UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Estatística

Comparação entre Modelos de Optimização de Carteiras de Investimento baseados em Utilidade e Risco: Uma Análise Aplicada aos Activos da Bolsa de Valores Sul-Africana

Autora: Tírcia Suzy Joaquim da Silva

Maputo, Maio de 2024

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Estatística

Comparação entre Modelos de Optimização de Carteiras de Investimento baseados em Utilidade e Risco: Uma Análise Aplicada aos Activos da Bolsa de Valores Sul-Africana

Autora: Tírcia Suzy Joaquim da Silva

Supervisor: Herlander Namuiche, MSc

Maputo, Maio de 2024

Declaração de Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Estatística, na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, Maio de 2024

____

(Tírcia Suzy Joaquim da Silva)

Dedicatória

Dedico esta monografia à minha querida Mãe, *Regina Arnaldo Massingue*. Sua dedicação e amor incondicional ao longo dos anos foram minha fonte de inspiração e força para alcançar este marco em minha jornada acadêmica. Como mãe, você demonstrou uma coragem e determinação incomparáveis, enfrentando desafios com graça e resiliência. Seu apoio inabalável e incentivo constante foram fundamentais para o meu sucesso. Este trabalho é uma homenagem ao seu amor inabalável e ao exemplo de determinação que você me mostrou todos os dias.

Amo-te, Mãe

”O conhecimento é a única riqueza que aumenta quando compartilhada”.

Sócrates

Agradecimentos

Com gratidão no coração, gostaria de expressar minha profunda apreciação a **Deus** por me guiar e sustentar ao longo desta jornada acadêmica. Sua graça e orientação foram fundamentais para o término deste curso, e sou imensamente grata por Sua provisão constante.

À **Universidade Eduardo Mondlane** e aos docentes do departamento de matematica e informatica, gostaria de estender meus sinceros agradecimentos pela oportunidade concedida. Foi aqui que encontrei não apenas conhecimento, mas também crescimento pessoal e profissional. Sou grata pela qualidade do ensino, pelo apoio dos professores e pela infraestrutura que tornaram possível a realização deste sonho.

Ao meu supervisor, **Herlander Namuiche, MSc**, pela orientação e apoio ao longo deste trabalho. Seu expertise e encorajamento foram fundamentais para o sucesso desta monografia, e sou imensamente grato por sua dedicação e paciência.

À minha **família**, meu mais profundo agradecimento por seu amor incondicional, apoio inabalável e sacrifícios incontáveis ao longo deste percurso. Vocês foram minha âncora nos momentos difíceis e minha fonte de celebração nos momentos de triunfo. Este sucesso é tão de vocês quanto é meu.

Ao meu lindo e incrivel **Noivo**, que esteve ao meu lado em todas as etapas deste caminho, obrigado por seu amor, paciência e compreensão. Sua presença constante e encorajamento foram verdadeiros presentes que me impulsionaram para frente.

Aos meus colegas que tornaram-se amigos, **Keila, dra. Elsa, Claudia, David, dr. Bernardo, dr. Budju, Fernando** e **toda OMM**, que compartilharam risos, lágrimas e momentos de estudo intenso, meu sincero agradecimento. Vossa amizade e apoio tornaram essa jornada mais leve e significativa. Não teria sido o mesmo sem vocês ao meu lado.

Que esta conquista seja compartilhada por todos nós, celebrando não apenas o fim de um curso, mas também o início de novas jornadas e realizações. Que possamos continuar a crescer, aprender e alcançar nossos sonhos juntos. Obrigada a todos por fazerem parte desta jornada inesquecível. Que Deus os abençoe ricamente.

Resumo

A optimização de carteiras é uma prática fundamental no mercado financeiro, buscando equilibrar retorno e risco através da selecção e alocação eficiente de activos. Por meio de modelos matemáticos e estatísticos, como a Teoria Moderna de Portfólio, os investidores podem construir carteiras que maximizam os retornos esperados para um determinado nível de risco ou minimizam o risco para um retorno desejado. Todos os investidores enfrentam o dilema de retorno contra risco, ou seja, normalmente, um investimento numa carteira que prometa produzir um retorno grande tem associado um risco elevado, por outro lado, um investimento que origine um retorno mais baixo, será menos arriscado. Portanto, o investidor tem que decidir em que activos investir, quanto deve alocar em cada e, finalmente, quando investir. Usou-se dados sobre preço de acções em diferentes empresas sul africanas, diversificando quanto ao sector, no período de 26/03/2018 a 23/03/23. De modo a alcançar os objectivos, usou-se dois modelos distintos para a construção e optimização das carteiras, nomeadamente, modelo de investimento baseado em utilidade (Média-Variância) e modelo de investimento baseado em risco Conditional Value at Risk (CVaR). Embora o gráfico de comparação de desempenho dos modelos Media-Variância e CVaR mostrem que o modelo Média-Variância apresenta maiores retornos que o modelo CVaR, verificou-se que os resultados obtidos com o modelo de Média-Variância sugeriram uma alocação mais selectiva de activos, com a exclusão de algumas empresas da carteira de investimento. Por outro lado, o CVaR indicou uma estratégia mais inclusiva, recomendando o investimento em todas empresas da JSE, com maior ênfase para algumas delas.

Palavras-chave: Média-Variância; CVaR; carteiras de investimento; optimização de carteiras.

Abstract

Portfolio optimization is a fundamental practice in the financial market, seeking to balance return and risk through the selection and efficient allocation of assets. Through mathematical and statistical models such as Modern Portfolio Theory, investors can construct portfolios that maximize expected returns for a given level of risk or minimize risk for a desired return. All investors face the dilemma of return versus risk, that is, normally, an investment in a portfolio that promises to produce a high return is associated with high risk, on the other hand, an investment that generates a lower return will be less risky. Therefore, the investor has to decide which assets to invest in, how much to allocate to each and, finally, when to invest. Data on share prices in different South African companies were used, diversifying according to the sector, in the period from 26/03/2018 to 23/03/23. To achieve the objectives, two different models were used to construct and optimize portfolios, namely, utility-based model (Mean-Variance) and risk-based model (CVaR). Although the performance comparison chart of the Media-Variance and Cvar models shows that the Mean-Variance model presents higher returns than the CVaR model, it was found that the results obtained with the Mean-Variance model suggested a more selective asset allocation , excluding some companies from the investment portfolio. On the other hand, CVaR indicated a more inclusive strategy, recommending investment in all JSE companies, with greater emphasis on some of them.

Keywords: Mean-Variance; CVaR; investment portfolios; portfolio optimization.

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Acrónimos

B-L	Black-Litterman
BVM	Bolsa de valores de Moçambique
CAPM	Modelo de Equilíbrio de Activos Financeiros
CvaR	Conditional Value-at-Risk
CVM	Comissão de valores Mobiliários
IS	Índice de Sharpe
JSE	Johannesburg Stock Exchange
MDaR	Maximum Drawdown at Risk
M-V	Media-Variancia
TMP	Teoria Moderna de Portfólio
VaR	Value-at-Risk

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

No passado as decisões de investimento eram tomadas com base nas preferências e perfil do investidor, porém, com o advento da teoria de composição de carteiras de investimento fundada por Harry Markowitz, no seu artigo intitulado "portfolio sellection"publicado na revista *Journal of Finance*, em 1952, o processo de selecção de activos e decisão de alocação de capital numa carteira de investimentos passaram a seguir um princípio de optimização com o objectivo de maximizar o retorno esperado e minimizar o risco, em função do apetite de risco do investidor.

Harry Markowitz revolucionou a abordagem da alocação de investimentos ao explorar o princípio de alocação óptima que estabelece o equilíbrio entre o risco e retorno esperado. O seu principal avanço foi a distinção entre a variabilidade dos retornos de um activo financeiro e seu efeito no risco total de uma carteira. O modelo de Markowitz é formulado como um problema de Investigação Operacional, especificamente um problema de optimização quadrática que envolve uma matriz de variâncias e covariâncias (Nsamu, 2017).

Com o advento da tecnologia, nota-se que cada vez mais pessoas investem na bolsa de valores embora sem perceberem os riscos associados aos seus investimentos. No final, muitos acabam frustrados, perdem dinheiro e abandonam o mercado de capitais achando que foram vítimas de um golpe ou fraude. O facto é que tudo que se investe sem conhecimento é semelhante a uma simples aposta e não deve ser tratado como investimento (iHUB, 2022).

1.2 Formulação de Problema

Todos os investidores enfrentam o dilema de retorno contra risco, ou seja, normalmente, um investimento numa carteira que prometa produzir um retorno grande tem associado um risco elevado, por outro lado, um investimento que origine um retorno mais baixo, será menos arriscado. Portanto, o investidor tem que decidir em que activos investir, quanto deve alocar em cada e, finalmente, quando investir.

Para todas estas questões, existem duas opções: uma é o investidor seguir o seu instinto. Outra é procurar algum instrumento que o ajude na sua decisão. Existem vários modelos que ajudam o investidor a tomar decisões de investimento .

Nesse contexto, os modelos de optimização de carteiras baseados em risco e utilidade emergem como ferramentas valiosas para os investidores. Fundamentados na Teoria Moderna de Portfólio e na teoria da utilidade esperada, esses modelos oferecem uma abordagem sistemática e quantitativa para construir portfólios que maximizem a utilidade do investidor, considerando simultaneamente o retorno esperado e o risco associado.

Os modelos de optimização de carteiras baseados em risco e utilidade oferecem uma abordagem abrangente para a tomada de decisões de investimento. Eles permitem que os investidores construam portfólios personalizados que reflitam suas metas financeiras, tolerância ao risco e horizonte de investimento, enquanto buscam maximizar a utilidade esperada de seus investimentos.

Pergunta de pesquisa:
Qual é o modelo de investimento que oferece a melhor composição de uma carteira de investimentos constituída por activos da bolsa de valores da Africa do Sul, entre um modelo baseado em risco (CvaR) e outro baseado em utilidade (Média-Variância)?

1.3 Objectivos

1.3.1 Objectivo geral

Constituir e optimizar uma carteira de investimento composta por activos da bolsa de valores da África do Sul utilizando dois modelos distintos, nomeadamente, modelo de investimento baseado em utilidade (Média-Variância) e modelo de investimento baseado em risco (CVaR).

1.3.2 Objectivos específicos

1. Optimizar carteiras de investimento e identificar a carteira óptima através do modelo média-variância;
2. Optimizar uma carteira de investimento usando o modelo CVaR; e
3. Comparar os resultados dos retornos obtidos entre os dois modelos.

1.4 Relevância de estudo

Este estudo é relevante porque visa oferecer percepções valiosas e orientação prática para investidores interessados em maximizar seus retornos e minimizar seus riscos ao investir na Bolsa de Valores da África do Sul, utilizando duas abordagens de modelagem distintas.

A teoria de optimização de carteiras ajuda os investidores a reduzir o risco de perda dos seus investimentos por meio da diversificação, que dilui o impacto de eventos adversos em activos individuais, e da alocação óptima do capital, que busca maximizar o retorno esperado da carteira para um determinado nível de risco ou minimizar o risco para um determinado nível de retorno desejado. Essa abordagem estratégica permite aos investidores construir carteiras mais resilientes e eficientes, capazes de enfrentar uma variedade de condições de mercado.

1.5 Estrutura do trabalho

Este trabalho compreende a seguinte organização:

Capítulo 2: Revisão de Literatura
No segundo capítulo é apresentada uma breve revisão sobre os modelos de investimento baseados em utilidade e risco, alguns conceitos da bolsa de valores e também sobre as técnicas estatísticas que serão usadas.

Capítulo 3: Material e Métodos
No terceiro capítulo é apresentado o material usado para a realização do trabalho e os métodos usados para poder obter os resultados.

Capítulo 4: Resultados e Discussão No quarto capítulo, são apresentados os resultados obtidos através dos métodos descritos no capítulo 3 de modo a alcançar com os objectivos descritos na secção 1.3.

Capítulo 5: Conclusões e Recomendações
No quinto capítulo são apresentadas as conclusões e recomendações com base nosresultados alcançados e também as limitações encontradas no decorrer do trabalho.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Conceitos Básicos

De acordo com Brennan (1991), A alocação de ativos é uma estratégia essencial para construir uma carteira de investimentos que seja rentável, equilibrada e diversificada. No entanto, é importante destacar que essa alocação varia entre os investidores, pois cada indivíduo possui uma tolerância ao risco específico, além de objetivos, necessidades e capacidades.

Segundo Hicks (1965), para alocação de activos existem duas categorias, a primeira é de modelos de investimento baseados em utilidade, composta pelos modelos Media-Variância, modelo Black-Litterman e o modelo Minimax; e modelos de investimento baseados em risco, que é composta pelos modelos *Valeu-at-Risk* (VaR), *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), Drawdown e Omega.

