



FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em
Estatística

Aplicação dos Modelos Auto Regressivos com
Heteroscedasticidade Condicional Para Análise
de Volatilidade do Preço das Acções da Cerveja
de Moçambique no Período de 2019-2023

Autor: Eduardo Tomé Sicaio

Maputo, Abril de 2025



FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em
Estatística

Aplicação dos Modelos Auto Regressivos com
Heteroscedasticidade Condicional Para Análise
de Volatilidade do Preço das Acções da Cerveja
de Moçambique no Período de 2019-2023

Autor: Eduardo Tomé Sicaúo

Supervisor: Mestre Herlander Namuiche

Maputo, Abril de 2025

Declaração de Honra

Declaro por minha honra que o presente trabalho de licenciatura é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de licenciado em estatística, na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, 13 de Abril de 2025

(Eduardo Tomé Sicaio)

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família,
especialmente ao meu avô.

”Isto é para os loucos.

Os rebeldes.

Os criadores de caso.

Os que vêem as coisas de forma diferente.

Enquanto alguns os vêem como loucos, nós vemos gênios.

Porque as pessoas que são loucas o suficiente para achar que podem mudar o mundo, são as que de facto, mudam.”

Steve Jobs

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à Deus, pela vida e por ter me dado forças para superar esse desafio.

Aos professores do Departamento de Matemática e Informática pelo apoio e dedicação durante o decorrer do curso. Agradecimentos especiais vão para o meu supervisor, MSc. Herlander Namuiche, que com muita paciência e sabedoria me mostrou os conhecimentos necessários para concluir meu trabalho, muito obrigado.

Ao meu avô Eduardo Sicaio(em memória), que acreditou no meu potencial e me ensinou pacientemente a somar os números, muito obrigado.

Um grande obrigado aos meus pais, Tomé Eduardo Sicaio e à minha mãe, Dora Alberto Siteo Sicaio, que se esforçaram para me ajudar a concluir o curso e muito obrigado aos meus irmãos Elvis e Tomé, e à minha irmã Mariana, sem esquecer a minha querida avó Mariana Covele pelo apoio incondicional ao longo do meu percurso acadêmico.

Muito obrigado aos meus tios e primos pelos bons conselhos e sugestões que me deram, além do bom espírito que muito me ajudou.

Muito obrigado à minha namorada Mirela Zandamela, pela sua paciência e apoio incondicional durante este percurso. Seu incentivo constante foi essencial para que eu pudesse concluir este trabalho. Muito obrigado por estar sempre ao meu lado.

Muitíssimo obrigado para os meus colegas e especialmente aos meus amigos do grupo DATA SCIENCE, que deram seu suporte e trataram-me como um familiar, muito obrigado.

Não posso agradecer o suficiente à Felismina Nhachungue pela amizade, motivação e positividade que transmitiu foi bom nesse percurso.

Obrigado, O.A.C d'Albazine, à juventude um forte abraço, agradeço a vossa companhia irmãos de "fatos cruzados" e agradecer sobretudo aos servos que incentivam os jovens a estudar. Meu muito obrigado.

FINALMENTE, agradeço ao grupo TUK e digo que vocês são uma família.

Resumo

Este estudo investiga a volatilidade dos preços das acções da Cerveja de Moçambique no período de 2019 a 2023, utilizando modelos autorregressivos com heteroscedasticidade condicional. A análise inicial identificou um modelo ARMA (1,1) como potencial, com base nas funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, e no critério de informação Bayesiano. No entanto, a presença de heteroscedasticidade condicional nos resíduos indicou a necessidade de um modelo mais complexo. Posteriormente, o modelo ARMA (3,2) foi seleccionado, seguindo o critério de informação de Akaike, por satisfazer a condição de ausência de heteroscedasticidade condicional nos resíduos. Contudo, testes de diagnóstico, como Ljung-Box e o Multiplicador de Lagrange, confirmaram a presença de ARCH. Para capturar a volatilidade persistente observada, foram estimados diversos modelos ARCH, incluindo GARCH, EGARCH e GJRGARCH. O modelo ARMA (3,2)-EGARCH (1,1) demonstrou ser o mais adequado para ajustar os dados históricos. Apesar disso, todos os modelos apresentaram problemas relacionados à normalidade dos resíduos e à gestão de risco, especialmente no que concerne ao valor em risco. A presença de heteroscedasticidade condicional nas séries temporais dos preços das acções da Cerveja de Moçambique justifica a aplicação de modelos ARCH para uma análise mais precisa da volatilidade.

Palavras-chave: Cerveja de Moçambique, Gestão de risco, Heteroscedasticidade condicional, Modelos ARMA, , Modelos ARCH, , Preços das acções, Séries temporais, Volatilidade .

Abstract

This study investigates the volatility of Cerveja de Moçambique share prices over the period 2019 to 2023, using autoregressive models with conditional heteroskedasticity. The initial analysis identified an ARMA (1,1) model as potential, based on the autocorrelation and partial autocorrelation functions and the Bayesian information criterion. However, the presence of conditional heteroskedasticity in the residuals indicated the need for a more complex model. Subsequently, the ARMA (3,2) model was selected, following Akaike's information criterion, as it satisfied the condition of no conditional heteroskedasticity in the residuals. However, diagnostic tests such as Ljung-Box and the Lagrange Multiplier confirmed the presence of ARCH. To capture the persistent volatility observed, various ARCH models were estimated, including GARCH, EGARCH and GJRGARCH. The ARMA (3,2)-EGARCH (1,1) model proved to be the most suitable for fitting historical data. Despite this, all the models presented problems related to the normality of the residuals and risk management, especially with regard to the value at risk. The presence of conditional heteroskedasticity in the time series of Cerveja de Moçambique share prices justifies the application of ARCH models for a more accurate analysis of volatility.

Keywords: ARMA models, ARCH models, Cerveja de Moçambique, Conditional heteroskedasticity, Risk management, Share prices, Time series, Volatility.

LISTA DE ABREVIATURAS

ADF - Aumentado de Dickey-Fuller

AIC – Akaike Information Criterion

AR - Auto Regressivo

ARCH – Autoregressive conditional heteroskedasticity

ARIMA – Autoregressive integrated moving average

ARMA – Autoregressive moving average

BIC – Bayesian Information Criterion

BVM - Bolsa de valores de Moçambique

EGARCH - Exponencial Generalized Auto Regressive Condicional heteroskedasticity

CDM - Cerveja de Moçambique

FAC – Função de autocorrelação

FACP – Função de autocorrelação parcial

GARCH – Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity

GJRGARCH - Glosten Jagannathan Runkle Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

MA - Médias Móveis

MAE – Mean Absolute Error

MSE – Mean Square Error

MT - Metical

VaR - Value at Risk

Índice

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Definição do problema	2
1.3 Justificação	3
1.4 Objectivos	3
1.4.1 Objectivo Geral	3
1.4.2 Objectivos Específicos	4
1.5 Estrutura do Trabalho	4
2 REVISÃO DA LITERATURA	5
2.1 Investimento	5
2.1.1 Mercado financeiro	6
2.1.2 Bolsa de valores	7
2.1.3 Acções	8
2.1.4 Retornos	9
2.2 Série Temporal	10
2.2.1 Classificação das séries temporais	11
2.2.2 Decomposição de uma série temporal	12
2.2.3 Estacionaridade	13
2.2.4 Modelos de Séries Temporais	14
2.2.5 Modelo Autorregressivo Integrado de Médias Móveis	15
2.2.6 Identificação de Modelos Autorregressivo Integrado de Médias Móveis.	
	16
2.3 Volatilidade	17
2.3.1 Volatilidade Histórica ou Estatística	18
2.3.2 Volatilidade Implícita	19
2.3.3 Volatilidade Futura ou Esperada	19
2.4 Modelos de Volatilidade	20
2.4.1 Modelo Autoregressivo Heteroscedasticidade Condicional	20
2.4.2 Modelo Heteroscedasticidade Condicional Autoregressiva Generali-	
zada	22
2.4.3 Modelo Exponencial Autoregressivo Generalizado Heteroscedastici-	
dade Condicional	24
2.4.4 Modelo Glosten Jagannathan Runkle Heteroscedasticidade condici-	
onal autoregressiva generalizada	26
2.5 Estimação de Modelos	27
2.5.1 Método dos Mínimos Quadrados	27

2.5.2	Método da Máxima Verossimilhança	28
2.6	Crítérios de Selecção de Modelos	28
2.6.1	Crítério Informação de Akaike	29
2.6.2	Crítério de Informação Bayesiano	29
2.7	Medidas de Acurácia	30
2.8	Valor em Risco	31
3	MATERIAL E MÉTODOS	34
3.1	Material	34
3.2	Métodos	34
3.2.1	Análise descritiva	34
3.2.2	Modelos	36
3.2.3	Previsão	39
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	41
4.1	Resultados	41
4.1.1	Análise exploratória	41
4.1.2	Modelação ARMA	45
4.1.3	Modelação ARCH	48
4.2	Discussão	56
5	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	57
5.1	Conclusões	57
5.2	Recomendações	58
5.3	Limitações do estudo	58

