```
ALLOCATE(nf(nodof,nn),g_coord(ndim,nn),g_num(nod,nels),g(ndof),bm(3), &
```

```
g_g(ndof,nels),coord(nod,ndim),km(ndof,ndof),dtd(ndof,ndof),d2x(ndof), &
```

```
d2y(ndof),d2xy(ndof),num(nod),x_coords(nxe+1),y_coords(nye+1), &
```

```
points(nip,ndim),weights(nip),prop(nprops,np_types),etype(nels),def(4),&
```

```
flec(nels),rot1(nels),rot2(nels),torc(nels),N(ndof),mom1(nels),mom2(nels),mom3(nels  
)
```

```
READ(10,*)prop
```

```
etype=1
```

```
IF(np_types>1)read(10,*)etype
```

```
DO i=1,nxe+1
```

```
  x_coords(i)=(i-1)*aa
```

```
END DO
```

```
DO i=1,nye+1
```

```
  y_coords(i)=(i-1)*bb
```

```
END DO
```

```
nf=1
```

```
READ(10,*)nr,(k,nf(:,k),i=1,nr)
```

```

CALL formnf(nf)
neq=MAXVAL(nf)
ALLOCATE(kdiag(neq),loads(0:neq))
!-----Determinação do tamanho da matriz global-----
kdiag=0
elements_1: DO iel=1,nels
  CALL geom_rect(element,iel,x_coords,y_coords,coord,num,'x')
  CALL num_to_g(num,nf,g)
  CALL fkdiag(kdiag,g)
  g_num(:,iel)=num
  g_coord(:,num)=TRANSPPOSE(coord)
  g_g(:,iel)=g
END DO elements_1
CALL mesh(g_coord,g_num,argv,nlen,12)
DO i=2,neq
  kdiag(i)=kdiag(i)+kdiag(i-1)
END DO
ALLOCATE(kv(kdiag(neq)))
WRITE(11,'(2(A,I5))')                                &
  " Existem ",neq," equações e a dimensão da matriz global é",kdiag(neq)
!----- Matriz de rigidez do elemento e montagem-----
CALL sample(element,points,weights)
kv=zero
elements_2: DO iel=1,nels

```

```

e=prop(1,etype(iel))
v=prop(2,etype(iel))
d=e*th**3/(d12*(one-v**2))
g=g_g(:,iel)
km=zero
integration: DO i=1,nip
  CALL fmplat(d2x,d2y,d2xy,points,aa,bb,i)
  DO k=1,ndof
    dtd(k,:)=d4*aa*bb*d*weights(i)*
    &
    (d2x(k)*d2x(:)/(aa**4)+d2y(k)*d2y(:)/(bb**4)+(v*d2x(k)*d2y(:)+
    &
    v*d2x(:)*d2y(k)+two*(one-v)*d2xy(k)*d2xy(:))/(aa**2*bb**2)
    dtd(:,k)=dtd(k,:)
  END DO
  km=km+dtd
END DO integration
CALL fsparv(kv,km,g,kdiag)
END DO elements_2
!-----Leitura das cargas e/ou deslocamentos e Obtencao dos
deslocamentos-----
loads=zero
READ(10,*)loaded_nodes,(k,loads(nf(:,k))),i=1,loaded_nodes)
READ(10,*)fixed_freedoms
IF(fixed_freedoms/=0)then
  ALLOCATE(node(fixed_freedoms),no(fixed_freedoms),sense(fixed_freedoms),
&

```

```

    value(fixed_freedoms))
READ(10,*)(node(i),sense(i),value(i),i=1,fixed_freedoms)
DO i=1,fixed_freedoms
    no(i)=nf(sense(i),node(i))
END DO
kv(kdiag(no))=kv(kdiag(no))+penalty
loads(no)=kv(kdiag(no))*value
END IF
CALL sparin(kv,kdiag)
CALL spabac(kv,loads,kdiag)
loads(0)=zero
WRITE(11,'(A)') "  Nó  Disp    Rot-x    Rot-y    Torc-xy"
DO k=1,nn
    WRITE(11,'(I5,6E12.4)')k,loads(nf(:,k))
END DO
!-----Cálculo do momento no centro de cada elemento finito -----
nip=1
DEALLOCATE(points)
ALLOCATE(points(nip,ndim))
CALL sample(element,points,weights)
WRITE(11,'(A)')(" Element x-moment  y-moment  xy-moment")

mom1=zero
mom2=zero