Ambas categorias levam em consideração diferentes factores e objetivos ao avaliar oportunidade de investimentos. O modelo de investimento baseado em utilidade é focado na maximização da utilidade do investidor. Ele considera não apenas o retorno esperado do investimento, mas também a aversão ao risco e a preferência individual do investidor. O objetivo é selecionar investimentos que proporcionem o máximo de satisfação pessoal, levando em consideração tanto os aspectos de retorno quanto os aspectos de risco. O modelo de investimento baseado em risco utiliza diferentes métricas e ferramentas para avaliar e quantificar o risco dos investimentos, como volatilidade, o desvio padrão, o VaR e outras estatísticas.

Para Markowitz (1952), a diferença fundamental entre os modelos de investimento baseado em utilidade e risco é o foco da tomada de decisão. O modelo baseado em utilidade busca maximizar a satisfação pessoal do investidor considerando tanto o retorno quanto o riscos, enquanto o modelo baseado em risco visa minimizar o risco e preservar o capital investido, independentemente da satisfação pessoal. Cada modelo tem suas vantagens e desvantagens e a escolha entre eles depende dos objectivos e preferências individuais do investidor.

2.2 Modelos de Investimento Baseados em Utilidade

2.2.1 Modelo Média-Variância

Seria agradavelmente suficiente que se estabelecesse um retorno esperado para um activo e este não tivesse nenhum risco associado. Infelizmente, a relação entre o risco de perder capital em uma aplicação financeira e o retorno que se pode esperar é diretamente proporcional, ou seja, quanto menor é o risco de perdas, menor será o retorno percentual sobre o capital aplicado e o contrário também é válido, isto é, quanto maior é o risco que se está disposto a correr, maior deve ser o retorno esperado. A partir desta relação, diversificar activos buscando controlar o risco de uma carteira parece ser uma óptima estratégia.

O risco de um activo está associado à intensidade e frequência que sua cotação pode oscilar dentro de determinado período, independentemente da classe em que está inserido. A esta intensidade dá-se o nome de volatilidade, que pode ser alta quando um mercado oscila de forma intensa ou baixa quando um activo oscila de forma suave. A volatilidade de um activo pode advir de aspectos externos, como uma crise econômica, variação dos juros e inflação, variação de outras moedas como o dólar, por exemplo, ou pode ocorrer por alguma tomada de decisão ou resultados internos (Junior, 2022).

Retorno

Segundo Nsamu (2017), o retorno de um activo é o ganho obtido de um período para o outro. A taxa de retorno denota a relação percentual entre esse ganho e o valor inicial do activo. Um activo pode ser um bem, crédito ou direito avaliado pelo seu custo e constitui o patrimônio de uma pessoa ou entidade. Os activos podem ser classificados em diferentes tipos: activos correntes ou de curto prazo, como acções, dívidas de curto prazo e depósitos bancários, e activos não correntes ou de longo prazo (tangíveis ou intangíveis), como imóveis, investimentos financeiros e dívidas de longo prazo.

Em termos absolutos, o retorno é o valor total recebido ao fim da operação de investimento, subtraído do valor investido:

$$Retorno\ \ absoluto = quantia\ \ recebida - quantia\ \ investida \tag{2.1}$$

No entanto, é o retorno relativo que é mais frequentemente utilizado, também chamado de taxa ou percentual de retorno. A taxa de retorno é uma forma de padronização considerando a quantia de retorno por unidade de investimento:

$$Taxa\ \ de\ \ retorno = \frac{quantiidade\ \ recebida - quantia\ \ investida}{quantia\ \ investida} \tag{2.2}$$

Investimentos em activos financeiros que possuem risco agregado, a quantia a ser recebida nem sempre é conhecida a *priori*. A taxa de retorno pode então ser calculada como o valor esperado da taxa de retorno *r*:

$$E(r) = \frac{E(quantia \;\; recebida) - quantia \;\; investida}{quantia \;\; investida} \tag{2.3}$$

Para Edwin J. Elton (2012) a expressão para o valor esperado de M retornos de igual probabilidade do activo *i*.

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{M} \frac{R_{ij}}{M} \tag{2.4}$$

Quando os retornos não têm a mesma probabilidade e se P_{ij} é a probabilidade do *j*- ésimo retorno do *i*- ésimo activo, então o retorno esperado é:

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{M} P_{ij} R_{ij} \tag{2.5}$$

Não só é necessário ter uma medida de retorno médio, uma maneira sensata de medir o quanto os resultados divergem da media é medir directamente essa distância do resultado até a média. Mas precisamente, a fórmula de variância do retorno do *i*- ésimo activo (cujo símbolo é σ_i^2) é:

$$\sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{M} \frac{(R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{M} \tag{2.6}$$

Se as observações não têm a mesma probabilidade, multiplicamos, cada observação por sua probabilidade de ocorrer. A fórmula para a variância do retorno do $i - \acute{e}simo$ activo torna-se:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{M} = \left[P_{ij} (R_{ij} - \bar{R}_i)^2 \right] \tag{2.7}$$

O retorno de uma carteira de investimentos é simplesmente uma média ponderada do retorno dos activos individuais. A ponderação aplicada a cada retorno é a fracção da carteira investida nesse activo, se R_{pj} é o $j - \acute{e}simo$ retorno da carteira, X_i é a fração dos fundos do investidor aplicada no $i - \acute{e}simo$ activo e N é o número de activos, entãoO retorno de uma carteira de investimentos é simplesmente uma média ponderada do retorno dos activos individuais. A ponderação aplicada a cada retorno é a fração da carteira investida nesse activo, se R_{pj} é o $j - \acute{e}simo$ retorno da carteira, X_i é a fração dos fundos do investidor aplicada no $i - \acute{e}simo$ activo e N é o número de activos, então:

$$R_{pj} = \sum_{i=1}^{N} (X_i R_{ij}) \tag{2.8}$$

A variância de uma carteira P, indicada por σ_p^2 é simplesmente o valor esperado dos desvios do retorno da carteira ou $\sigma_i^2 = E(R_P - R_P)^2$. Substituindo nessa expressão as fórmulas para retorno da carteira e retorno médio resulta na seguinte fórmula para dois valores mobiliários:

$$\sigma_p^2 = E(R_P - R_P)^2 = E\left[X_1 R_{ij} + X_2 R_{2j} - (X_1 \bar{R}_{1j} + X_2 \bar{R}_2)\right]^2$$
$$= E\left[X_1(R_{1j} - \bar{R}_1) - X_2(R_{2j} - \bar{R}_2)\right]^2 \qquad (2.9)$$

Onde $\bar{R}_i$ representa o valor esperado do título financeiro i em relação a todos os resultados possíveis.

Aplicando duas regras de que o valor esperado da soma de uma série de retornos é igual a soma de valor esperado de cada retorno e que o valor esperado de uma constante multiplicada por um retorno é igual a constante multiplicada pelo retorno esperado, temos

$$\sigma^2 = X_1^2 E\left[(R_{1j} - \bar{R}_1)^2\right] + 2X_1X_2E\left[(R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2)\right] + X_2^2 E\left[(R_{2j} - \bar{R}_2)^2\right]$$
$$= X_1^2\sigma_1^2 + 2X_1X_2E\left[(R_{1j} + \bar{R}_1)(R_{2j} + \bar{R}_2)\right] + 2X_2^2\sigma_2^2 \qquad (2.10)$$

E $\left[(R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2)\right]$ tem um nome especial. É a chamada covariância e será designada por σ_{12}. Substituindo $\left[(R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2)\right]$ por σ_{12} dá o seguinte resultado:

$$\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_1^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} \qquad (2.11)$$

É útil padronizar a covariância. Dividindo a covariância entre dois activos pelo produto padrão de cada activo temos como resultado uma variável que tem as mesmas propriedades da covariância, mas varia de -1$a + 1$. Essa medida é chamada de coeficiente de correlação. Seja ρ_{ik} a correlação entre os títulos financeiros i e k. Então, definimos o coeficiente de correlação como:

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \sigma_k} \qquad (2.12)$$

Risco

Segundo BODIE (1996) o conceito de risco para o investidor comum vai além do simples rigor estatístico. A TMP assume que o investidor racional busca maximizar o retorno e minimizar o risco.

Este indivíduo é classificado como investidor *averso ao risco*, porque penaliza o valor esperado de retorno de um portfólio sujeito a risco por uma certa percentagem para cada unidade de risco que é agregada ao portfólio.

Esta noção é formalizada através de uma função de utilidade que define uma família de curvas no espaço risco e retorno onde a preferência entre activos em uma curva é indiferente:

$$U = E(r) - 0.005A\sigma^2 \qquad (2.13)$$

Onde U é o valor de utilidade, A é o índice de aversão do investidor, e o factor 0.005 é uma convenção de escala utilizada na maioria dos exemplos acadêmicos. A função U de utilidade é dita uma família de funções porque revela as curvas de utilidade para diferentes situações de opções de investimento (ex., activos financeiros),ou seja, diferentes combinações de $E(r)$,σ^2 e A (Figura 2.1).

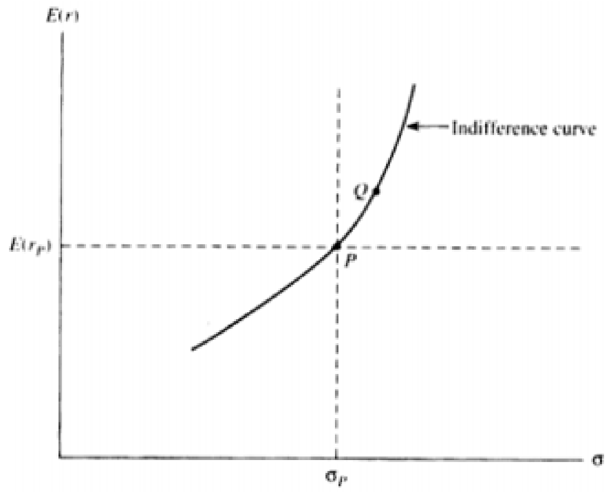

Figura 2.1: Função de Utilidade e Curva de Indiferença, Bodie(1996)

A curva de indiferença determina o conjunto de opções de investimento que é indiferente para o investidor em termos de risco e retorno. Na curva apresentada na Figura 2.1 o valor de utilidade permanece o mesmo para P e Q, ou seja, a preferência de investimento é a mesma para ambos os activos porque o investidor sabe que, por exemplo, para investir em Q ele terá que assumir um risco maior do que em P.

A existência de uma função de utilidade é hipotética e na prática a curva de indiferença pode assumir qualquer forma subjetiva às preferências e particularidades de cada investidor.

Teorema de Harry Markowitz

"A ideia predominante na época em que foi publicado este artigo era que se devia investir naqueles activos que apresentavam os maiores retornos. Porém, Markowitz observou que, ao se concentrar o capital em um único activo - o mais rentável - ao mesmo tempo em que se pode ganhar muito, pode-se perder tudo; ou seja, existe um risco e este deve ser considerado no processo decisório. Neste contexto, ele foi pioneiro ao apresentar o conceito de risco como uma característica fundamental de uma carteira de investimento, e não apenas o retorno, como vinha sendo feito. Para ele, uma carteira de ações que maximiza o retorno esperado e minimiza o risco incorrido deve ser a carteira recomendada para um investidor"(Fonseca, 2011).

Segundo Markowitz (1952) "na tentativa de reduzir a variância, investir em diversos activos não é o suficiente. É preciso evitar que o investimento seja feito em activos com alta covariância entre si. Devemos diversificar entre indústrias, especialmente indústrias com diferentes características econômicas, porque empresas de diferentes indústrias tem covariâncias menores que empresas da mesma indústria." Em seu estudo, Markowitz mostra que a forma de minimizar o risco total de uma carteira é através da diversificação dos activos e da existência de baixa correlação entre eles"

Markowitz (1952) "desenvolveu um modelo com o qual o investidor racional procura minimizar o risco da sua carteira de acções em função de uma determinada rentabilidade esperada".

O problema que se coloca é a determinação de uma carteira de investimentos com *n activos*, minimizando o risco com a expectativa de um retorno mínimo. Este tipo de problema pode ser visto como um problema de Programação Matemática da forma:

$$\begin{aligned} &\textit{min Risco} \\ \textit{sujeito a} \quad & E\left[r_j\right] \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ & X_j \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.14}$$

O retorno esperado da carteira de acçoes é dado por:

$$r(x_1 \cdots, x_n) = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E[R_j] x_j \tag{2.15}$$

Onde,
$E[.]$: valor esperado da variável aleatória a considerar entre parênteses;
R_j: Variável aleatória, taxa de retorno do título j;
x_j: valor em unidades monetárias a investir no título j;
M_0: fundo ou capital inicial disponibilizado;
n: número de títulos disponíveis para investimento.

Tomando para medida de risco a variância de retorno, o problema formula-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & min \quad VAr[r_\varphi] \\ \textit{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} E[R_j] x_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = 1, \cdots, n$$

Nesta forma, o modelo para seleção de carteiras otimizadas, segundo Markowitz é:

$$\begin{aligned} \textit{min} \quad & \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\ \textit{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} r_j x_j \geq \rho M_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{2.17}$$

Onde:
ρ: o parâmetro que representa a taxa mínima de retorno requerido pelo investidor.
x_j: o montante máximo em unidades monetárias que pode ser investido no título j.
σ_{ij}: covariância entre as rentabilidades dos títulos i e j.