Lista de Figuras

1	Processo com Homocedasticidade	21
2	Processo com Heteroscedasticidade	21
3	VaR de uma distribuição Normal com grau de confiança de $(1 - \alpha)\%$	31
4	Série Temporal de preços das Acções da CDM	41
5	Decomposição de série de preços de acções	42
6	Série Temporal de log-retorno das Acções da CDM	43
7	Histograma de log-retornos das Acções da CDM	43
8	QQ-Normal de log-retornos das Acções da CDM	43
9	Correlogramas da série de log-retorno	45
10	Correlogramas dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA (3, 2)	47
11	Histograma dos resíduos padronizados	53
12	Retornos vs VaR(95%)	54
13	Correlogramas dos modelos ARMA	64
14	Correlogramas dos resíduos padronizados dos modelos da class ARCH	64
15	Correlogramas dos resíduos padronizados ao quadrado dos modelos da classe ARCH	64

Lista de Tabelas

1	Estatísticas descritivas do preço das acções de CDM	42
2	Testes de Estacionariedade e Normalidade da Série Temporal do Preço das Acções	42
3	Estatísticas descritivas da série de log-retornos das Acções da CDM	44
4	Teste de raiz unitária de Dickey- Fuller	44
5	Teste de Ljung-Box	44
6	Valores de AIC e BIC para os vários modelos ARMA(p, q)	45
7	Teste de Ljung-Box dos resíduos dos modelos	46
8	Comparação dos modelos pelos erros de previsão	47
9	Modelo ARMA (3, 2)	47
10	Ljung-Box dos resíduos ao quadrado	48
11	Multiplicador de Lagrange dos resíduos ao quadrado	48
12	Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança de ARMA(3, 2)-GARCH(1, 1)	48
13	Teste de Assimetria	49
14	Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança de ARMA(3, 2)-EGARCH(1, 1)	49
15	Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança de ARMA(3, 2)-GJR-GARCH(1, 1)	50
16	Medidas de bondade do ajustamento	50
17	Teste do multiplicador de Lagrange	51
18	Teste de Ljung-Box nos resíduos padronizados	51
19	Teste de Ljung-Box nos resíduos ao quadrado padronizados	52
20	Estatísticas dos resíduos padronizados	52
21	Violação do VaR(95%)	53
22	Erros de previsão para o período de 2023	54
23	Risco de investimento para o período de 2023	54
24	Pior queda do preço verificada ao longo de 2023	55
25	VaR vs pior queda do preço verificada ao longo de 2023	55

Capítulo I

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Segundo Palmer (2017), a cerveja é uma bebida alcoólica gaseificada produzida através da fermentação de substâncias amiláceas, principalmente grãos maltados como cevada e trigo, a água é um dos componentes importantes na sua preparação, e algumas receitas também incluem lúpulo e fermento, além de outros aromas como frutas, ervas e outros vegetais.

Segundo Swinnen(2011), a cerveja é um produto comercializado a nível mundial, que contribui para a balança comercial de muitos países, sendo que a importação e exportação da cerveja e das suas matérias-primas geram receitas e estimulam as relações comerciais internacionais. De acordo com a bolsa de valores de Moçambique (2024), a cerveja de Moçambique tem como objecto social a produção e posterior venda de cerveja, bem como a importação e exportação de produtos.

Segundo Lopes (2018), de 2011 à 2017, desde o início da produção da Impala, a Cervejas de Moçambique (CDM) gerou mais de 180 milhões de meticais para as famílias produtoras de milho e mandioca, comprámos cerca de 49.000 toneladas de mandioca e milho. Esse apoio pode melhorar a qualidade de vida das famílias produtoras e promover práticas agrícolas mais sustentáveis. O investimento da CDM se destaca como um exemplo de sucesso em integração de cadeias de suprimento e desenvolvimento económico local.

Segundo a bolsa de valores de Moçambique (2024), a cervejas de Moçambique foi a primeira empresa moçambicana a ser listada na bolsa de valores do país. Assim, Anheuser-Busch InBev tornou-se indirectamente o principal accionista do CDM, com 51,1% das acções, controlando todas as principais marcas de cerveja do Moçambique. Além disso, é a sexta maior empresa do país com cerca de 94% do mercado de cerveja do país.

A econometria é um campo da economia que estuda fenómenos económicos utilizando ferramentas estatísticas baseadas em variáveis económicas como dados de entrada para modelos matemáticos. Na econometria, o objectivo final é representar matematicamente os eventos económicos para poder prever eventos futuros, sejam lucros, perdas ou situações de equilíbrio (Wooldridge, 2016).

Segundo Graham (2006), o comportamento dos mercados financeiros é extremamente sensível a uma variedade de factores que afectam directamente os resultados dos preços das acções, tais como eventos políticos e empresariais, mudanças nas opiniões de investidores específicos, forte capacidade de investimento, boas condições climáticas, etc. Esses factores demonstram a sofisticação dos modelos analíticos, fazendo previsões de valor confiável para a tomada de decisões com o menor risco possível, daí a referência à pesquisa de eficiência de mercado (Wooldridge, 2016).

A eficiência do mercado é um tema altamente considerado e relevante nos mercados financeiros, inicialmente estudado por Paul Samuelson e posteriormente analisado por Eugene Fama. Samuelson (1965) demonstrou que, se preços são adequadamente antecipados, eles fluctuam de forma aleatória. Fama (1970), expandiu essa ideia ao desenvolver a hipótese de mercado eficiente, que classifica os mercados de acordo com a quantidade de informação reflectida nos preços das acções.

Contudo, prever dados de séries temporais financeiras é uma tarefa extremamente difícil. Segundo Garcia (2017), isso ocorre principalmente devido a mudanças inéditas nas tendências e porque as séries são compostas por ruídos e, além disso, não demonstram estabilidade e este ruído ocorre devido aos factores económicos, políticos.

De acordo com Gujarati (2006), a heteroscedasticidade ou variabilidade em termos de erros desiguais é uma característica dos dados transversais (ou seja, dados recolhidos num momento específico).

Segundo Mandelbrot (1963), as séries temporais financeiras, como taxas de juros, preços de acções, taxas de câmbio, taxas de inflação, entre outras, muitas vezes exibem o fenómeno de aglomeramento de fluctuações. Isso significa que os preços dessas séries fluctuam significativamente ao longo de um determinado período, seguido por um período de relativamente calma.

1.2 Definição do problema

O mercado accionário, também conhecido como mercado de acções ou bolsa de valores, é um ambiente onde são negociadas as acções de empresas de capital aberto. Investir no mercado financeiro pode oferecer muitas oportunidades, mas também apresenta alguns problemas. Alguns dos problemas comuns que os investidores podem enfrentar incluem riscos de mercado, que estão sujeitos a fluctuações (volatilidade), podendo resultar em perdas significativas de capital. Ao investir em acções pode estar sujeito a riscos relacionados à desempenho da empresa.

Todo investimento envolve algum nível de risco, e investir em acções não é diferente. Investir em acções requer um certo nível de compreensão dos diferentes instrumentos financeiros, estratégias de investimento e análise de mercado. A falta de conhecimento pode levar a decisões de investimento inadequada. Além disso, investir pode ser emocionalmente desafiador, especialmente durante períodos de volatilidade do mercado. Medo e ganância podem levar a decisões impulsivas que resultam em perdas.

Todos os investidores interessados em fazer aplicação do seu capital nas acções da Cervejas de Moçambique, também, devem estar cientes de que o desempenho passado das acções da Cervejas de Moçambique, não garante retornos futuros. Portanto, é fundamental realizar uma análise cuidadosa.

Deste modo surge a seguinte questão: Qual é o modelo da classe ARCH que melhor se ajusta a volatilidade do preço das acções da Cerveja de Moçambique?

1.3 Justificação

Desde a sua criação, o mercado de acções despertou um interesse nos investidores. Desde a primeira transação, todos querem conhecer o segredo que explicaria os movimentos dos activos para os poderem antecipar, tomar as decisões certas no momento certo, evitar os perigos e aproveitar rapidamente as oportunidades de retorno.

No entanto, essa fórmula mágica não existe e os investidores devem trabalhar para criar ferramentas e modelos que os ajudem a tomar decisões. Estes podem servir de instrumento de aprendizagem, utilizando os conhecimentos e a experiência dos investidores no processo de afectação de capitais.