```

```

mom3=zero
DO iel=1,nels
  g=g_g(:,iel)
  moms: DO i=1,nip
    CALL fmplat(d2x,d2y,d2xy,points,aa,bb,i)
    bm=zero
    DO k=1,ndof
      bm(1)=bm(1)+d4*d*(d2x(k)/aa/aa+v*d2y(k)/bb/bb)*loads(g(k))
      bm(2)=bm(2)+d4*d*(v*d2x(k)/aa/aa+d2y(k)/bb/bb)*loads(g(k))
      bm(3)=bm(3)+d4*d*(one-v)*d2xy(k)/aa/bb*loads(g(k))
    END DO
  END DO moms
  WRITE(11,'(I5,3E12.4)')iel,bm

  mom1(iel)=bm(1)
  mom2(iel)=bm(2)
  mom3(iel)=bm(3)
END DO

!-----Calculo da flecha,rotacoes e torcoes no centro do elemento-----
-

  Flec=zero
  Rot1=zero
  Rot2=zero
  Torc=zero
DO iel=1,nels

```

```

g=g_g(:,iel)

call forman(N,aa,bb)

def=0

Do k=1,ndof

    def(1)=def(1)+N(k)*loads(g(k))

    def(2)=def(2)+N(k)*loads(g(k))

    def(3)=def(3)+N(k)*loads(g(k))

    def(4)=def(4)+N(k)*loads(g(k))

End do

Flec(iel)=def(1)

Rot1(iel)=def(2)

Rot2(iel)=def(3)

Torc(iel)=def(4)

END DO

print*,"flecha maxima"

print*,MAXVAL(flec)

print*,"Momento maximo positivo em x"

Print*,-MINVAL(mom1)

print*,"Momento maximo positivo em y"

Print*,-MINVAL(mom2)

```

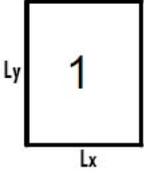
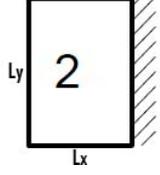
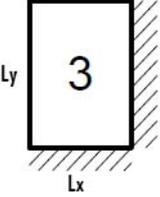
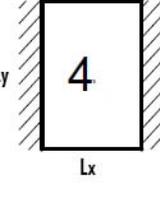
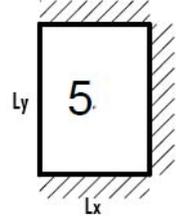
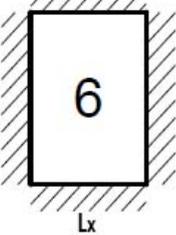
```
IF
(argv=="caso2".or.argv=="caso3".or.argv=="caso4".or.argv=="caso5".or.argv=="caso6") then
    print*,"Momento maximo negativo em x"
    Print*,-MAXVAL(mom1)
END IF

IF (argv=="caso3".or.argv=="caso5".or.argv=="caso6") then
    Print*,"Momento maximo negativo em y"
    Print*,-MAXVAL(mom2)
END IF

STOP

END PROGRAM laje_Carga_Uniforme
```

Anexo 6: Condições de apoio ou contorno

Condição de apoio		Descrição
1		Laje simplesmente apoiada nos quatro bordos
2		Laje encastrada em um bordo e simplesmente apoiada nos outros
3		Laje encastrada em dois bordos adjacentes e simplesmente apoiada nos outros
4		Laje encastrada em dois bordos opostos e simplesmente apoiada nos outros
5		Laje simplesmente apoiada em um bordo e encastrada nos restantes
6		Laje encastrada em todos bordos