Este problema de Programação Quadrática tem *n variáveis* á *n restrições*, de não negatividade e envolve o cálculo de uma matriz quadrada de $n \times n$ de valores de σ_{ij} (covariância), o que pode construir um problema para esse modelo. É de notar que também se pode considerar apenas a composição da carteira em termos da percentagem do ativo $i, i = 1, \cdots, n$. Assim, as restrições seriam:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho \tag{2.18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \tag{2.19}$$

Fronteira Eficiente

De acordo com Markowitz (1959), a análise de carteiras busca identificar as carteiras que melhor correspondem aos objetivos do investidor. Um investidor racional visa maximizar o retorno de seu investimento, enquanto minimiza o risco associado. Isso significa que, para um nível específico de risco, o investidor procurará obter o maior retorno possível. Diversas carteiras podem ser construídas através da alocação variada de activos, com retornos e graus de risco diferentes. A linha que representa as carteiras com o maior retorno possível para um dado nível de risco, ou carteiras com o menor risco possível para um determinado retorno, é denominada a fronteira eficiente.

Todo conjunto de activos possui uma Fronteira Eficiente, que é representada por uma curva que mostra as combinações dos activos selecionados, nas quais obtém-se o menor risco possível para

um retorno esperado. Assim, a Fronteira Eficiente é o conjunto dos melhores carteiras possíveis para determinados retornos esperados, essas carteiras são commumente designadas como ”carteiras óptimas”(Correa e Souza, 2001).
A seguir, apresento um gráfico ilustrativo da fronteira eficiente.

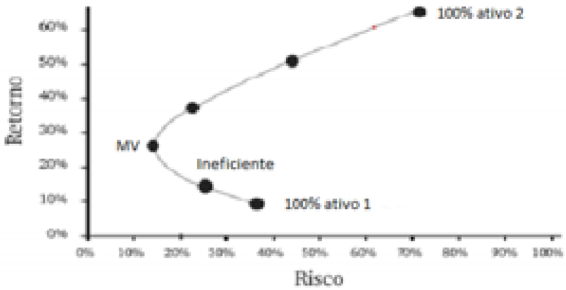

Figura 2.2: Gráfico da fronteira eficiente(Markowitz,1956)

Segundo Edwin J. Elton(2012) a derivação de fronteira eficiente quando permitem-se *short-sell* (vendas a descoberto) e existe empréstimo a taxa de crédito livre de risco é o caso mais simples a considerar. A fronteira eficiente é o total da extensão do raio que vai do R_f a B. Diferentes pontos sobre o raio $R_f - B$ representam diferentes combinações de concessão ou tomada de empréstimos com a carteira óptima de activos de risco que é a carteira B. EM forma de equações teremos i seguinte:
Maximizar a função objectivo

$$\theta = \frac{\bar{R}_p - R_F}{\sigma_p} \tag{2.20}$$

Sujeito a condição

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 0$$

Esse é um problema de maximização condicionada. Existem técnicas de solução padronizadas para isso. A condição pode ser substituída na função objectivo, e a função objectivo pode ser maximizada como se fosse uma maximização não condicionada. Este último procedimento será adoptado a seguir. Podemos escrever R_f como $R_f + 1$. Assim, temos

$$R_F = R_F = \left(\sum_{i=1}^{N} i\right) R_F = \sum_{i=1}^{N} (X_i R_F) \tag{2.21}$$

A solução do problema de maximização acima apresentado envolve encontrar a solução do seguinte sistema d equações simultâneas:

$$1\frac{d\theta}{dX_1} = 0$$

$$1\frac{d\theta}{dX_2} = 0$$

$$1\frac{d\theta}{dX_3} = 0$$

$$\vdots$$

$$1\frac{d\theta}{dX_N} = 0 \tag{2.22}$$

Um artificio de matemática permite modificação útil da derivada. Nota que cada X_i é multiplicado por uma constante μ. Para resolver para X_k depois de obter os Z_k dividimos cada Z_k pela soma dos Z_k.

$$\overline{R}_i - R_F = Z_1\sigma_{i1} + Z_2\sigma_{i1} + +Z_i\sigma_i^2 + + + X_{n-1}\sigma_{N-1i} + Z_N\sigma_N \tag{2.23}$$

Os Zs são proporcionais ao montante óptimo a investir em cada activo. Há N equações e N incógnitas. Então, a proporção óptima a investir em cada acção k é X_k , onde

$$X_k = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^{N} Z_i} \tag{2.24}$$

Modelo CAPM

• Pressupostos do modelo padrão de precificação de activos (Modelo CAPM)

Segundo Edwin J. Elton (2012) os pressupostos do modelo padrão de determinação do valor de activos são:

- Não há custos de transacção. Não há custos em comprar ou vender qualquer activo. Se houvesse custos de transacção, o retorno de qualquer activo seria função de o investidor ser ou não ser proprietário desse activo antes do período de decisão. Assim, incluir custos de transacção no modelo acrescenta bastante complexidade. Se vale a pena ou não introduzir essa complexidade depende da importância dos custos de transação para a decisão dos investidores. Dada a dimensão dos custos de transacção, provavelmente eles não têm grande importância.

- Os activos são infinitamente divisíveis. Isso significa que os investidores podem tomar qualquer posição em um investimento, independentemente do tamanho da sua riqueza.

- Ausência de impostos de renda da pessoa física. Isso significa, por exemplo, que o individuo é indiferente quanto a forma em que recebe os retornos do seu investimento.

- Um individuo não pode afectar o preço de uma acção ao comprar ou vender essa acção. Isso é análogo a pressuposição da competição perfeita. Enquanto um investidor sozinho não pode afectar os preços por ser acto individual, os investidores em conjunto determinam os preços por suas acções de compra ou venda.

- Os investidores tomam decisões a respeito de suas carteiras apenas em termos dos valores esperados e dos desvios padrão.
- São permitidas vendas a descoberto ilimitadas. O investidor individual pode vender a descoberto qualquer quantia de qualquer acção.
- A concessão e a tomada de empréstimos ilimitadas à taxa de juros sem risco. O investidor pode emprestar ou tomar emprestado qualquer quantidade desejada de fundos à taxa de juros dos activos livres de risco.
- Homogeneidade das expectativas. Supõe-se que os investidores estejam interessados na média e na variância dos retornos e que todos os investidores definem o período relevante exatamente da mesma maneira. Supõe-se que todos os investidores têm expectativas idênticas em relação aos insumos necessários para as decisões relativas a carteira de investimentos.
- Todos os activos são negociáveis no mercado.

• Modelo de Determinação do Preço de Activos (Modelo CAPM)

A equação da linha conectando um activo livre de risco é

$$\bar{R}_e = R_F + \frac{\bar{R}_M - R_F}{\sigma_M}\sigma_e \tag{2.25}$$

Onde o subscrito e denota uma carteira eficiente. O beta indica o risco sistemático (o risco que não pode ser eliminado através de uma diversificação de uma carteira), que também está associado ao risco não-sistemático (que pode ser eliminado através da diversificação de activos). A soma desses riscos resulta num risco total que a carteira está sujeita, de acordo com a equação: $\textbf{Risco} \quad \textbf{total} = Risco \quad sistemático + Risco \quad não \quad sistemático$

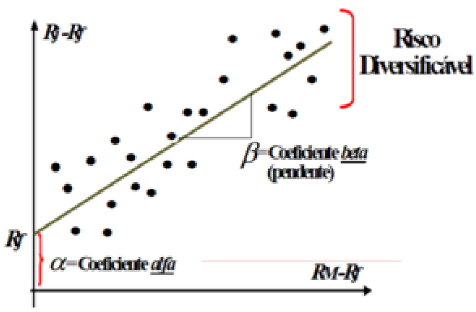

Figura 2.3: Recta característica do Modelo de equilíbrio de Activos

Invariavelmente, quando um grupo de investidores é exposto ao modelo CAPM pela primeira vez, um ou mais investidores apontam para uma acção de beta alto que produziu retorno menor que uma acção de beta baixo. O modelo de determinação de preços de activos -CAPM é uma relação de equilíbrio. Espera-se que acções de beta alto tenham retorno mais alto que as de beta baixo porque elas são mais arriscadas. Exatamente por elas serem mais arriscadas, algumas vezes darão retorno mais baixo. Contudo, ao longo prazo, elas devem produzir, em média, retornos mais altos. Escrevemos o modelo CAPM na forma

$$\bar{R}_i = R_F + \beta_i \left(\bar{R}_M - R_F\right) \tag{2.26}$$

Essa é a forma que aparece com mais frequência e a que permite testes empíricos. Recorde que

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \tag{2.27}$$

Poderíamos então escrever a linha do mercado de activos como

$$\bar{R}_i = R_F + \left(\frac{\bar{R}_M - R_F}{\sigma_M}\right)\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} \tag{2.28}$$

O desvio padrão da carteira de mercado é dado por

$$\sigma_M = \left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} X_iX_j\sigma_{ij}\right]^{1/2} \tag{2.29}$$

Onde todos os X_i são proporções de mercado. Como todos investidores mantêm carteiras de mercado, a definição relevante do risco de um activo é a mudança no risco de carteira, dado que as proporções desse activo variam. Isso pode ser encontrado da maneira seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_M}{dX_i} &= \frac{d\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} X_iX_j\sigma_{ij}\right]^{1/2}}{dX_i} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left[2X_i\sigma_i^2 + (2)\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{N} X_j\sigma_{ij}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} X_iX_j\sigma_{ij}\right]^{1/2}} = \frac{X_i^2\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{N} X_j\sigma_{ij}}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}\end{aligned} \tag{2.30}$$

Por conseguinte, o risco relevante do activo é igual a $\sigma_{iM}\ j\sigma_M$.

Indice de Sharpe (IS)

Extremamente celebrado entre acadêmicos e praticantes do mercado financeiro, o IS tem sido amplamente utilizado na avaliação de fundos de investimento. Formulado por Sharpe (1966), o IS encaixa-se na teoria de selecção de carteiras, mais especificamente no modelo CAPM, apontando as carteiras óptimas na linha de mercado de capitais. De acordo com o CAPM, nenhuma carteira pode ter um IS maior do que o definido pela carteira de mercado. Carteiras com IS menor devem ser desprezadas.

$$IS = \frac{E\left(r_C\right) - r_{sr}}{C} \tag{2.31}$$

Onde r_{sr} é a taxa de juros sem risco; $E(r_C)$ é o retorno esperado do fundo; C é a volatilidade do fundo.

2.2.2 Modelo Black-Litterman

Uma grande diferença entre o modelo Black-Litterman e um modelo média-variância tradicional é que enquanto o segundo gera pesos em uma carteira a partir de um possesso de optimização, o modelo **B-L** parte de uma carteira de mercado em equilíbrio de longo prazo (CAPM). Enquanto o modelo **MV**, por conta da completa relação entre retornos esperados e pesos da carteira resultante, gera na maioria das vezes carteiras cuja composição não parece fazer sentido, o modelo **B-L** fornece um ponto de partida neutro e intuitivo, na medida em que este equilíbrio de longo prazo pode ser considerado o comportamento de um investidor que representa o mercado como um todo. Black e Litterman argumentam que retornos neutros significam os retornos esperados que levariam a exigir todos os títulos em mercado, coso todos os investidores tivessem a mesma visão. Este ponto de partida fornece uma informação a *priori*, que se origina em um equilíbrio de longo prazo (Lobarinhas, 2012).

Os retornos esperados a partir do equilíbrio de longo prazo (CAPM), podem ser obtidos por optimização reversa. Considere a maximização da função de utilidade que contrapõe retorno e variância, conforme em:

$$\mathrm{Max}_{\omega}\left\{\omega'\Pi - \frac{\delta\omega'\Sigma\omega}{2}\right\} \quad \text{cuja solução é dada por:} \tag{2.32}$$

$$\omega^* = (\delta\Sigma)^{-1}\Pi \quad \text{a partir da qual pode - se obter directamente:} \tag{2.33}$$

$$\Pi = \delta\Sigma\omega \tag{2.34}$$

Onde:
ω: Composição da carteira de mercado;
δ: Coeficiente de aversão a risco;
Σ: Matriz de covariância estimada e
Π: Retornos implícitos no equilíbrio de mercado.

O resultado em (2.32) corresponde aquele obtido pelo método conhecido por optimização inversa. Π em (2.32) traz os retornos esperados implícitos no equilíbrio de mercado, que servirão como ponto de partida neutro para incorporar as visões do investidor a respeito de retornos futuros.