Portanto, com o objectivo de melhorar a compreensão da evolução dos preço do activo, este estudo propõe aplicação de modelos econométricos para análise de acções baseado no histórico da série do activo financeiro.

1.4 Objectivos

1.4.1 Objectivo Geral

Analisar a volatilidade dos preços das acções da Cerveja de Moçambique no período de 2019-2023, utilizando modelos auto-regressivos de heteroscedasticidade condicional.

1.4.2 Objectivos Específicos

- Realizar análise exploratória da série do preço das acções da cerveja de Moçambique;
- Estimar os modelos ARMA para o período de 2019-2022;
- Estimar os modelos de classe ARCH para o período de 2019-2022;
- Verificar o desempenho preditivo dos modelos ajustados.
- Prever a volatilidade para o período de 2023.

1.5 Estrutura do Trabalho

O problema de estudo é apresentado no Capítulo 1. Além disso, são apresentados os objectivos gerais e específicos. O resto do trabalho está dividido em quatro capítulos. No segundo capítulo, é feita uma revisão da literatura e são introduzidos os conceitos de volatilidade, estacionaridade e variância condicional, fornecendo uma base teórica para o estudo dos modelos da classe ARCH. Os métodos e o material utilizada para desenvolver os modelos são apresentada no terceiro capítulo. Os dados são apresentados e analisados no quarto capítulo, e são estimados os modelos e avaliados através do acurácia correspondente e da sua respectiva discussão. O quinto capítulo apresenta os principais resultados do estudo e oferece recomendações para investigação futura.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Investimento

Segundo o Halfeld (2007), na macroeconomia, o investimento refere-se à aquisição de bens e serviços que serão empregados no futuro na fabricação de outros bens e serviços. De acordo com o Blanchard (2017), o investimento é conhecido como formação bruta de capital, o investimento contribui para o aumento dos recursos produtivos de uma economia e, conseqüentemente, amplia suas capacidades de produção.

Segundo o Menezes (2011), a fim de maximizar a riqueza e alcançar os retornos desejados de uma aplicação, o investimento é feito com o objectivo de obter ganhos futuros, sempre superiores ao valor aplicado, associados a um nível de previsões e atratividade, investimento normalmente a longo prazo. De acordo com Gitman e Joehnk (2005), um investimento é apenas qualquer meio pelo qual os recursos disponíveis podem ser disponibilizados com antecedência para que eles aumentem ou preservem seu valor e gerem renda.

Como afirma Assaf Neto (2014), o investimento permite a transferência de capital para opções que são permitidas para aumentar a capacidade produtiva de uma nação aumentando a capacidade de gerar riqueza no futuro.

Segundo o Instituto Nacional de Estatística (2022), a alimentação e bebidas não alcoólicas representaram a maior parcela dos gastos mensais das famílias moçambicanas, com uma média de 3.358 meticais por mês por agregado familiar. De acordo com Smith (2020), este fluxo de capital gerado pela busca incessante de suas satisfações nem sempre resulta em um valor líquido igual a zero; na maioria das vezes, há um déficit (gastos superiores a recebimentos) ou um superávit (gastos inferiores a recebimentos) no resultado final dos gastos e recebimentos.

Segundo o Oliveira (1983), as pessoas têm muitas opções para o destino do capital excedido se seus recebimentos e despesas forem positivos. Uma opção é atender aos desejos que foram privados até então devido à falta de capital necessário para sua realização imediata. Outra opção é abandonar seus desejos actuais e assumir a posse imediata do capital excedido, com o objectivo de ganhar mais dinheiro no futuro. O termo investimento refere-se a esta troca entre a posse imediata do capital e a expectativa de recebimento que justifique

a privação (Reily e Brown, 1997)

Segundo o Oliveira (1983), as pessoas consideram o consumo futuro em relação ao presente por dois motivos principais:

- A segurança é o primeiro problema, garantir o futuro de seus próprios e de seus familiares é uma necessidade urgente, um seguro de vida é um meio pelo qual uma pessoa poupa dinheiro para proteger sua família de uma morte prematura e uma maneira de proteger o futuro é acumular riqueza simplesmente;
- O segundo é o desejo de melhorar o padrão de vida de todos, isso inclui economizar dinheiro para comprar um carro ou uma casa e simplesmente aumentar sua riqueza, pois pode significar poder.

2.1.1 Mercado financeiro

Segundo o Levy (1999), os mercados financeiros estão cada vez mais populares entre as pessoas comuns, as tendências mundiais mostram um enorme crescimento no número de pessoas que estão a investir em acções.

Segundo Gitman e Joehnk (2005), os mercados financeiros podem ser definidos como um conjunto de instituições e instrumentos concebidos para proporcionar diferentes formas de utilização e compra de recursos financeiros. Nesta abordagem (Gitman e Joehnk, 2005) optimizam a utilização dos recursos financeiros e criam requisitos financeiros e de gestão de riscos.

- Instituições - O mercado financeiro é composto por diversas instituições financeiras, como bancos, seguradoras e correctoras de valores mobiliários e cada tipo de instituição financeira desempenha determinadas funções de acordo com as regras.
- Instrumentos financeiros – podem incluir: instrumentos de dívida, tais como depósitos bancárias, obrigações e obrigações governamentais; e participação patrimonial ou propriedade, que incluem as acções mais populares.

Segundo Oliveira (1983), pode conceituar-se mercado financeiro como um conjunto de instituições financeiras que permitem a transferência de recursos dos fornecedores finais para os tomadores finais e criam as condições para que os títulos se tornem líquidos no mercado (conversão de activos em possibilidades monetárias).

Fabozzi (1994), destacou diversas funções dos mercados financeiros:

- Determinar o preço dos activos negociados entre compradores e agentes dos tomadores de empréstimos;

- Fornecer um mecanismo para os investidores comprarem ou venderem activos, proporcionando assim liquidez;
- Reduza os custos de transacção. Existem dois custos de transacções principais: custos de pesquisa, que são custos incorridos na procura de contrapartes, e custos de informação, que são custos incorridos na procura de informações sobre activos e contrapartes;

Com base nessas características, pode-se dividir os mercados financeiros em quatro mercados específicos (Assaf Neto, 2014):

- Mercado monetário, são negociados títulos emitidos pelo banco central para execução da política monetária do governo e títulos emitidos pelo Tesouro para atender às necessidades do orçamento, bem como diversos títulos e títulos ordinários.
- Mercado de crédito é composto principalmente por bancos comerciais/múltiplos. O objectivo fundamental deste mercado é satisfazer as necessidades de recursos de curto e médio prazo das diversas entidades económicas, através da concessão de crédito a particulares ou de empréstimos e financiamentos a empresas.
- Mercado de capitais, operam através de vários tipos de financiamento de longo prazo de capital de giro e capital fixo. Os mercados de capitais também realizam operações sem restrições, como emissão e subscrição de acções.
- Mercado cambial, ocorrem diversas operações de compra e venda de moedas estrangeiras para fins cambiais. em estoque As origens da sociedade por quotas sugerem que as origens do mercado de acções surgiram quando os mercados de crédito já não eram eficientes em garantir o fluxo de recursos para actividades produtivas em condições adequadas, particularmente em termos de tempo e custo.

2.1.2 Bolsa de valores

Segundo Fabozzi e Modigliani (2002), a bolsa de valores é um ambiente organizado para a negociação móvel de valores, o seu principal objectivo é melhorar a eficiência do mercado de capitais, proporcionando um ambiente mais fácil, mais transparente e mais seguro para as transacções.

Segundo Assaf Neto (2003), a bolsa de valores é uma instituição organizada para a negociação de valores mobiliários como acções, títulos, opções, etc., e proporciona um ambiente seguro e organizado para clientes.

Segundo Mishkin e Eakins (2012), a bolsa de valores é uma instituição financeira que

vende acções da empresa, e contribui para a rentabilidade do mercado financeiro ao garantir a avaliação contínua do valor das empresas e do fluxo de caixa entre investidores.

Segundo Gitman e Madura (2003), as bolsas de valores podem beneficiar todos os membros da sociedade, e não apenas aqueles que detêm acções de empresas cotadas na bolsa, os benefícios das bolsas de valores para a economia e a sociedade no seu conjunto:

- Aumento do capital das empresas: as bolsas de valores proporcionam um excelente ambiente para as empresas obterem capital para expandir as suas operações, vendendo acções e outros títulos ao público investidor.
- Mobilização de poupanças para investimento: quando as pessoas investem as suas poupanças em acções de empresas cotadas em bolsa, isso conduz a uma afectação mais racional dos recursos da economia, uma vez que os recursos que, de outra forma, poderiam ser utilizados para consumir bens e serviços ou armazenados em contas bancárias são mobilizados e redireccionados para actividades que geram novos negócios, beneficiando vários sectores da economia, como a agricultura, o comércio e a indústria, conduzindo a um maior crescimento económico e a um maior crescimento económico.
- Redistribuição de rendimentos: ao permitir que um vasto leque de pessoas adquira acções de empresas públicas e se torne assim sócio de empresas lucrativas, o mercado de capitais contribui para reduzir a desigualdade na distribuição do rendimento no país. Os investidores - casuais ou profissionais - podem partilhar os lucros gerados pelas empresas rentáveis através do aumento do preço das acções e da distribuição de dividendos.