Inicialmente, assume-se que os retornos dos activos são distribuídos segundo uma distribuição normal, com média esperada μ e variância conhecida Σ. Porém, μ também é uma variável aleatória e, segundo a informação que temos a priori, é centrada em Π,

$$r \sim N(\mu, \Sigma) \tag{2.35}$$

$$\mu = \Pi + \epsilon^{(e)} \tag{2.36}$$

$$\text{Sendo que por hipótese:} \quad \epsilon^{(e)} \sim N\left(0, \Sigma_{\Pi}\right) \tag{2.37}$$

Conforme apontado por Walters(2009) , uma concepção errônea comum do modelo Black-Litterman é tomar (2.34) como o modelo de referência, considerando que não é aleatória.

Para definir Σ_{Π}, Black e Litterman assumem a hipótese simplificada de que a estrutura da matriz de covariância de μ é proporcional à covariância dos retornos Σ. Portanto, criaram um parâmetro τ, como constante de proporcionalidade. Com esta hipótese, tem-se que:

$$\Sigma_{\Pi} = \tau\Sigma \tag{2.38}$$

Com isto, obtemos todos os parâmetros para estimar a media da distribuição dos retornos, chamada no modelo B-L de distribuição a *priori*.

2.2.3 Modelo de Minimax

O modelo Minimax de Deng, Li e Wang (2005) admite que no mercado estão disponíveis n activos que oferecem retornos variáveis e com certo nível de risco, e um activo sem risco que oferece uma taxa de retorno fixa. O investidor deve alocar sua riqueza, através destes n ativos com risco e do activo sem risco. É considerado também que taxas e custos de transações são desprezados e que todos os activos são infinitamente divisíveis e não há limitação de quantidade de venda ou compra de acções.

As Seguintes notações serão utilizadas:

$\widetilde{r}$: Retorno logaritmico do activo $i(i = 1, 2, \cdots, n)$;
r_i: Valor esperado de $\widetilde{r}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$;
$r_(n + 1)$: Retorno do activo sem risco,que é uma constante;
σ_{ij}: cov($\widetilde{r}_i$;$\widetilde{r}_i$),covariancia entrer $\widetilde{r}_i$ e $\widetilde{r}_j$,$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$;
x_i: Participação de cada activo i no portifolio total ($i = 1, 2, \cdots, n + 1$).

São dados fixos do problema, todos σ_{ij} ou seja, a matriz de covariância entre os ativos com risco, e o valor de $r_{(n+1)}$. Cada r_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ é definido dentro do intervalo:

$$r_i \geq r_{n+1} \tag{2.39}$$

$$a_i \leq r_i \leq b_i \tag{2.40}$$

Onde $0 \leq a_i \leq b_i$ são constantes. Os valores de a (limite inferior) e de b (limite superior) são através de inferência bayesiana para estimação do intervalo de credibilidade da média de cada activo. A condição $E[R(x)] = \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_j$ indica que o valor esperado do retorno de cada activo não pode ser menor que o retorno do activo sem risco. Isto é natural pois se o retorno do activo sem risco fosse maior, o investidor incorporaria este activo ao seu portfólio, ao invés de incorporar o risco de um activo que possui um retorno menor. A razão da existência da condição $Var[R(x)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j = x^T \sum x$ deve-se ao facto de que os valores esperados dos retornos dos activos não podem ser exatamente estimados e de que o modelo de média-variância proposto por Markowitz ser muito sensível a erros de estimação na média dos retornos.

O modelo assume que a matriz de covariância $\sum(\sigma_{ij})_{n\times n}$ é positiva definida. O retorno esperado do portfolio $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{(n+1)})$, onde $\sum_1^{n+1} x_i = 1$, é dado por:

$$E[R(x)] = \sum_{i=1}^{n+1} r_i x_i \tag{2.41}$$

E a variância do retorno do portfolio é dada por:

$$\text{Var}[R(x)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j = x^T \sum x \tag{2.42}$$

Um investidor racional deve atentar não somente em maximizar o valor esperado, mas também em minimizar a variância (considerada como medida de risco no modelo) do retorno do seu portfólio. Deste modo, o investidor deve balancear sua decisão entre estes dois objectivos. Dado $1 - w$ e w, pesos associados aos critérios) $E[R(x)]$ e $Var[R(x)]$, propor: respectivamente. Então o investidor atenta a maximizar:

$$\text{Var}[R(x)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j = x^T \sum x \tag{2.43}$$

2.3 Modelo de investimento baseado em Risco

2.3.1 Value at Risk-VaR

O VaR é a metodologia para o cálculo de risco maisdifundida ee utilizada pelo mercado. De acordo com Jorion (1997), "o VaR mede a pior expectativa de perda durante um certo período de tempo, sob condições normais de mercado e com um dado nível de confiança". Logo, se dissermos que o VaR de um banco para dada carteira é de 80 milhões de dólares, com um nível de confiança de 99%, isto significa que existe 1 chance em 100 de que a perda do portfolio em um dia seja maior que os 80 milhões. Não podemos esquecer que nesta medida de VaR comentada no exemplo acima, é possível que haja perdas na carteira 99% das vezes menor que os 80 milhões (caso o VaR permanecesse neste valor ao longo do tempo) e uma única vez uma perda superior a este valor, de forma que a medida do VAR não terá sido violada.

Antes de apresentar o VAR, alguns pontos devem ser destacados, com por exemplo:

•Factores de risco
Os factores de risco para um certo activo são considerados todos os elementos tais como taxas e outros mercados que influenciam diretamente no preço de uma certa posição detida por uma empresa.

•Exposição
É o valor de mercado de uma determinada posição calculada através da multiplicação do preço unitário pela quantidade de activos disponível na carteira.

$$P_t = \sum_i F_{it} Q_{it} \tag{2.44}$$

Onde P_t é o valor de mercado da carteira no tempo t; F_{it} é o valor de mercado de uma determinada ação i, no tempo t; Q_{it} é a quantidade de ações i na carteira t.

• Sensibilidade
A sensibilidade de uma posição é definida como a taxa de variação no valor da posição dada uma variação no activo base, ou factor de risco, um instrumento pode ser sensível a mais de um factor de risco e é por esse motivo que será necessária sua decomposição nos factores de risco definidos. Matematicamente ela pode ser expressa por:

$$S = \frac{\Delta V}{\Delta F} \tag{2.45}$$

Onde V é o valor da posição e F é o factor de risco.

Para um instrumento com k factores de risco, a sensibilidade será dada por

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta V_i}{\Delta F_i} \tag{2.46}$$

A sensibilidade de uma posição em um mercado a um determinada factor de risco varia de acordo com a natureza do mesmo.

Cálculo dos retornos

Jorion (2003), recomenda o uso do logaritmo dos retornos (log-retornos) y_t ao invés dos preços do ativo P_t, devido ao facto de as séries de log-retornos possuírem propriedades estatísticas atrativas, como garantir a estacionariedade da série e serem mais fáceis de manipular. Os logaritmos dos retornos serão calculados através da seguinte equação:

$$y_{t,1} = \ln\left(\frac{P_{t,1}}{P_{t-1,i}}\right) = \ln\left(P_{t,i}\right) - \ln\left(P_{t-1,i}\right) \tag{2.47}$$

onde $P_{t,i}$ é o preço do ativo i no tempo t e P_{t-1} o preço do ativo i no tempo $t-1$ (tempo anterior a t). Considerando uma carteira de C ativos, com n observações cada (t = 1,$\cdots, n), amatrizdoslog - retornosédadapor,$Y={$Y_1, Y_2, \cdots, Y_c\}, \cdots, Y_c$, onde $Y_i = \{y_{t,i}\}\; t = 1 \;\; n = \{y1i, y2i, \cdots, yni\}$ são os vetores dos log-retornos de cada ativo i, com $(i = 1, \cdots, C)$.

Formalização do VaR

A noção de risco de uma carteira está associada ao facto de os retornos futuros não serem conhecidos, existindo um conjunto de possíveis retornos, cada um com uma probabilidade de ocorrência, que irão determinar o potencial de perda da carteira. Desta forma, para calcular a medida de risco da carteira deve-se obter a função distribuição acumulada (F.D.A.) dos retornos que fornece os valores somados das probabilidades até determinado ponto. Danielsson (2011), define de forma genérica o VaR de uma carteira como a solução da equação:

$$P(Q \leq -\,\mathrm{VAR}(\alpha)) = \alpha, Q = P_t - P_{t-1} \tag{2.48}$$

Ou

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-VAR} f_q(x)dx \tag{2.49}$$

onde Qé a variação no valor da carteira (perdas ou lucros –P/L).

Danielsson (2011) define o VaR utilizando a função de perdas e lucros Q. Segundo o autor, pode-se definir o VaR para os logaritmos dos retornos escrevendo-os na forma de retorno linear:

$$y_t = \ln\left(P_t\right) - \ln\left(P_{t-1}\right) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \tag{2.50}$$

$$e^{yt} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{2.51}$$

$$P_{t-1} * e^{yt} = P_t \tag{2.52}$$

Então:

$$P\left(P_{t-1} * e^{yt} - P_{t-1} \leq -\,\mathrm{VAR}(\alpha)\right) = \alpha \tag{2.53}$$

$$P\left(P_{t-1} * e^{yt} - 1 \leq -\,\mathrm{VAR}(\alpha)\right) = \alpha \tag{2.54}$$

Para a execução do cálculo do VaR (no caso paramétrico), será necessária uma estimativa da volatilidade dos log-retornos dos activos no horizonte de tempo de análise.

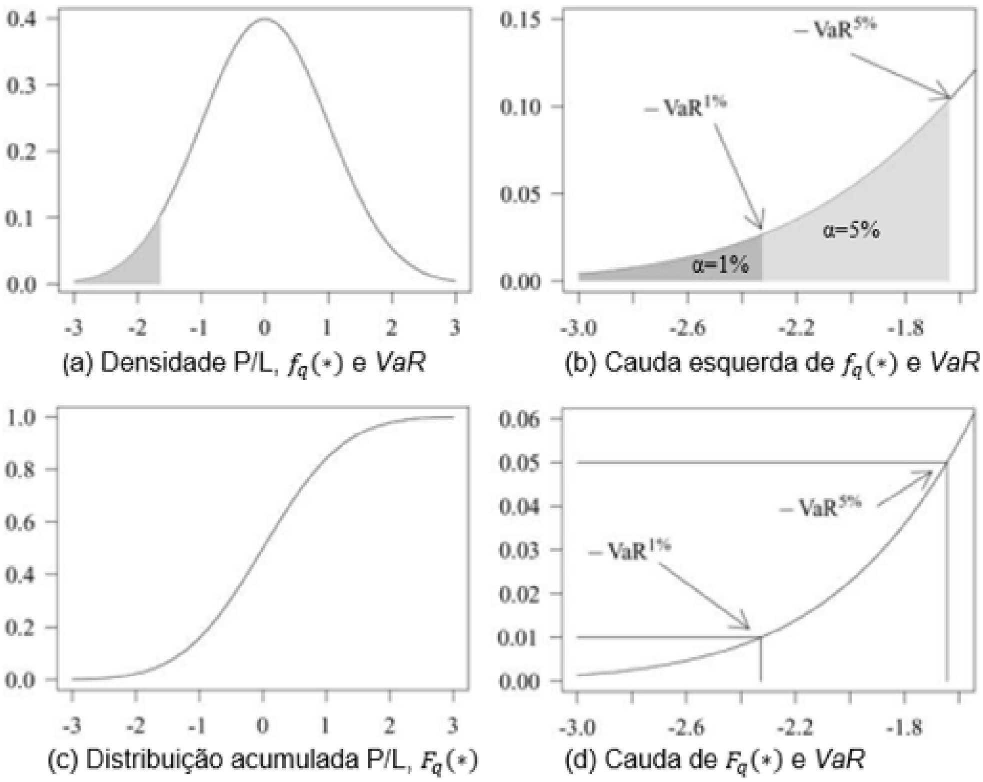

Figura 2.4: Gráficos de Value at Risk

A figura 2.4 ilustra como o VaR é definido. O painel (a) mostra toda a densidade de lucros e perdas (P/L), o painel (b) é um zoom na cauda à esquerda, onde as áreas sombreadas representam as probabilidades de ocorrência . O painel (c) mostra a distribuição acumulada dos lucros e perdas, e finalmente o painel (d) é um zoom na cauda à esquerda da distribuição acumulada.A figura 2.4 ilustra como o VaR é definido. O painel (a) mostra toda a densidade de lucros e perdas (P/L), o painel (b) é um zoom na cauda à esquerda, onde as áreas sombreadas representam as probabilidades de ocorrência . O painel (c) mostra a distribuição acumulada dos lucros e perdas, e finalmente o painel (d) é um zoom na cauda à esquerda da distribuição acumulada.

2.3.2 Conditional Value at Risk-CVaR

O CVaR também conhecido na literatura como Expected Shortfall proposto por Rockafellar e Uryasev (2001), representa a perda estimada de um activo ou de uma carteira de activos quando a perda excede o valor do VaR. O CVaR foi desenvolvido para minimizar a ocorrência de perdas muito acima do valor do VaR. Assim, o CVaR é uma modelagem de risco um pouco mais adequada quando trabalhamos com dados que possuem distribuição com cauda pesada.

$$\text{CVaR}_\gamma = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \text{VaR}_\gamma(X)d_\gamma \tag{2.55}$$

VaR $\gamma(X)$ é o Value–at–Risk para o activo ou uma carteira X dada uma confiança 1γ que é também a confiança do CVaR.

2.3.3 Drawdown

Segundo (Geronazzo, 2019), o conceito de *drawdown* pode ser utilizado para expressar uma perda relevante no valor de um activo, investimento ou portfólio. Consideramos o drawdown como sendo o retorno negativo observado entre um máximo local (pico) e o próximo mínimo local (vale), os investidores podem estar muito interessados nessa métrica a fim de minimizar o risco de variações negativas significativas. Na prática ocorre apenas um *Maximum Drawdown* em um determinado caminho; porém o objecto de estudo mais interessante é a distribuição de *Maximum Drawdown*. A partir da distribuição pode-se tirar conclusões interessantes e relevantes sobre o tamanho e sensibilidade dessa métrica sobre determinado portfólio, investimento ou activo financeiro.

Uma característica muito importante do *drawdown* é que ele é uma medida dependente do caminho, dessa forma, ao contrário do VaR, ela não está interessada apenas no ponto inicial e final, mas sim no que acontece durante toda a trajetória do activo objecto, ou seja, em um intervalo de 10 dias o retorno observado pode ser muito baixo, mas ter um *drawdown* bastante relevante.

Um grande *drawdown* pode forçar a liquidação da posição no menor preço do activo fazendo com que a recuperação não seja capturada.

Utilizando simulações de Monte Carlo, Burghardt, Duncan e Liu (2003) mostraram que a distribuição de Maximum Drawdown é sensível à alguns factores:

- Tamanho da amostra utilizada, ou seja, amostras maiores geram distribuições deslocadas para a direita.
- Retorno médio, ou seja, amostras com maiores retornos médios tendem a ter distribuições com menores valores de *Maximum Drawdown*
- Volatilidade dos retornos, ou seja, volatilidades maiores aumentam a probabilidade de maiores *drawdowns*
- Frequência dos dados, ou seja, dados com pouca frequência como semanal ou mensal tendem a ignorar a informação contida internamente.

•Maximun Drawdown at Risk

Pode-se definir uma métrica chamada Maximum Drawdown at Risk (MDaR), análoga ao Value at Risk (VaR), que utiliza a distribuição de Maximum Drawdown ao invés da distribuição de retornos.

Analogamente ao VaR, define-se o MDaR para um dado intervalo de confiança $\alpha\epsilon[0, 1]$ como sendo um percentil da distribuição de Maximum Drawdown:

$$MD_aR_\alpha(\mu(X)) = \inf\{m \mid P(\alpha(X)) > m \leq 1 - \alpha\} \tag{2.56}$$

Assim, o MDaR representa o menor valor de ıMaximum Drawdown, tal que a probabilidade de que um Maximum Drawdown $\mu(X)$ seja maior que m seja no máximo (1α). Por exemplo, o MDaR com 99% de intervalo de confiança é o menor valor m tal que 1% dos valores da distribuição de *Maximum Drawdown* seja maior que *m*. Pode-se comparar essa métrica com a métrica de VaR, enquanto o VaR representa o retorno comparando o início ao fim do período; o MDaR representa a perda máxima considerando o caminho.

2.3.4 Medida Omega

Tradicionalmente, os índices de Treynor (1965), Sharpe (1966) e Jensen (1968) usados em finanças para análise de desempenho de carteiras de investimento partem da hipótese de normalidade dos retornos. Dessa forma, basta sabermos a média e a variância da distribuição dos retornos para podermos fazer um ranking de desempenho das carteiras em análise. Mas esses índices têm sofrido uma série de críticas na literatura por não levarem em consideração todos os momentos da distribuição dos retornos.

A necessidade de incorporar nos índices de desempenho informações que vão além do cálculo da média e da variância da distribuição de retornos, levaram Keating e Shadwick (2002) ao desenvolvimento da técnica denominada, em finanças, medida Omega (Ω).
A medida Omega pode ser definida da seguinte maneira:

$$\Omega(r) = \frac{\int_r^b [1 - F(x)]dx}{\int_a^r F(x)dx} \tag{2.57}$$

F = Função cumulativa de distribuição dos ganhos; r = Nível mínimo desejado de ganho; b = Retorno máximo; a = Retorno mínimo.

Podemos dizer então que sempre desejaremos obter um índice $\Omega(r) > 1$, já que a igualdade nos diz que perdas ponderadas e ganhos ponderados se igualam. De modo a visualizar a equação de uma outra forma, Kazemi et al. (2003) desenvolveram o conceito de Expected Chance (EC) e Expected Shortfall (ES), conforme a equação abaixo:

$$\Omega(r) = \frac{\int_r^b (x - r)f(x)dx}{\int_a^r (r - x)f(x)dx} = \frac{E[\text{Max}(x - r; 0)]}{E[\text{Max}(r - x; 0)]} = \frac{EC(r)}{ES(r)} \tag{2.58}$$

Onde:
$(x - r) =$ Valor esperado do excesso de ganho condicional a valor positivo ou EC e
$(r - x) =$ Valor esperado da perda condicional a valor negativo ou ES.

2.4 Mercado Financeiro

Segundo (Pesente, 2019), o sistema financeiro é parte integrante e importante de qualquer sociedade econômica moderna. Portanto, é fundamental introduzir algumas noções básicas sobre o funcionamento da economia, antes de tratar especificamente do sistema financeiro, para que se compreenda melhor as funções e o funcionamento dos mercados. A ciência econômica, pode-se dizer, preocupa-se com o estudo da alocação de recursos da economia. Esse assunto torna-se relevante devido à constatação de que os indivíduos têm necessidades e desejos ilimitados, enquanto os recursos disponíveis para atendê-los são escassos. De facto, se pensarmos nas economias modernas, os desejos de consumo das famílias estão em geral acima de sua capacidade econômica. Quando pensamos em países, é fácil perceber essa noção de escassez dos recursos. Afinal, o número de pessoas disponíveis para trabalhar e os recursos naturais, financeiros e tecnológicos existentes são limitados.

Segundo (Hoana, 2019), em economia, um mercado financeiro é um mecanismo que permite a compra e venda (comércio) de valores mobiliários (por exemplo acções e obrigações), mercadorias (como pedras preciosas ou produtos agrícolas) e outros bens fungíveis (aquele que pode ser trocado por um outro da mesma espécie: exemplo, dinheiro pode ser em notas ou moedas de igual valor) com baixo custo de transacção e preços que reflectem a hipótese do mercado eficiente.

No mercado financeiro tradicional, o dinheiro depositado em bancos por poupadores é utilizado pelas instituições financeiras para financiar alguns sectores da economia que precisam de recursos. Por essa intermediação, os bancos cobram do tomador do empréstimo (no caso as empresas) uma taxa (spread), a título de remuneração, para cobrir seus custos operacionais e o risco da operação. Quanto maior for o risco de o banco não receber de volta o dinheiro, maior será a spread. Sabendo que as pessoas e organizações que necessitam de dinheiro emprestado (com recursos deficitários) entram em contacto com as que têm recursos superavitários nos mercados financeiros e que eles diferem entre si. Seguem-se alguns dos principais tipos de mercados:

1. Mercados de activos reais vs activos financeiros - Os mercado de activos reais também conhecidos como mercados tangíveis, são os que lidam com produtos como trigo, automóveis, imóveis, computadores e maquinaria. Os de activos financeiros lidam comoções, títulos, notas, hipotecas e outros direitos sobre activos reais.

2. Mercados à vista vs mercados futuros (a termo) – são aqueles em que os activos estão sendo comprados ou vendidos para entrega "imediata" ou para entrega numa data futura (ex. 6 meses).

3. Mercados monetários vs de capitais – Os monetários são os mercados financeiros em que os fundos são tomados de empréstimo por curtos períodos (menos de um ano). Os mercados de capitais são os mercados financeiros para acções e para a dívida de longo prazo (acima de um ano).

4. Mercados hipotecários vs de crédito ao consumidor – Os hipotecários lidam com empréstimos para imóveis residenciais, comerciais, industriais e agrários. Os mercados de crédito ao consumidor envolvem empréstimos para veículos e eletrodomésticos, bem como empréstimos para educação, férias, etc.

5. Mercados primários vs secundários – os primários são os mercados nos quais as empresas levantam capital emitindo novos títulos. Os secundários são os mercados nos quais títulos e outros activos financeiros são transaccionados entre os investidores depois da emissão pelas empresas no mercado primário. Para o caso de Moçambique o mercado secundário corresponde a BVM – Bolsa de Valores de Moçambique (Hoana, 2019).

Segundo BIS (2021), o mercado financeiro é um sistema complexo composto por instituições, instrumentos e participantes que facilitam a alocação de capital, a negociação de valores mobiliários, a transferência de riscos e a determinação de preços de activos. É um componente vital da economia global, permitindo que empresas, governos e indivíduos acedam recursos financeiros, gerenciem riscos e realizem transacções.

Existem diferentes segmentos no mercado financeiro, cada um com suas características e funções específicas. Os principais segmentos incluem:

Mercado de capitais: é o segmento que lida com a emissão e negociação de valores mobiliários, como ações e títulos de dívida. As empresas podem emitir acções para levantar capital e expandir seus negócios, enquanto os governos e as empresas podem emitir títulos para captar recursos financeiros. Os investidores podem comprar e vender esses activos no mercado de capitais, buscando retornos sobre seus investimentos.

Mercado monetário: é onde ocorre a negociação de títulos de curto prazo, como certificados de depósito, títulos do tesouro e papel comercial. Esse mercado permite que instituições financeiras e empresas obtenham financiamento de curto prazo para suas necessidades operacionais e de capital de giro.

Mercado cambial: é onde ocorre a negociação de moedas estrangeiras. As empresas e os investidores podem realizar transações cambiais para fins comerciais, investimentos ou especulação. O mercado cambial é altamente líquido e opera 24 horas por dia, cinco dias por semana.

Mercado de derivativos: nesse mercado são negociados contratos derivativos, como opções, futuros, swaps e contratos a termo. Esses instrumentos financeiros derivam seu valor de um activo subjacente, como acções, índices, commodities, moedas ou taxas de juros. Os derivativos são amplamente utilizados para protecção contra riscos, especulação e arbitragem.

A eficiência e a estabilidade do mercado financeiro são fundamentais para o bom funcionamento da economia. Para garantir isso, existem órgãos reguladores e entidades de supervisão, como a Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e o Banco Central, que estabelecem regras e regulamentos para proteger os investidores, promover a transparência e prevenir práticas fraudulentas. Além dos participantes tradicionais, como bancos, corretoras e fundos de investimento, o mercado financeiro também tem sido influenciado pelo avanço da tecnologia. O surgimento das *fintechs* (empresas de tecnologia financeira) e a adopção de tecnologias como *blockchain* e inteligência artificial têm impactado significativamente a forma como as transacções financeiras são conduzidas. É importante mencionar que o mercado financeiro está sujeito a flutuações e volatilidade, influenciadas por factores econômicos, políticos e sociais. Os investidores devem estar cientes dos riscos envolvidos e buscar conhecimento e orientação adequados ao realizar operações financeiras (BIS, 2021).

2.5 Mercado de capitais

De acordo com a literatura internacional, no mercado de capitais são negociados títulos de prazo superior a 1 ano. O prazo desses títulos não é necessariamente superior a 1 ano; assim, a denominação mercado de capitais refere-se a formas não intermediadas de captação de recursos e a posterior negociação desses títulos no mercado. Do ponto de vista dos investidores, o mercado de capitais surge como alternativa às aplicações tradicionais em produtos oferecidos pelos bancos ou pelo governo. É nesse mercado que os poupadores têm a oportunidade de participar de empreendimentos que consideram interessantes, desde que dispostos a assumir os riscos daí decorrentes. Espera-se, em especial nos títulos patrimoniais, uma rentabilidade superior aos investimentos tradicionais, embora com risco também superior. Isso porque, diferente do mercado de crédito, em que o risco das operações é centralizado nos bancos, no mercado de capitais o risco da operação em que os recursos são aplicados é assumido pelos próprios investidores. O mercado de capitais é, portanto, um segmento do mercado financeiro em que são criadas as condições para que as empresas captem recursos directamente dos investidores, através da emissão de instrumentos financeiros, com o objectivo principal de financiar suas atividades ou viabilizar projectos de investimentos (Pesente, 2019).

Mercado de capitais pode ser definido como um sistema de distribuição de valores mobiliários, que tem como objectivo canalizar recursos de médio e longo prazo para as empresas e proporcionar liquidez nas operações de compra e venda de títulos e valores mobiliários. São considerados activos do mercado de capitais: acções, debêntures e bônus de subscrição; os coupons, direitos, recibos de subscrição e certificados de desdobramentos; os certificados de depósitos de Valores Mobiliários; as cotas de Fundos ou clubes de investimento; as notas comerciais e cédulas de debêntures; e derivativos. A Comissão de Valores Mobiliários (CVM) é o principal órgão responsável pelo controle, normatização e fiscalização do mercado de capitais (Eduardo, 2000).