2.1.3 Acções

Segundo o Assaf Neto (2008), o nascimento da sociedade anónima sugere que o mercado de acções surgiu quando os mercados de crédito deixaram de ser eficazes para assegurar o fluxo de recursos para as actividades produtivas em condições adequadas, especialmente em termos de tempo e de custos.

Segundo Gitman e Madura (2003), as acções representam as unidades de propriedade da empresa. Quando um investidor compra acções, ele recebe uma participação no capital da empresa, tem direito a uma participação nos lucros e, finalmente, pode votar nas assembleias.

Segundo Assaf Neto (2014), as acções representam, portanto, a menor parte (fracção)

em que o seu capital está dividido e quando uma pessoa compra acções, ela passa a ser um dos acionistas e proprietários da empresa. Ainda segundo os autores Brito e Assaf Neto (2008), existem dois tipos de acções:

1. As acções ordinárias conferem ao seu titular o direito de votar nas assembleias gerais e de participar dos lucros da empresa por meio do recebimento de dividendos;
2. As acções preferenciais, por outro lado, não têm direito a voto, mas oferecem certas vantagens ou benefícios em troca, como prioridade no recebimento de dividendos (às vezes em percentual mais elevado) e prioridade no reembolso do capital em caso de liquidação da empresa.

Segundo Damodaran (2012), os retornos das acções variam e dependem principalmente do desempenho da empresa emissora, das condições económicas e de mercado. Ainda Segundo Damodaran (2012), os principais benefícios para os accionistas são:

1. Dividendos - uma parte do rendimento líquido de uma empresa distribuída aos accionistas;
2. Juros sobre o capital próprio - as empresas podem obter vantagens fiscais recompensando os accionistas com juros sobre o capital próprio em vez de dividendos;
3. Bónus - os bónus podem assumir a forma de acções ou de dinheiro. Quando uma empresa pretende aumentar o seu capital, emite acções que são distribuídas gratuitamente aos accionistas na proporção de cada acionista.
4. Valorização - o lucro que os accionistas obtêm com as alterações dos preços dos imóveis no mercado através da compra e venda de acções da empresa;

2.1.4 Retornos

Segundo o Morettin (2006), o valor de retorno é o valor absoluto ou relativo da diferença entre os objectivos de consumo realizado no futuro e consumo renunciado no presente. O conceito de rendibilidade proporciona aos investidores uma forma conveniente de exprimir os resultados financeiros de um investimento (Markowitz, 1952).

Segundo o Morgan Bank (1999), numa perspectiva absoluta ou monetária, a rendibilidade numérica representa simplesmente o valor total do investimento. O montante recebido no final da transação de investimento menos o montante investido:

$$\textit{Retorno Absoluto} = \textit{Quantia Recebida} - \textit{Quantia Investida} \quad (1)$$

No entanto, as rendibilidades relativas, também designadas por taxa de rendibilidade ou percentagem, são as mais frequentemente utilizadas. A taxa de rendibilidade é uma forma

de normalização. O montante da recompensa por unidade de investimento é considerado:

$$Taxa\ de\ retorno = \frac{quantia\ recebida - quantia\ investida}{quantia\ investida} \quad (2)$$

Segundo Tsay (2002), do ponto de vista estatístico, com os retornos, por não terem escala, são geralmente fixos e ergódicos. Além disso, com exceção dos retornos intradiários e das séries de taxas de câmbio ou de juros, os retornos raramente apresentam tendências ou sazonalidade (Morettin e Tolo, 2011).

Tsay (2002) resume algumas das principais características dos retornos financeiros:

1. As séries de preços são normalmente não estacionárias e comportam-se como passeios aleatórios, enquanto as séries de retornos são quase sempre estacionárias;
2. Os retornos apresentam normalmente pouca ou nenhuma autocorrelação;
3. A soma absoluta dos quadrados dos retornos apresenta normalmente uma forte autocorrelação;
4. Os retornos tendem a agrupar-se, ou seja, choques maiores levam a choques maiores e choques menores levam a choques menores;
5. As distribuições incondicionais dos retornos tendem a ter caudas mais pesadas do que as distribuições normais.

2.2 Série Temporal

Segundo Brockwell e Davis (1996), uma série temporal é uma realização de uma família de variáveis aleatórias, ou seja, um modelo de série temporal dos dados observados é uma especificação das distribuições de uma série de variáveis aleatórias, chamada de realização.

Morettin e Tolo (1987) definem uma série temporal como uma coleção de observações organizadas no tempo de modo que essas observações sejam geralmente igualmente espaçadas. No caso de séries temporais, a ordem dos dados é fundamental. Objectivamente, Silva *et al.*(2008), descrevem uma série temporal como um conjunto de observações discretas tomadas equidistantes umas das outras que mostram uma dependência sequencial entre essas observações.

Segundo Tsay (2005), as séries temporais financeiras têm propriedades especiais que outras séries não têm, e procura-se os modelos que melhor descrevam o seu comportamento.

Segundo Morettin e Tolo (2004), as séries financeiras normalmente apresentam certas características que correspondem aos factos estilizados do desempenho financeiro, tais como: imprevisibilidade e falta de correlação, média próxima de zero, agrupamentos instáveis, os valores extremos se repetem e há mais observações nas extremidades da distribuição de retorno do que na distribuição normal, e assimetria, maior volatilidade para retornos negativos em comparação aos retornos positivos.

Segundo Murteira e Black (1983), o primeiro e fundamental passo em qualquer estudo de séries temporais é a sua representação gráfica, pois revelam padrões importantes de comportamento como tendências, padrões cíclicos, mudanças estruturais, anomalias nas observações, etc.

2.2.1 Classificação das séries temporais

Segundo Milone (2006), as séries temporais podem ser classificadas como determinísticas ou estocásticas.

Determinística

Uma série é considerada determinística se seus valores puderem ser representados por uma função unidimensional (onde a série temporal é explicada apenas por seus valores passados) do tipo:

$$y_t = f(t) \quad (3)$$

Modelos de séries temporais univariadas levam em conta o comportamento das variáveis ao longo do tempo. Estes modelos não se tratam, portanto, de variáveis explicativas, mas sim do estudo da evolução temporal e da evolução de uma função em que a variável dependente aparece como função de si mesma, regredida no tempo, e/ou períodos de erro, também passados (Barros, 2003).

Estocástico

Segundo Morettin e Tolo (2011), os modelos utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, ou seja, processos governados por leis de probabilidade, e qualquer que seja a classificação dos modelos de séries temporais que seja feita, pode considerar um número muito grande de modelos diferentes para descrever o comportamento de uma determinada série.

Uma série temporal é chamada estocástica se, além da função matemática do tempo, a série também contém um termo aleatório representado por:

$$y = f(t, e) \quad (4)$$

2.2.2 Decomposição de uma série temporal

A série temporal é descrita de acordo com seus componentes, onde $Z_{(t)}$ é o valor observado da série no tempo t , T_t é a componente de tendência, S_t é a componente sazonal e ϵ_t é o erro aleatório (Morettin e Tolo, 1987). As séries temporais são analisadas através dos principais movimentos conhecidos como tendência, sazonalidade, ciclo e aleatoriedade, dividindo-os em componentes sistemáticos e não sistemáticos (Box *et al*, 2008).

Sistemático

São componentes que apresentam movimentos regulares.

Tendência

Segundo Makridakis *et al* (1998), a tendência de uma série temporal é a mudança gradual observada pela mudança nos valores da série ao longo do tempo, que permanece quando os componentes de ciclos, variações sazonais e aleatórias. Box *et al*(2008), compartilham do mesmo conceito quando afirma que a tendência é o componente mais importante de uma série temporal; consiste numa tendência geral que se estende por um longo período e reflecte mudanças materiais de forma bastante consistente e gradual. Isso pode ser visualizado como uma linha em torno da qual os dados variam.

Sazonalidade

A sazonalidade ocorre quando as observações ocorrem ao longo de um ano, ou seja. registados todos os meses, trimestres ou dias (Morettin e Tolo, 1987), geralmente quando o intervalo é inferior a um ano.

Segundo Makridakis *et al* (1998), as flutuações sazonais são ciclos econômicos de curto prazo (menos de um ano) e refere-se ao movimento regular ou repetido de um padrão em torno de uma linha de tendência, onde os dados da série temporal parecem seguir períodos de tempo como meses, semanas, dias, etc.