Mercado de capitais constitui uma relação financeira criada por instituições e condições que permitem aos poupadores e tomadores de capital de longo prazo, realizar transacções. Basicamente os mercados de capitais são para a dívida de longo prazo e acções empresariais. É nele onde empresas que precisam de recursos conseguem financiamento, por meio da emissão de títulos, vendidos directamente aos poupadores/investidores, sem intermediação bancária. Dessa forma, os investidores acabam emprestando o dinheiro de sua poupança às empresas, também sem a intermediação bancária (Hoana, 2019).

2.6 Bolsa de Valores

A bolsa de valores é um dos pilares fundamentais do sistema financeiro global, fornecendo um ambiente onde investidores e empresas podem interagir para comprar e vender uma variedade de ativos financeiros. Ao longo dos anos, as bolsas de valores têm desempenhado um papel vital na alocação eficiente de capital, facilitando o fluxo de recursos entre investidores e empreendedores. Através da negociação de ações, títulos e outros instrumentos financeiros, as bolsas de valores oferecem oportunidades para investidores diversificarem suas carteiras e buscarem retornos financeiros (Buffett, 1997).

2.7 Carteiras de investimento

Segundo Yasarhelyi (1973), o modelo tradicional de análise e otimização de carteiras de investimento foi proposto por Markowitz. Este modelo tenta maximizar o retorno proveniente de uma carteira de investimentos, minimizando o seu risco. As medições de risco são feitas através da variância no retorno histórico das ações da carteira. A minimização do risco é feita através de um balanceamento entre ações que seguem o ciclo econômico e ações que são contra cíclicas. As relações entre as ações são calculadas pela covariância entre os preços das ações. Por outro lado, este modelo torna-se de difícil utilização, pois envolve o cálculo extensivo de covariâncias, o que, com o acréscimo do número de ações, representa uma tarefa quase que impossível. Outra dificuldade pouco contornável é a preparação de dados para este modelo, o que requer a incorporação de dividendos e bonificações ao preço de cada ação antes de se poder calcular o seu retorno real. Resumindo, Markowitz sugere que a análise seja feita em duas etapas:

- Forma-se um grupo de carteiras eficientes. Uma carteira é dita eficiente se tem a menor variância de retorno (risco) dentre todas as carteiras com a mesma taxa de retomo. A curva obtida ao alocar-se em um gráfico, cujos eixos sejam risco e retorno, estas carteiras eficientes, é chamada fronteira eficiente.

- Escolhe-se dentre as carteiras eficientes uma carteira que provê o investidor com uma combinação de risco e retorno que mais apraz à sua aversão ao risco (sua curva de utilidade). Esta escolha pode ser feita graficamente, considerando-se como carteira ótima o ponto de tangência , entre a fronteira eficiente e a curva de utilidade do investidor.

Uma carteira de investimento consiste na alocação de capital num conjunto de empresas ou activos de interesse para o investidor. Em particular, quando o investidor compra ações de uma empresa, está a assumir posição como acionista, e portanto, fica detentor de capital próprio dessa empresa. A notação a usar para carteira de investimento será $x = (x_i, \cdots, x_n)$, onde $x_i,$, $i = 1, \cdots, n$ a percentagem de capital disponível para investimento ou quantitativo investido na empresa ou activo i. Diz-se que a carteira de investimento x define a posição do investidor no mercado financeiro. (Ribeiro, 2017)

CAPÍTULO 3

MATERIAL E MÉTODOS

Neste capítulo, são apresentados de forma detalhada os materiais usados e métodos aplicados para a produção dos resultados que são apresentados no Capítulo 4 desta monografia.

3.1 Material

3.1.1 Material

3.1.2 Selecção, recolha e processamento de dados

Nesta pesquisa buscou-se dados sobre preço de acções em diferentes empresas sul africanas, diversificando quanto ao sector e volatilidade em relação ao mecado (Beta). Escolhendo 9 (nove) activos a partir de 26/03/2018 a 23/03/2023, assegurando-se de que os dados refletiram as informações válidas e viáveis. Para a digitação do trabalho utilizou-se o software LaTeXe para o processamento dos dados o MS Excel.

3.1.3 Delineamento do estudo

Realizou-se um estudo de corte transversal prospectivo de natureza não experimental visando optimizar o portfólio de nove empresas cotadas na mesma bolsa de valores de Joanesburgo usando dois modelos de optimização de carteiras, nomeadamente, Média-Variância e CVAR.

3.1.4 Empresas em estudo

Para o estudo foram usadas 9 empresas da bolsa de valores Sul Africana (Johannesburg Stock Exchange – JSE), dos sectores de comunicação, serviços financeiros, mineração, saúde, cervejaria e consumo cíclico.

Anheuser-Busch InBev SA/NV (ANH.JO)

A Anheuser-Busch InBev SA/NV produz, distribui, comercializa e vende cerveja e outras bebidas. Oferece um portfólio de aproximadamente 500 marcas de cerveja, que incluem principalmente Budweiser, Corona e Stella Artois; Beck's, Hoegaarden, Leffe e Michelob Ultra; e as marcas Aguila, Antarctica, Bud Light, Brahma, Cass, Castle, Castle Lite, Cristal, Harbin, Jupiler, Modelo Especial, Quilmes, Victoria, Sedrin e Skol. A empresa foi fundada em 1366 e está sediada em Leuven, na Bélgica.

The Bidvest Group Limited (BVT.JO)

O Bidvest Group Limited, uma holding de investimentos, atua em negócios de serviços, comércio e distribuição na África do Sul e internacionalmente. A empresa opera em nove segmentos: Bidvest Automotive, Bidvest Commercial Products, Bidvest Financial Services, Bidvest Freight, Bidvest Branded Products, Bidvest Services South Africa, Bidvest Services International, Bidvest Properties e Bidvest Corporate and Investments. A empresa também fabrica e comercializa produtos sanitários; distribui cabos elétricos e produtos afins; oferece acessórios para veículos motorizados, bem como equipamentos para camping e actividades ao ar livre.

Capitec Bank Holdings Limited (CPI.JO)

O Capitec Bank Holdings Limited, por meio de suas subsidiárias, fornece vários produtos e serviços bancários na África do Sul. A empresa opera através de três segmentos: Banca de Retalho, Banco Empresarial e Seguros. Oferece serviços bancários transacionais; poupanças fixas e isentas de impostos e depósitos de chamadas e avisos; empréstimos à prazo, facilidades de crédito, empréstimos hipotecários, descobertos, vendas à prestações e locações, cartões de crédito e débito e facilidades de acesso; serviços de pagamento; serviços de comércio; e serviços de valor agregado, bem como produtos de crédito e seguro de vida.

Glencore plc (GLN.JO)

A Glencore plc se dedica à produção, refinação, processamento, armazenamento, transporte e comercialização de metais e minerais e produtos energéticos nas Américas, Europa, Ásia, África e Oceânia. Actua por meio de dois segmentos: Actividades de Marketing e Actividades Industriais. A empresa dedica-se à produção e comercialização de cobre, cobalto, níquel, zinco, chumbo, minério de cromo, ferrocromo, vanádio, alumínio, alumina e minério de ferro, carvão, petróleo bruto, produtos refinados e gás natural, bem como exploração/produção e refinação/distribuição de petróleo.

Mediclinic International(MEI.JO)

A Mediclinic está focada em fornecer serviços multidisciplinares orientados a especialistas em toda a continuidade dos cuidados, de forma que o Grupo seja considerado o provedor de serviços de saúde mais respeitado e confiável por pacientes, médicos, financiadores e reguladores de saúde em cada um de seus mercados.

A Mediclinic adota uma abordagem sustentável e de longo prazo para os negócios, colocando os pacientes no centro de suas operações e fornecendo consistentemente serviços de saúde de alta qualidade. Para atender a essas prioridades, o Grupo mantém os mais altos padrões de governança clínica e comportamento ético em suas divisões; investe tempo e recursos significativos no recrutamento e retenção de funcionários qualificados; faz investimentos consideráveis em suas instalações e equipamentos; e respeita as comunidades e o meio ambiente nas áreas em que atua.

Naspers Limited (NPN.JO)

A Naspers Limited opera na indústria de internet de consumo na África, Ásia, Europa, América Latina e América do Norte. A empresa opera através de classificados, Food Delivery, Pagamentos e Fintech, Etail, Edtech, plataformas sociais e de Internet, Media24 e outros segmentos de comércio eletrônico. Possui investimentos em classificados, entrega de alimentos, pagamentos e fintech, educação, saúde e comércio eletrônico, bem como empreendimentos e plataformas sociais e de internet. A empresa também imprime, publica e distribui jornais, revistas e livros, além de fornecer serviços de comércio eletrônico e logística de mídia. A Naspers Limited foi constituída em 1915 e está sediada na Cidade do Cabo, África do Sul.

Renergen Limited (REN.JO)

A Renergen Limited, uma holding de investimentos, actua em negócios de energia alternativa e renovável na África do Sul e na África Subsaariana. A empresa explora, desenvolve e vende gás natural comprimido, bem como gás natural liquefeito e gás hélio. Também desenvolve a tecnologia Cryo-Vacc, que permite o transporte de vacinas em baixa temperatura sem necessidade de energia elétrica. A empresa foi constituída em 2014 e está sediada em Joanesburgo, África do Sul.

Shoprite Holdings Ltd (SHP.JO)

A Shoprite Holdings Limited, uma holding de investimentos, actua principalmente no negócio de retalho de alimentos na África do Sul e internacionalmente. A empresa opera em quatro segmentos: Supermercados RSA, Supermercados Não RSA, Móveis e Outros segmentos operacionais. Também oferece roupas, mercadorias em geral, cosméticos e produtos de bebidas, móveis, entretenimento doméstico e produtos para revestimento de pisos, licores, eletrodomésticos e estofados.

Além disso, a empresa distribui diversos produtos farmacêuticos e equipamentos cirúrgicos para farmácias, hospitais, clínicas, médicos e veterinários.

Vodacom Group Limited (VOD.JO)

Vodacom Group Limited opera como uma empresa de conectividade, serviços digitais e financeiros na África do Sul e internacionalmente. Oferece uma gama de serviços de comunicação, incluindo dados, voz, mensagens, serviços financeiros, TI empresarial e serviços convergentes. A empresa também fornece soluções de conectividade de linha móvel e fixa, bem como serviços de internet e rede privada virtual para seus clientes em várias tecnologias sem fio, linha fixa, satélite, móvel e convergente; hospedagem em nuvem e serviços de segurança compreendendo infraestrutura como serviço, plataforma como serviço, software como serviço, serviços de segurança, aplicativos hospedados e conectividade primária e directa.

3.2 Métodos

3.2.1 Estatística Descritiva

Segundo Mulenga (2018), a estatística descritiva é um ramo ou parte da estatística cujo objectivo é a observação de fenómenos de mesma natureza, recolha, organização, classificação, analise e interpretação dos dados sem deixar de calcular algumas medidas (estatísticas) que permitem resumidamente descrever o fenómeno estudado.

3.2.2 Modelo Média-Variância

Retorno

Retorno é a referência absoluta ou relativa associada à diferença entre a meta de consumo alcançada no futuro e o consumo abdicado no presente. O conceito de retorno fornece ao investidor uma conveniente maneira de expressar a performance financeira do investimento.

$$\sigma_p^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_1^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} \tag{3.1}$$

Para várias finalidades é útil padronizar a covariância. Dividindo a covariância entre dois activos pelo produto padrão de cada activo temos como resultado uma variável que tem as mesmas propriedades da covariância. Essa medida é chamada de coeficiente de correlação. Seja ρ_{ik} a correlação entre os títulos financeiros i e k. Então, definimos o coeficiente de correlação como:

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i\sigma_k} \tag{3.2}$$

Fronteira eficiente

A fronteira eficiente é uma ferramenta poderosa para ajudar os investidores a tomar decisões informadas sobre como alocar seus recursos de forma a optimizar o equilíbrio entre o risco e o retorno. Além disso, ela destaca que a diversificação é fundamental para a redução do risco, pois a combinação adequada de activos pode levar a um portfólio com risco menor do que o risco de qualquer activo individual.

Modelo CAPM

CAPM é uma relação de equilíbrio. Espera-se que acções de beta alto tenham retorno mais alto que as de beta baixo porque elas são mais arriscadas. Exactamente por elas serem mais arriscadas, algumas vezes darão retorno mais baixo. Contudo, ao longo prazo, elas devem produzir, em média, retornos mais altos. Escrevemos o modelo CAPM na forma

$$\bar{R}_i = R_F + \beta_i(\bar{R}_M - R_F) \tag{3.3}$$

Onde:

- R_i é o retorno requerido do ativo.
- Rf é a taxa livre de risco.
- β é o beta do ativo.
- Rm é o retorno esperado do mercado de ações.