Existem dois tipos de sazonalidade: aditiva, quando a série apresenta sazonalidade mais ou menos constante, independentemente do nível global da série, e recorrente, onde a magnitude das variações sazonais varia de acordo com o nível global da série (Ehlers , 2009).

Ciclo

Fáveron *et al*. (2003), o componente cíclico é a parte da série temporal que representa o movimento da tendência ao longo do tempo; pode ser detectado entre observações superi-

ores a um ano. As flutuações cíclicas, de acordo com Murteira e Black (1983), expressam os efeitos de factores excepcionais, como greves e desastres climáticos, que não podem ser previstos e, portanto, incluídos no modelo.

Os ciclos podem ou não ser periódicos, o que significa que podem ou não seguir padrões semelhantes após períodos iguais (Makridakis *et al*, 1998).

Aleatoriedade

Segundo Parzen (1972), um fenómeno aleatório que se refere a um processo definido pela lei da probabilidade durante um período de tempo é chamado de processo estocástico. A aleatoriedade, também conhecida como erro residual, é um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com variância e média constante, muitas vezes zero, e caracterizadas por sua curta duração e intensidade variável (Ehlers , 2009).

2.2.3 Estacionaridade

Uma das suposições mais comuns feitas sobre uma série temporal é que ela é estacionária, ou seja. ele evolui aleatoriamente em torno de uma média constante ao longo do tempo, reflectindo uma espécie de estabilidade de equilíbrio (Morettin e Tolo, 2011)

Se a série temporal não for estacionária, segundo Tsay (2005), seu comportamento só poderá ser estudado no período observado, é mais comum que as séries se comportem de forma errática e possam crescer ou diminuir ao longo do tempo, especialmente no sector financeiro.

“Um simples exame de algumas das variáveis mais comuns, como preço, produto nacional, rendimento, vendas, consumo, investimento e muitas outras, mostra que as suas variações representam um comportamento de desenvolvimento não estático ao longo do tempo” (Fischer, 1982).

De acordo com Brooks (2008), se uma série não é estacionária, geralmente é possível transformá-la em outra estacionária por alguma técnica adequada.

Segundo Morettin (2004), uma série estacionária como uma variável cujos valores não são continuamente influenciados por termos de erro em observações passadas. Um exemplo simples é um processo com ruído branco.

$$y_t = \epsilon_t \tag{5}$$

t representa o tempo, y é a variável dependente e ϵ é uma variável aleatória não correlacionada com média 0 e variância constante $var(\epsilon_t) = \sigma^2$.

$$y_t = f_t + \epsilon_t \quad (6)$$

onde:

- y_t representa o valor de y no tempo t .
- f_t representa uma função determinística no tempo t .
- ϵ_t representa um termo de erro ou ruído aleatório no tempo t .

Uma variável não estacionária é uma variável cujo valor actual é afectado por termos de erro em observações anteriores. Um exemplo clássico é um passeio aleatório.

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t \quad (7)$$

Existem muitos testes diferentes para identificar a não estacionariedade, sendo os mais populares os testes Dickey-Fuller e Phillips-Perron. Porém, foi desenvolvido para analisar sequências individualmente. Em outras palavras, há uma limitação na suposição ou na suposição de que as unidades em análise tenham um comportamento específico (Harvey, 1989).

Transformações

Como a estacionariedade da série é geralmente assumida na análise estatística de séries temporais, é usual fazer transformações da série original para obter uma série estacionária.

Segundo Morettin e Tolo (2011), como a maioria dos métodos de análise estatística de séries temporais assumem que elas são estacionárias, os dados brutos devem ser transformados caso não formem uma série estacionária. Uma razão para transformar os dados originais é estabilizar a variância.

2.2.4 Modelos de Séries Temporais

Os modelos de séries temporais são classificados de acordo com o número de parâmetros envolvidos.

1. Modelo de parâmetros: caracterizado por um número finito de parâmetros e a análise é realizada no domínio do tempo. Os modelos comumente usados incluem modelos de erro (ou regressão), modelos autorregressivos e de média móvel (ARMA), modelos de memória de longo prazo (AFIRMA), modelos estruturais e modelos não lineares.

2. Modelo não paramétrico: caracterizado por um número infinito de parâmetros. Os modelos mais utilizados são a função de autocovariância (ou autocorrelação) e a transformada de Fourier, o espectro.

2.2.5 Modelo Autorregressivo Integrado de Médias Móveis

Modelo Autoregressivo

Para usar o modelo ARIMA, primeiro especifique a análise de série do modelo ARIMA que se ajusta aos seus dados. Para seleccionar o modelo apropriado, o método de estimativa mais comum é a autocorrelação e a autocorrelação parcial.

O modelo AR(1) é um modelo autorregressivo de ordem $p = 1$ que assume grande importância, em que a série temporal X_t definido por:

$$X_t = \phi_1 x_{t-1} + a_t \quad (8)$$

Onde:

- ϕ_1 – parâmetro auto-regressivo de ordem 1;
- x_{t-1} – série de tempo desfasado um período;
- a_t – termo do erro do modelo.

Modelos de média móvel

Diz-se que um processo linear $x_{t,t} \in z$ é um processo de média móvel de ordem q , e designa-se por MA(q), se satisfaz a seguinte equação de diferenças:

$$X_t = \alpha_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (9)$$

Modelos autorregressivos e de médias móveis

Os modelos autorregressivos e de médias móveis designam-se por ARMA(q,p) e são a junção dos modelos AR e MA e podem representar-se por:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \alpha_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (10)$$

O modelo ARMA(1,1) é um dos que mais se utiliza, pelo que:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (11)$$

Modelos Autorregressivo Integrado de Médias Móveis

Os modelos ARIMA são modelos estatísticos lineares para análise de séries temporais. A abreviação ARIMA em inglês significa “Auto-Regressive Integrated Moving Average Model”, ou seja, auto-regressivo, integrado e médias móveis. Os termos auto-regressivos correspondem a defasagens da série e as médias móveis são as defasagens dos erros aleatórios.

Os modelos ARIMA (p, d, q) são um tipo de modelo para previsão de séries temporais que não são constantes, mas podem ser variáveis. A defasagem da série de variância resultante da equação de previsão é chamada de termo “autoregressivo”.

O termo de erro de previsão é chamado de termo de “média móvel”, e a série temporal que deve ser dividida para ser constante é chamada de saída de “entrada” da série de transmissão.

Ao verificar um gráfico de série temporal, se os dados mostrarem não estacionariedade, execute a transformação para converter a série não estacionária em uma série normal. Neste processo, os dados dos seus dados anteriores são excluídos.

Se a série aumenta a uma taxa constante, ocorre a primeira divergência, e se a série aumenta de forma não constante, ocorre a segunda divergência.

$$W_T = \nabla^d x_t = (1 - B)^d X_t \quad (12)$$

$$W_t = \alpha_1 w_{t-1} + \dots + \alpha_p w_{t-p} + a_t + \beta_1 a_{t-p} \quad (13)$$

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)a_t \quad (14)$$

Portanto, passeios aleatórios, modelos de tendências aleatórias, modelos autorregressivos e modelos de suavização exponencial (ou seja, a média móvel exponencial) são todos casos especiais de modelos ARIMA.

Considerando z_t uma série temporal não estacionária, $w_t = \Delta z_t = z_t - z_{t-1}$ será a Série diferenciada uma vez de z_t .

Assim sendo $w_t^d = \Delta^d Z_t$ Será a série temporal diferenciada d vezes de z_t .

2.2.6 Identificação de Modelos Autorregressivo Integrado de Médias Móveis.

A identificação de um modelo ARIMA é efectuada recorrendo às funções de autocorrelação (FAC) e às funções de autocorrelação parcial (FACP).

Função autocorrelação

Nalguns modelos, nomeadamente os AR(p), MA(q) e ARMA (p, q), pode-se encontrar características especiais das FAC que permitem optar pela sua escolha:

1. Se a FAC for infinita em extensão e a decrescer como uma função exponencial e/ou função sinusoidal amortecida, possível a opção pelo modelo AR(p);
2. Se a FAC for finita e apresenta um corte após a defasagem q, possível a opção pelo modelo MA(q);
3. Se a FAC for infinita e decresce com características exponenciais e/ou sinusoidais amortecidas após a defasagem (q, p), possível a opção pelo modelo ARMA (p, q).

Com a estimação das FAC pode-se encontrar um padrão que se identifique com algum modelo em particular, sendo mais eficaz para identificar em particular os modelos MA(q).