A fórmula CAPM indica que o retorno requerido de um activo é uma soma da taxa livre de risco e de um prêmio de risco proporcional ao beta do activo.

Índice de Sharpe (IS)

Formulado por Sharpe (1966), o IS encaixa-se na teoria de selecção de carteira, mais especificamente no modelo CAPM, apontando as carteiras óptimas na linha de mercado de capitais. De acordo com o CAPM, nenhuma carteira pode ter um IS maior do que o definido pela carteira de mercado. Carteiras com IS menor devem ser desprezadas.

$$IS = \frac{E(r_c) - r_{sr}}{C} \tag{3.4}$$

Onde r_{sr} é a taxa de juros sem risco; $E(r_c)$ é o retorno esperado do fundo; C é a volatilidade do fundo.

Modelo CVaR

O modelo CVaR é uma medida de risco que se concentra nas perdas esperadas após um determinado nível de confiança ser atingido. Ele é usado para avaliar e gerenciar riscos extremos em portfólios de investimentos, carteiras de activos e em outros contextos financeiros onde a minimização de perdas em situações adversas é uma prioridade.

$$F_{\alpha}(x,\upsilon) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m}[p_i(\upsilon - r_a), 0] - \upsilon = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m} p_i \left[max\left(\upsilon - \sum_{i=1}^{m} x_{xj} r_{ij}, 0\right)\right] = \upsilon \tag{3.5}$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Resultados

4.1.1 Selecção dos Activos

Para a selecção dos activos foram considerados vários critérios, desde os quais, o sector de actividades, a correlação dos activos que ajuda a suavizar os altos e baixos da carteira e o beta, levando em consideração que a diversificação reduz o risco da carteira.

Tabela 4.1: Tabela de activos, betas e sectores escolhidos

Activos	Betas	Sector
ABINBEV	1.08	Bebidas - Cervejeiros
Bidvest	0.54	Industriais
Capitec Bank Holdings	0.95	Serviços financeiros
Glencore	1.33	Materiais básicos
Mediclinic International	0.45	Saúde
Naspers Limited	0.66	Tecnologia
Renergen	0.58	Energia
Shoprite	0.17	Bens de consumo rápido
Vodacom	0.08	Serviços de comunicação

Considerado que a diversificação reduz o risco, para o estudo escolheu-se empresas de diferentes sectores e com betas variados, sendo que as empresas ABINBEV e Glencore apresentam um beta maior que 1, o que significa que o investimento é considerado mais agressivo e mais variável, enquanto que as outras empresas apresentam betas menores que 1, que mostram que as empresas têm menor volatilidade.

4.1.2 Estatísticas descritivas

Para estudar o comportamento dos dados antes de fazer o estudo, fez-se uma analise descritiva.

Tabela 4.2: Estatísticas descritivas dos retornos dos activos

Activos	Mínimo	Média	Máximo	Variância	Desvio Padrão	Curtose
ABINBEV	0	0.10	102.23	8.36	2.89	1249.70
Bidvest	0	0.01	0.15	0.00	0.01	11.35
Capitec Bank Holdings	0	0.10	101.39	8.22	2.87	1249.64
Glencore	0	0.02	0.13	0.00	0.02	5.95
Mediclinic International	0	0.01	0.17	0.00	0.02	28.70
Naspers Limited	0	0.10	103.23	8.52	2.92	1249.66
Renergen	0	0.02	0.35	0.00	0.03	15.99
Shoprite	0	0.10	102.94	8.48	2.91	1249.71
Vodacom	0	0.09	100.50	8.08	2.84	1249.72

Ao analisar os dados, observa-se que todas as empresas têm retornos médios positivos. A Naspers Limited destaca-se com o maior retorno médio, mas também o maior risco, indicado pelo desvio padrão mais alto. Por outro lado, a Mediclinic International apresenta o menor retorno médio e o menor risco. Isso sugere que, embora a Naspers possa oferecer retornos potencialmente mais altos, também está associada a maior volatilidade, enquanto a Mediclinic pode ser uma opção mais estável para investidores aversos ao risco. As curtoses das empresas mostram uma variação na forma de suas distribuições de retornos. AB InBev, Capitec Bank Holdings, Naspers Limited e Shoprite apresentam distribuições com excesso de curtose, sugerindo caudas mais pesadas e picos mais altos, o que pode indicar uma maior probabilidade de eventos extremos. Por outro lado, Bidvest, Glencore, Mediclinic International, Renergen e Vodacom têm distribuições com falta de curtose, com caudas mais leves e picos mais baixos, sugerindo uma menor probabilidade de eventos extremos. Essas diferenças podem ser influenciadas pelos setores de atuação, dinâmicas de mercado e outros fatores específicos das empresas.

4.1.3 Modelo Média-Variância

Para a escolha do portfolio óptimo usando o modelo média-variância, usou-se o Índice de Sharpe.

A tabela 4.3. mostra que os pesos atribuídos a cada activo neste portfólio óptimo indicam uma preferência por Bidvest, Glencore e Renergen enquanto AB InBev, Capitec Bank Holdings, Shoprite e Vodacom têm uma contribuição insignificante ou nula. Mediclinic International têm uma participação moderada, enquanto a Naspers Limited tem a menor participação.

Tabela 4.3: Pesos óptimos

Activos	**Pesos do portfolio óptimo**
ABINBEV	0.000000
Bidvest	0.625725
Capitec Bank Holdings	0.000000
Glencore	0.203271
Mediclinic International	0.037419
Naspers Limited	0.000039
Renergen	0.133545
Shoprite	0.000000
Vodacom	0.000000

4.1.4 Fronteira eficiente

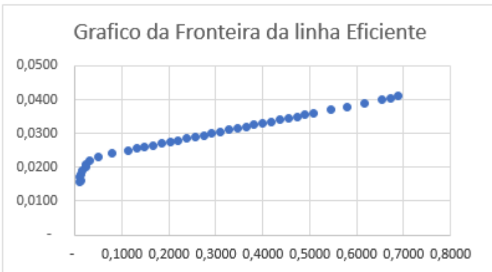

Figura 4.1: Gráfico da Fronteira da linha Eficiente

4.1.5 Modelo CvaR

Tabela 4.4: Portfolio óptimo usando o modelo CVaR

Activos	**Pesos**
ABINBEV	0.003274
Bidvest	0.209573
Capitec Bank Holdings	0.039505
Glencore	0.177435
Mediclinic International	0.308706
Naspers Limited	0.004133
Renergen	0.107376
Shoprite	0.062082
Vodacom	0.087915

Os pesos atribuídos a cada activo neste portfólio óptimo, calculados com base no modelo CVaR, refletem uma preferência por Mediclinic International, Bidvest e Glencore, que possuem as maiores participações. Isso sugere uma busca por um equilíbrio entre retorno e risco. AB InBev, Capitec Bank Holdings e Naspers Limited também têm participações significativas, enquanto Renergen, Shoprite e Vodacom têm pesos menores. Essa distribuição busca maximizar os retornos considerando os riscos associados a cada ativo.

4.1.6 Gráfico de comparação de desempenho dos modelos Media Variância, CVaR e estratégia de pesos iguais

Para as comparações de desempenho dos modelos media variância, CVaR e a estratégia de pesos iguais, reduziu-se a amostra em 3 meses de 3/Janeiro/2023 a 23/Marco/2023, e fez-se uma estimação dos retornos diários utilizando os três modelos para comparação.

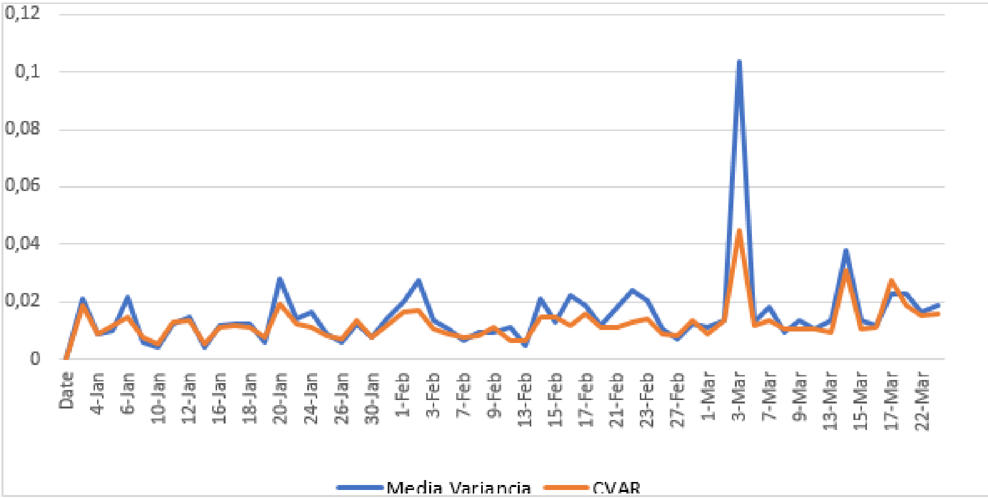

Figura 4.2: Gráfico de comparação de desempenho dos modelos media variância e CvaR.

Através da figura 4.2, verifica-se que o modelo Média-Variância apresenta maiores retornos que o modelo CvaR, porém os dois modelos não apresentam uma diferença significativa dos riscos.

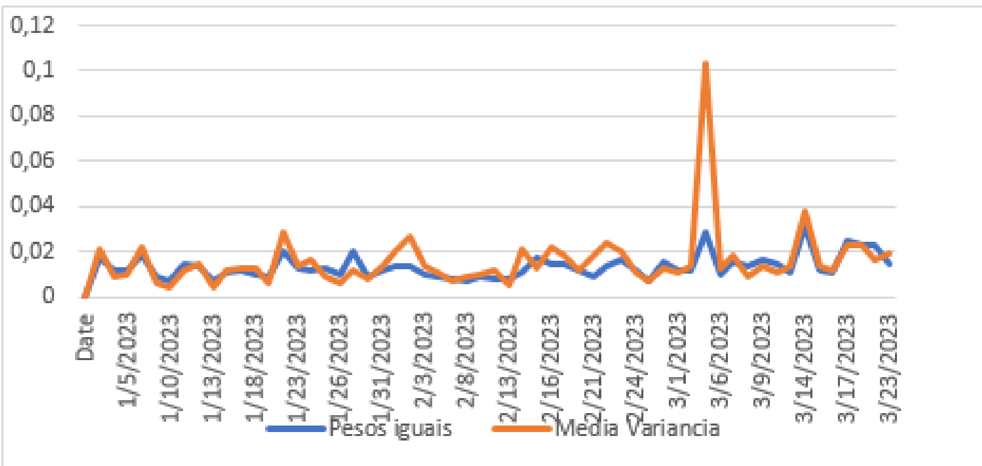

Figura 4.3: Gráfico de comparação de desempenho do modelo media variância e estratégia de pesos iguais.

A partir do gráfico 4.3, observa-se que não há uma diferença significativa entre o modelo media variância com pesos óptimos e o mesmo modelo com pesos iguais.

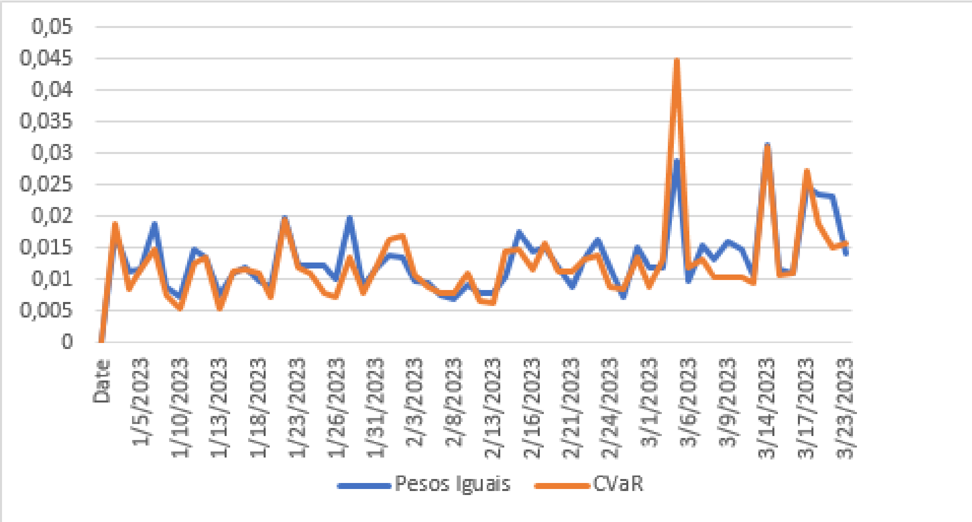

Figura 4.4: Gráfico de comparação de desempenho do modelo CvaR e estratégia de pesos iguais.

O gráfico 4.4, mostra que não há uma diferença significativa de risco e retornos entre o modelo media variância com pesos iguais e o modelo CVaR.