Uma FAC r_j é estimada por:

$$r_j = \frac{g_j}{g_0}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (15)$$

Sendo g_j uma estimativa da FAC definida por:

$$g_j = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-j} [(X_t - \hat{X})(X_{t+j} - \hat{X})], \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (16)$$

Em que \hat{X} é a média da amostra definida por:

$$\hat{X} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_t \quad (17)$$

Função autocorrelação parcial

Esta função corresponde à correlação de X_t e X_{t+k} em que se retira o efeito das observações $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t+k-1}$, e é denotada por ϕ_{kk} e tem a seguinte expressão:

$$\phi_{kk} = Cor(X_t, X_{t+k} | X_{t+k}, \dots, X_{t+k-1}) \quad (18)$$

A FACP é útil para identificar modelos AR puros ou da parte AR de um processo ARMA (p,q), não sendo útil para identificar modelos MA e ARMA.

2.3 Volatilidade

Segundo Hull (2018), a volatilidade calculada pelo desvio padrão anual pode ser feita a partir de dados diários, mensais ou trimestrais, mas é importante compreender como a escolha da periodicidade dos dados impacta a interpretação e a comparação dos resultados.

Ainda segundo o mesmo, ele afirma que a razão para a volatilidade ser frequentemente calculada com base no desvio padrão diário e, em seguida, anualizada, é para garantir que a métrica seja comparável independentemente da frequência dos dados.

Segundo Fama (1965), a volatilidade mede o risco de possuir um activo num mercado financeiro durante um período de tempo, medindo a dispersão dos seus retornos e do próprio mercado em geral. Percebe-se que quanto maior o valor encontrado, maior será a volatilidade e maior será a incerteza, e vice-versa. A fórmula de cálculo é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (19)$$

Em que, σ é o desvio-padrão, \bar{X} a média aritmética de X_t e n o número de observações. Com o resultado obtido é sempre possível calcular a volatilidade para outros períodos de tempo, tendo em consideração a base de calendário.

Existem assim três tipos de volatilidade:

- Histórica ou Estatística;
- Implícita;
- Futura ou Previsional.

2.3.1 Volatilidade Histórica ou Estatística

A volatilidade histórica ou estatística mede as flutuações de preços que ocorreram no passado e é frequentemente utilizada como medida do risco global de um activo financeiro (Fama, 1970).

Segundo Hull (2018), a maneira mais simples de calcular isso é calcular o desvio padrão dos retornos cíclicos do activo ao longo do período antes de a volatilidade ser prevista. Quanto maior a volatilidade, maior a incerteza, lembre-se que a volatilidade não é uma direção mas sim um indicador porque a mudança só pode ocorrer neste comportamento, não na repetição (Jorion, 2003).

Segundo Markowitz (1959), a volatilidade histórica ou volatilidade estatística apenas indica o que aconteceu no passado e não é linear com o que acontecerá no futuro, é simplesmente uma tentativa de estimar a volatilidade futura.

2.3.2 Volatilidade Implícita

Segundo Black e Scholes (1973), a volatilidade implícita é a volatilidade incorporada no preço de um activo, ou seja, o sentimento actual do mercado em relação a um determinado activo.

Segundo Jorion (2003), a volatilidade implícita é um conceito que se aplica apenas a contratos de opções e mostra o interesse do mercado na volatilidade das opções. Segundo Hull (2018), este é um método muito útil quando você está tentando entender exactamente como o mercado se sente em relação a um activo subjacente em um determinado momento ou quando deseja comparar diferentes resultados no mercado de acções e escolher preços em datas diferentes.

Segundo Black e Scholes (1973), a volatilidade implícita está em constante mudança e está intimamente ligada aos preços das opções porque à medida que a volatilidade implícita aumenta, os preços das opções aumentam e vice-versa.

Segundo Couto *et al.* (2003), a volatilidade implícita é crucial porque dá uma ideia de como o mercado se sente em relação a um activo específico em um momento específico.

2.3.3 Volatilidade Futura ou Esperada

Segundo Hull (2018), a volatilidade futura ou esperada leva em consideração a incerteza sobre o futuro e é, portanto, mais complexa de estimar porque é difícil estimar o preço do activo subjacente durante o período escolhido até a expiração.

Segundo Markowitz (1952), a gestão eficaz da carteira exige uma boa previsão dos movimentos dos preços dos activos no mercado, uma vez que mercados mais complexos exigem uma previsão de maior volatilidade do que os mercados normais.

Segundo Fama (1970), para realizar uma análise mais ampla e obter um ponto de partida para estimar a volatilidade futura, podem ser utilizados valores de volatilidade histórica e de volatilidade implícita para chegar a valores que sirvam de ponto de partida para uma análise que tenta prever o futuro possível.

Segundo Nelson e Siegel (1987), vários métodos para determinar os valores de volatilidade foram propostos, mas não existe um único método correto para usar, normalmente, é utilizada uma variação do modelo da classe ARCH.

2.4 Modelos de Volatilidade

Segundo Epapha (2017), os modelos de volatilidade têm sido objecto de muita investigação ao longo dos anos porque não são diretamente observáveis no mercado, não podem descrever o comportamento do mercado e reduzir a incerteza.

Segundo Pinho et al. (2011), a volatilidade representa as características básicas dos mercados financeiros, como análise de retorno de activos, gestão de risco de activos financeiros, etc. Isto aumentou o interesse dos investigadores em encontrar modelos de volatilidade que possam ser utilizados para modelação e previsão de volatilidade.

Segundo Nelson e Siegel (1987), estes modelos pretendem demonstrar os factos estilizados mais importantes sobre a volatilidade, tais como o impacto assimétrico de boas e más notícias, a persistência, a mudança e o impacto de variáveis exógenas. Portanto, é possível encontrar na literatura métodos para explicar o comportamento de flutuação utilizando modelos de heteroscedasticidade condicional, bem como reconhecer vantagens e desvantagens.

2.4.1 Modelo Autoregressivo Heteroscedasticidade Condicional

Partindo do princípio de que a volatilidade é previsível e depende do factor tempo. Engle (1982), introduziu o modelo ARCH, que descreve mudanças dinâmicas na variância condicional como funções determinantes quadráticas de retornos passados.

Embora o modelo ARCH seja relativamente simples de definir, uma das suas desvantagens é que requer muitos parâmetros para descrever adequadamente a evolução da volatilidade (Tsay, 2005).

Segundo Mandelbrot (1963), as séries financeiras apresentam presença de volatilidade condicional, o que é confirmado pela não linearidade das séries temporais, o que significa que podem ser analisados utilizando modelos ARCH (modelos com heteroscedasticidade restrita) e problemas estocásticos.

Segundo Bollerslev (1986), os modelos ARCH são adequados para modelar taxas de câmbio porque podem combinar períodos intercíclicos e estacionários com as suas distribuições sem pico.

Segundo Engle (1982), a utilização dos resultados ARCH em séries temporais é possível prever a variância condicional e que a curtose da série diminui à medida que os preços se acumulam ao longo do tempo no caso estudado, isso ocorre quando os pagamentos

semanais são adicionados aos pagamentos mensais.

Segundo Mandelbrot (1963), o modelo ARCH, defendeu, daí em diante, uma nova forma de modelar o comportamento dos rendimentos dos activos financeiros, que se baseava na existência de sucessões cronológicas não lineares, ou seja, heteroscedasticidade condicionada à verificada no passado imediatamente anterior.

Segundo Tsay (2005), a mencionada heteroscedasticidade pode ser condicionada ou não condicionada, sendo que, heteroscedasticidade condicionada significa que a sua variância depende do passado, e, heteroscedasticidade não condicionada significa que a sua variância não depende do histórico, pode mudar ao longo dos tempos.

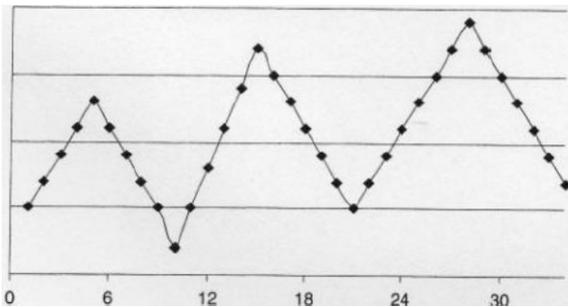


Figura 1: Processo com Homocedasticidade

Fonte: Ferreira (2009)

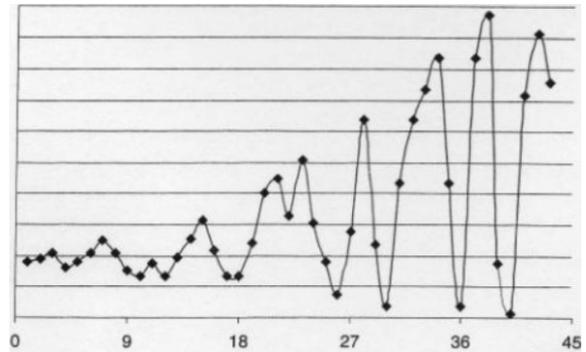


Figura 2: Processo com Heteroscedasticidade

Fonte: Ferreira (2009)

O modelo ARCH pode ser representado com a fórmula base seguinte:

$$E(X_t|F_{t-1}) = \mu + \sum_{i=1}^q \phi_i * X_{t-1} + a_t \quad (20)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i * a_{t-1}^2 \quad (21)$$

Onde:

$$E[a_t] = 0$$

$$Var[a_t] = 1$$

$$a_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_a^2)$$

Sendo $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, q)$ a condição necessária para satisfazer a condição de estacionariedade, é a soma todos os parâmetros deve ser menor que 1.

σ_t^2 é a variância de erro de previsão condicionada pela informação passada e representa

um processo ARCH (q). De acordo com Bera e Higgins (1993), quanto maior for o valor de q , mais longos tenderão a ser os episódios de volatilidade.

Este modelo apresenta, no entanto, algumas limitações nos seus pressupostos, sendo que Tsay (2005) descreve algumas das principais que foram referidas por Brooks (2002):

- Inexistência de uma metodologia definida para determinar de forma correta o número máximo de defasamentos no sentido de captar a volatilidade do processo;
- Possível necessidade de um número elevado de defasamentos para captar todas as dependências da variância condicionada o que resulta num modelo não parcimonioso;
- Possibilidade de violação das restrições de não negatividade: de facto se tudo o resto constante quanto mais parâmetros se introduzem no modelo, mais provável se torna obterem-se coeficientes estimados negativos.

Bollerslev (1986), indica também como uma das principais limitações do modelo ARCH, a tendência para sobreavaliar os efeitos da persistência nas observações, demonstrou se também que não seria viável para captar o efeito alavanca, uma importante característica nas rendibilidades; o facto de que os modelos ARCH e seus derivados serem modelos estatísticos e não económico ou financeiros, o que pela sua complexidade podem revelar-se que nem sempre são apropriados.

De modo a ultrapassar algumas destas limitações foi desenvolvido o modelo GARCH que segue-se com a respectiva análise.

2.4.2 Modelo Heteroscedasticidade Condicional Autoregressiva Generalizada

O Modelo GARCH – Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic constitui uma generalização do modelo ARCH, sugerido por Bollerslev (1986).

Bollerslev (1986) propôs o modelo GARCH baseando-se em extensões consideradas fundamentais e eficientes para definirem mudanças de variâncias nas séries temporais financeiras. Os modelos de volatilidade podem ser utilizados para calcular a volatilidade futura de activos financeiros, seja com o objectivo de especulação ou com o objectivo de cobertura de risco (hedge).

Segundo Bollerslev (1986), os modelos GARCH podem proporcionar avaliações correctas para os parâmetros na amostra se o instrumento de medida de volatilidade for adequado, orientando a boas estimativas de volatilidade.

No modelo GARCH a variância condicionada é parametrizada como uma função linear

dos quadrados dos erros passados e das variâncias condicionadas passadas. O modelo GARCH pode ser apresentado com a seguinte fórmula:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (22)$$

Onde:

q – grau de processo ARCH

p – grau de processo GARCH

$a_t = \epsilon_t \sigma_t$

Se $p = 0$, então o modelo GARCH (q, 0) é equivalente ao modelo ARCH (q).

Então, para que o modelo tenha covariância estacionária e, como tal, variância incondicional ou uma tendência de convergência, é necessário que se verifiquem as seguintes condições:

$\alpha_0 > 0$

$\alpha_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, q)$

$\beta_j \geq 0, (i = 1, 2, \dots, p)$

As reservas de desigualdade garantem que a variância condicionada não é negativa. Existindo a hipótese de ser considerada a variabilidade dos rendimentos do período corrente em função da volatilidade dos períodos anteriores, a variabilidade é considerada condicionada. Sendo assim, poderá verificar-se que o nível da volatilidade actual esteja positivamente correlacionado com o nível de volatilidade dos períodos imediatamente anteriores (Brooks, 2002).

Tsay (2005), estes tipos de modelos possibilitam captar factos estilizados tradicionalmente relacionados a dados de natureza económica e financeira, como por exemplo, a presença de fat tails na distribuição empírica das rendibilidades, o fenómeno dos clusters de volatilidade ou da não linearidade do seu comportamento e as alterações na capacidade de previsão. O termo fat tails designa distribuições com caudas fortemente leptocúrticas.

O termo clusters de volatilidade define-se pelo facto de períodos de grande volatilidade existirem seguidamente a outros períodos de grandes oscilações, da mesma maneira que períodos de pequena volatilidade, ou seja, períodos de pequenas alterações nos preços, são consecutivamente seguidos de períodos de modificações de reduzida dimensão dos mesmos (Campbell *et al.*, 1997).

Pinho *et al.* (2011) refere como vantagem dos modelos GARCH o facto de os mesmos permitirem na gestão de risco uma previsão de um dia para a variância, ou seja, esta é a dada diretamente pelo modelo como σ_{t+1}^2 ; possibilitando assim, através de um raciocínio análogo, para a previsão de k dias mais à frente, usando somente a informação disponível no final do dia actual.

Apesar de este modelo conjugar diversas características observadas nas séries históricas, também este modelo, possui mais e menos valias sendo de maior foco as seguintes:

- O facto de não capacidade para modelar o efeito de assimetria, que é observado com grande frequência, quando diferentes volatilidades são registadas nos casos de “boas notícias” ou de “más notícias”;
- A não existência de uma estrutura assimétrica para a volatilidade gera distribuições enviesadas e com curvatura de volatilidade (skewed distributions) para os preços provisionais.

Sendo o efeito assimétrico uma das limitações dos modelos ARCH e GARCH, nestas condições, será melhor considerar um modelo em que a volatilidade apresente reações assimétricas para valores positivos ou negativos da variável residual.

O modelo GARCH tem duas grandes limitações:

- Considera apenas a magnitude das variações das taxas de rendibilidade (e não o seu sinal) na variância condicionada;
- Restringe o sinal dos parâmetros de modo a que sejam sempre positivos, pelo que σ_t^2 é sempre maior ou igual a zero - a restrição de não-negatividade dos parâmetros significa que um aumento de a_t^2 implica sempre um aumento de σ_{t+m}^2 para $m \geq 1$, não tendo em conta qualquer comportamento oscilatório de σ_t^2 .

Para corrigir as limitações apresentadas do modelo GARCH, serão consideradas outras especificações para modelar o efeito assimétrico na variância condicionada (boas e más notícias têm um impacto diferente na volatilidade), GJR-GARCH e EGARCH.

2.4.3 Modelo Exponencial Autoregressivo Generalizado Heteroscedasticidade Condicional

Como referido anteriormente, os modelos já estudados possuem a limitação de não conseguirem captar a influência assimétrica dos retornos, na modelação das séries financeiras, havendo ainda o facto de que, os coeficientes do modelo não devem ser negativos.

Segundo Nelson (1991), estas características relativamente aos coeficientes garantem que

a formulação da variância não permaneça não negativa com a probabilidade igual a um. Acontece porém que esta condição não é cumprida e deste modo dificulta bastante a estimação dos parâmetros.

Para que fosse possível ultrapassar as dificuldades dos modelos anteriormente demonstrados, Nelson (1991), introduz o modelo EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic). Este modelo é introduzido com o fim de ter a capacidade de descrição das diferentes respostas da taxa de rentabilidade aos choques positivos e negativos, sem necessidade de qualquer restrição paramétrica. Este modelo é expresso pela equação onde a variância condicionada, σ_t^2 , é uma função assimétrica dos valores passados de u_{t-i} , ou seja:

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left(\frac{|a_{t-i}|}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{i=1}^p \gamma_i \left(\frac{a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right) \quad (23)$$

Onde,

α_0 – Valor constante;

$\beta_i, \alpha_i, \gamma_i$ – Parâmetros do modelo;

a_{t-i} – Representa os termos erros passados no tempo $t-i$;

σ_{t-i} - Desvio padrão observado $t-i$.

Pinho et al. (2011) argumentam que se γ é um parâmetro que indica assimetria, então se:

- $\gamma < 0$ Um choque negativo elevaria a volatilidade dos retornos;
- $\gamma > 0$ Um choque positivo reduziria a volatilidade dos retornos;
- $\gamma = 0$ Um choque positivo tem o mesmo efeito na volatilidade dos retornos que um choque negativo da mesma magnitude.