4.2 Discussão dos Resultados

A teoria de Harry Markowitz, apresentada em seu artigo seminal ”Portfolio Selection”de 1952, introduziu uma abordagem revolucionária para a construção de carteiras de investimento, destacando a importância de considerar não apenas os retornos esperados, mas também o risco associado aos investimentos. Markowitz demonstrou que a diversificação adequada dos activos em uma carteira pode reduzir significativamente o risco total, desde que os ativos apresentem baixa correlação entre si.

Comparando os resultados obtidos no estudo com os princípios estabelecidos por Markowitz, podemos observar várias semelhanças e divergências.

Markowitz destacou a importância da diversificação entre activos com baixa correlação para reduzir o risco total de uma carteira. No estudo, a comparação entre os modelos de média-variância e CVaR ressalta a relevância da diversificação, com resultados variando com base na abordagem utilizada. Enquanto o modelo de média-variância sugeriu uma seleção mais seletiva de activos, o modelo CVaR indicou uma estratégia mais inclusiva, investindo em todas as empresas da JSE.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E RECOMENDACÕES

5.1 Conclusões

O trabalho teve como objectivo constituir e optimizar uma carteira de investimento a partir da bolsa de valores Sul Africana, utilizando um modelo de investimento baseado em utilidade e um modelo de investimento baseado em risco ,e para alcançar este objetivo, foram usados dados da JSE, de 26/03/2018 a 26/03/2023, sendo assim, pode-se constatar que:

Enquanto o modelo de média-variância considera apenas o desvio padrão dos retornos como medida de risco, o CVaR leva em conta não apenas a volatilidade, mas também a probabilidade e a magnitude das perdas extremas. Isso permite uma modelagem de risco mais robusta e adequada para cenários de mercado adversos.

As 9 empreses apresentam um retorno médio positivo, a análise dos retornos médios e desvios padrão das empresas listadas na JSE revelou informações importantes sobre a diversificação de investimentos e o equilíbrio entre risco e retorno. Por exemplo, a empresa Naspers Limited, apesar de apresentar o maior retorno médio, também possui o maior desvio padrão, o que sugere um nível mais alto de volatilidade. Enquanto isso, a empresa Bidvest, com o menor desvio padrão e uma média significativa, destaca-se como uma potencial opção para redução de risco na carteira.

Os resultados obtidos com o modelo de média-variância sugeriram uma alocação mais seletiva de activos, com a exclusão de algumas empresas da carteira de investimento. Por outro lado, o CVaR indicou uma estratégia mais inclusiva, recomendando o investimento em todas as empresas da JSE, com maior ênfase em algumas delas. Essa diferença reflete as diferentes abordagens na avaliação e gestão do risco adotadas por cada modelo.

Através dos gráficos de comparações de modelos, concluiu-se que o modelo que trás mais retornos para esta carteira de investimento é o modelo media variância com pesos optimos.

O CVaR é particularmente relevante quando lidamos com distribuições de retorno que possuem cauda pesada, ou seja, quando há uma maior probabilidade de ocorrência de eventos extremos. Esta característica do CVaR o torna uma ferramenta valiosa para investidores e gestores de carteira que desejam proteger seus investimentos contra perdas severas em situações de mercado extremas.

As curtoses das empresas oferecem insights sobre a forma de suas distribuições de retornos, com algumas apresentando caudas mais pesadas e picos mais altos, indicando uma maior probabilidade de eventos extremos, enquanto outras têm caudas mais leves e picos mais baixos, sugerindo uma menor probabilidade de tais eventos. Essas diferenças podem ser influenciadas pelos sectores de actuação e dinâmicas de mercado. O CVaR, por sua vez, é uma ferramenta valiosa para proteger investimentos contra perdas severas em situações de mercado extremas, especialmente quando lidamos com distribuições de retorno com caudas pesadas. Portanto, ao combinar a compreensão das distribuições de retorno das empresas com o uso do CVaR, os investidores e gestores de carteira podem tomar decisões mais informadas e mitigar riscos significativos.

Embora os resultados possam diferir em relação ao modelo de média-variância, o CVaR oferece uma abordagem mais abrangente e adaptável à complexidade dos mercados financeiros.

5.2 Recomendações

Embora investir no exterior possa ser uma estratégia valiosa para diversificar portfólios, é importante reconhecer que este estudo não é conclusivo. Portanto, não se recomenda criar uma estratégia de investimento baseada unicamente nos resultados deste trabalho. No entanto, é crucial notar que o estudo não aborda o tema complementar que pode influenciar significativamente as decisões de investimento. Portanto, uma abordagem mais abrangente e uma análise cuidadosa de todos os aspectos envolvidos devem ser consideradas antes de formular uma estratégia de investimento no exterior.

Recomenda-se que antes de investir no exterior se faça uma avaliação mais profunda tomando em consideração alguns factores de risco como a taxa de cambio, barreiras regulatórias, falta de informação, fuso horário e diferenças culturais, riscos geopoliticos, etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Barbosa, M. M. (2009). *Formação da Bolsa de Valores no Brasil e nos Estados Unidos à luz das Instituições*.Monografia de Barcharelado, Rio de Janeiro.

[2] BIS (Bank for International Settlements). (2021). Financial markets.Investopedia. (n.d.).

[3] BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. INVESTMENTS.(1996). 3rd Edition. Irwin, The McGraw-Hill Companies Inc.

[4] Brennan, Michael.(1991) ”The Asset Allocation Decision:Why Investors Should Care”, Harverd Bussiness Review.

[5] Bolsa de valores de Moçambique (2019). Relatório anual de atividades da bolsa de valores de Moçambique. Maputo

[6] BRIGHAM, E. F.; GAPENSKI, L. C.; EHRHARDT, M. C.(1999). Financial Management, Theory and Practice. 9th Edition. The Dryden Press.

[7] BURGHARDT, G.; DUNCAN, R.; LIU, L. Deciphering drawdown.(2003).Risk Magazine.

[8] CORRÊA, A.C; BARRETO DE SOUZA, A.B.(2001).Fronterira eficiente de Markowitz, Aplicaçao com activos Brasileiros. Artigo disponível pelo Núcleo de Educação da UNAMA (Universidade da Amazônia). Belém.

[9] CURSOS, P. (2020). PRIME CURSOS . Obtido de PRIME CURSOS UM NOVO CONCEITO EM ENSINO A DISTANCIA: https://www.primecursos.com.br/blog/conheca-a-historia-da-bolsa-de-valores-no-brasil-e-no-mundo/

[10] DENG, X.; LI, Z.; WANG, S.(2005). A minimax portfólio selection strategy with equilibrium. European Journal of Operational Research. p.278-292.

[11] EDUCAÇÃO, X. (2022). XPE. Obtido de https://blog.xpeducacao.com.br/por-que-investir-acoes/

[12] Edwin J. Elton, M. J. (2012). *Moderna Teoria de carteias e analise de investimentos (Vol.8)*. Brasil, Rio de Janeirp: Elevier Editora Ltda.

[13] FONSECA, C. G. (2011). *APLICAÇÃO DO MODELO DE MARKOWITZ NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS EFICIENTES: UMA ANÁLISE DA RELAÇÃO ENTRE RISCO E RETORNO*.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, INSTITUTO DE ECONOMIA, Rio de Janeiro.

[14] Fortuna, Eduardo.(2000) Mercado Financeiro: Produtos e Serviços. 14ª edição – Rio de Janeiro: QualityMark Ed.

[15] Geronazzo, A. (2019). *TÉCNICAS DE ESTRESSE TESTE DE MERCADO USANDO MAXIMUM DRAWDOWN*. FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS, ESCOLA DE ECONOMIA DE SÃO PAULO, Sao Paulo.

[16] Hoana, C. C. (2019). *Introducao as Finanças*. Texto de apoio, INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES, Moçambique.

[17] Hicks, H.(1995):Theory of Risk-Bearing. Oxfrod University Press.

[18] iHUB. (10 de 05 de 2022).*iHUB Lounge*. Obtido de https:ihublounge.com.br/aprenda-a-investir/estudar-sobre-investimentos-saiba-porque-e-importante/ Jay Walters. The Black-Litterman Model in Detail. http.www.blacklitterman.org/,2009.p.5

[19] Jensen, Michael C. 1968. The performance of mutual funds in the period 1945-1964. *The Journal of Finance*, 23, 389-416.

[20] JORION, P. Financial Risk Manager Handbook. 5. ed. John Wiley & Sons, 2003.

[21] JORION,P.:Value at Risk: The New Brenchmark for Controlling Derivatives Risk. New York, Mc Graw Hill,1997.

[22] Junior, C. M. (2022). *MINIMIZAÇÃO DO RISCO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR E DA TEORIA DE MARKOWITZ*. Dissertacao de mestrado, Universidade Federal de São Carlos, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Sorocaba.

[23] Kazemi, Hosein; Schneeweis, Thomas; & Gupta, Bhaswar. 2003. Omega as a Performance Measure. *Working Paper CISDM*, University of Massachusetts, Isenberg School of Management.

[24] Keating, Con; & Shadwick, William. 2002. A Universal Performance Measure. *Journal of Performance Measurement*, 6, 59-84.

[25] Konno, H. e Yamazaki, H. (1991), *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Market, Management Science*, Vol. 37, nº 5, pp. 519-531.

[26] Lobarinhas, R. B. (2012).*Modelos Black-Litterman e GARCH ortogonal para uma carteira de titulos do Tesouro Nacional*. Dissertacao, Universidade de Sao Paulo, Instituto de Matematica e Estatistica, Sao Paulo.

[27] Markowitz, H.(1952), Portfolio Selection (1952), The Journal of Finance, Vol .7, nº1, pp 77-91.

[28] MARKOWITZ, H. Portfolio Selection: efficient diversification of investments. Journal of Finance, n.7, 1959.

[29] Moçambique, B. d. (s.d.). *BVM Bolsa de Valores Mocambique*. Obtido de http:www.bvm.co.mz/index.php/en/about/history

[30] Nsamu, B. (2017). *MODELOS DE OTIMIZAÇÃO NA DETERMINAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO*. Universidade do Porto, Faculdade de Ciencias, Departamento de Matematica.

[31] ONUSIDA. (1999). *Uma abordagem da prevencao do SIDA no local de trabalho na prespectiva dos direitos humanos*. ONUSIDA, Genebra, Suiça.

[32] Pesente, R. (2019). *Mercados Financeiros*. Universidade Federal Da Bahia, Ciencias Contabeis, Salvador.

[33] Reis, T. (2023). *SUNO*. Obtido de Suni.com.br: https://www.suno.com.br/guias/bolsa-de-valores/

[34] Ribeiro, J. P. (2017). *Modelos para Seleção de Carteiras de Investimento*. Trabalho do fim do curso, Faculdade de Ciências Universidade do Porto, Departamento de Matemática, Porto.

[35] Riberiro, P. d. (2006).

[36] Avaliacao Empirica Dos Modelos de VAR(Value-at-Risk). Dissercao, Universidade de Sao Paulo, Escola Politecnica, Sao Paulo.

[37] Rockafellar, T. R., e Uryasev, S. P. (2001). Conditional value–at–risk for general loss distributions. *SSRN Electronic Journal*. doi: 10.2139/ssrn.267256

[38] Saude, M. d. (2018). *Protocolo clinico e diretrizes teraupeuticas em manejo da infeccao pelo HIV em adultos*. Brasilia-DF.

[39] Sharpe, William F. (1966). Mutual fund performance.*Journal of Business*, 39, 119-138.

[40] SHARPE, W.(1964) Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance, v. XIX, p. 425-442, Sept.

[41] Treynor, Jack. (1965). How to rate management of investment funds. *Harvard Business Review*, 43, 63-75.

[42] Yasarhelyi, M. A. (1973). *A ATUALIZACAO DE MODELOS EM ADMINISTRACAO FINANCEIRA*. Rio de Janeiro.

ANEXOS

Tabela 1: Retornos dos activos com pesos de menor risco

Activos	Retornos
ABINBEV	0.09666
Bidvest	0.014864
Capitec Bank Holdings	0.096687
Glencore	0.017866
Mediclinic International	0.013665
Naspers Limited	0.102583
Renergen	0.021947
Shoprite	0.097967
Vodacom	0.093121

Tabela 2: Maximizacao Indice de Sharpe

Indice de sharpe
1.470053621

Tabela 3: Risco, retorno e variancia da carteira dos pesos iniciais

Retorno da carteira	Variância da carteira	Risco da carteira
0.0164	0.0001	0.0111

Activos	Media
ABINBEV	0.081106
Bidvest	0.000423
Capitec Bank Holdings	0.081145
Glencore	0.000713
Mediclinic International	0.000405
Naspers Limited	0.082568
Renergen	0.001282
Shoprite	0.081714
Vodacom	0.079795

Alfa	0.05
Total de cenários	1250
Posicao	63
VaR	-0.017565

SOMA	0.020965621
CVaR	0.436878139