O modelo EGARCH garante que a variância é sempre positiva porque é expressa em logaritmos, o que é um factor favorável. Contudo, a desvantagem é que a mudança futura esperada após o período não pode ser calculada analiticamente. Os EGARCH apresentam variações significativas em relação aos modelos GARCH (Tsay, 2005), Isto é:

1. Uma característica diferenciada do modelo EGARCH em relação ao modelo GARCH é a observação empírica de que um impacto adverso no período t_1 exerce uma influência mais significativa na variação do período t do que um impacto positivo.
2. Os modelos EGARCH empregam o logaritmo natural da variância condicional de σ_t^2 para flexibilizar a restrição dos modelos GARCH, que exigem que os coeficientes do modelo sejam positivos.

No estudo realizado por Malmsten e Terasvirta (2004), foi evidenciado que o modelo assimétrico EGARCH(1,1) com resíduos u_t distribuídos de forma normal não é adequado para descrever de maneira adequada processos com alta curtose e uma autocorrelação que decai lentamente.

2.4.4 Modelo Glosten Jagannathan Runkle Heteroscedasticidade condicional autoregressiva generalizada

O modelo GJR-GARCH, da autoria de Glosten *et al.* (1993), é similar ao GARCH contemplando apenas a adição de um termo relativo à assimetria.

Este modelo assume uma forma paramétrica específica para esta heteroscedasticidade condicional. Mais precisamente, o modelo GJR-GARCH modela a variância condicional σ_t^2 , onde $a_t = \sigma_t \epsilon_t$, onde ϵ_t é um ruído branco com distribuição gaussiana padrão:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_k a_{t-k}^2 I_{t-1} \quad (24)$$

O valor de I estará dependente do sinal de erro, assim: não-negatividade

$$\begin{cases} 1 & \text{se } a_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{se } a_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

Este modelo impoe as seguintes restricoes de não-negatividade:

$$\alpha_0 > 0, \quad \delta_1 > 0 \quad \text{e} \quad \delta_1 + \gamma_1 \geq 0$$

Assumir que z_t é gaussiano não significa que os retornos sejam gaussianos. Embora sua distribuição condicional seja gaussiana, sua distribuição incondicional pode apresentar curtose excessiva (caudas gordas). Na verdade, a suposição de que a distribuição condicional é gaussiana não é tão restritiva quanto parece: mesmo que as distribuições verdadeiras sejam diferentes, as chamadas estimativas de quase máxima verossimilhança permanecem consistentes sob condições de normalidade bastante moderada.

Além dos picos de retorno, os modelos GJR-GARCH, tal como os modelos GARCH, também capturam outros factos estilizados em séries temporais financeiras, como o agrupamento de volatilidade. Se a volatilidade também for alta no t , então é mais provável que a volatilidade seja alta no $t - 1$. Outra maneira de ver isso é observar que um choque no momento $t - 1$ também afecta a variação do momento t . No entanto, se $\alpha + \frac{\gamma}{2} + \beta < 1$, a própria volatilidade reverte para a média e se move em torno de σ (a raiz quadrada da

variação incondicional).

$$\sigma_{r_t}^2 = Var(r_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha - \frac{\gamma}{2} - \beta} \quad (25)$$

Onde, γ vezes $\frac{1}{2}$ resulta da hipótese de normalidade de z_t . De forma mais intuitiva, assume-se que a distribuição condicional dos retornos é simétrica em relação a a .

2.5 Estimação de Modelos

Considerando o que foi dito sobre os modelos ARCH e GARCH, ainda é importante compreender como estes modelos podem ser implementados e estimados.

Um modelo de regressão com termos de erro que possuem as propriedades dos modelos do tipo ARCH e GARCH pode ser calculado por método dos mínimos quadrados (MMQ) onde os estimadores são lineares.

No entanto, existe um estimador não linear, método máxima verossimilhança (MMV), que é mais eficiente do ponto de vista estatístico porque é mais eficiente no universo de grandes amostras.

Segundo Engles (1982), o modelo ARCH possui uma característica especial que o distingue porque permite detectar a presença de heterocedasticidade condicional nos resíduos antes que seja necessário estimar o próprio modelo.

2.5.1 Método dos Mínimos Quadrados

Utilizando MMQ ou Ordinary Least Squares (OLS), é possível testar a presença de efeitos ARCH, considerando a seguinte expressão:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t \quad (26)$$

Para confirmar a hipótese de ausência de efeitos ARCH, os quadrados dos resíduos a_t^2 devem ser aplicados a uma regressão com os valores passados de q $a_{t-1}^2, a_{t-2}^2, \dots, a_{t-q}^2$ (e o termo independente),

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q a_{t-q}^2 \quad (27)$$

Em relação à hipótese nula $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$, há ausência de efeito ARCH, o teste estatístico é dados pela fórmula:

$$nR^2 \cap \chi_q^2 \quad (28)$$

Onde,

n é o número de observações ou tamanho da amostra.

R^2 é o coeficiente de determinação

Se a estatística nR^2 for significativamente maior que o limite de 5% chi-quadrado com q graus de liberdade, a hipótese nula deve ser rejeitada a favor da alternativa de que os erros sofrem de factores de heterocedasticidade condicional.

2.5.2 Método da Máxima Verossimilhança

Engle (1982), Bollerslev (1986) e Hamilton (1994) sugeriram método Máxima Verossimilhança (MMV) como o método de estimação mais apropriado.

As estimativas de MMV podem ser obtidas a partir da equação de regressão, onde os resíduos representam o comportamento dado no modelo ARCH, tipo equação (20) e equação (21).

Para um modelo ARCH(q) com erros normalmente distribuídos, a função de log-verossimilhança condicional é:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\log(\sigma_t^2) + \frac{a_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (29)$$

onde:

- $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)$ é o vetor de parâmetros
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2$ (equação ARCH)
- $a_t = X_t - \mu - \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}$ (resíduos do modelo de média, se AR(p) estiver presente)
- n é o número de observações

2.6 Critérios de Selecção de Modelos

Segundo Harrell (2001), seleccionar o melhor modelo de um conjunto de modelos candidatos pode ser bastante complexo. Uma abordagem alternativa consiste em considerar todas as combinações possíveis de termos do modelo completo e de parâmetros múltiplos e em utilizar critérios de selecção de modelos baseados na teoria da informação (Tsay, 2005).

2.6.1 Critério Informação de Akaike

Para a escolha do modelo, Akaike (1973) desenvolveu o Critério de Informação de Akaike (AIC), que deriva da minimização da informação de Kullback-Leibler (KL).

Akaike (1973) desenvolveu um estimador de informação KL baseado na função log-verossimilhança (LLF) e numa penalização dependente do número de parâmetros do modelo. Esta evolução pode ser observada, por exemplo, em Burnham e Anderson (2002), que recomendam a utilização do AIC para a selecção do modelo apenas se o número de observações n for pelo menos 40 vezes superior ao número de parâmetros.

Um critério de informação normalmente utilizado na selecção de modelos é o Critério de Informação de Akaike (AIC) (Akaike, 1973).

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^n \ln L(\hat{y}_i, y_i) + 2 * p \quad (30)$$

Onde y_i é o i - ésimo valor da resposta e \hat{y} é a estimativa de y_i , quando se ajusta um modelo de p parâmetros por meio da maximização.

Dada a distribuição normal da resposta, a expressão do AIC pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$AIC = n \ln(\hat{\sigma}_p^2) + 2(p + 1) \quad (31)$$

em que $\hat{\sigma}_p^2$ é o estimador de máxima verossimilhança da variação do erro.

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad (32)$$

McQuarrie e Tsay (1998) dividem o AIC pelo número de observações (n) para o exprimir em forma de escala.

$$AIC = n \ln(\hat{\sigma}_p^2) + \frac{2(p + 1)}{n} \quad (33)$$

2.6.2 Critério de Informação Bayesiano

O critério de informação bayesiano, sugerido por Schwarz (1978), tinha sua origem na informação de Kullback-Leibler.

Conforme observado por Konishi e Kitakawa (2008), suponha que o modelo latente seja M_1, M_2, \dots, M_r , onde cada modelo M_i possui uma distribuição de parâmetros $f_i(x|\theta_i)$ e uma distribuição a priori, $\pi_i(\theta_i)$, a dimensão de i em que o vector parâmetro θ_i é k . Seja o grupo $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ com n observações, a distribuição marginal de x para cada

modelo M_i dada por.

$$\int f^{(i)}(x|\theta_i)\pi_i(\theta_i)d\theta_i \quad (34)$$

Esta soma pode ser considerada uma probabilidade para o modelo M_i .

Dada a probabilidade a priori do i – ésimo modelo $P(M_i)$, utilizando o teorema de Bayes, a probabilidade posterior é

$$P(M_1|x) = \frac{P(x|M_1)P(M_1)}{\sum_{j=1}^r P(x|M_j)P(M_j)} \quad (35)$$

com $i = 1, 2, \dots, r$.

De acordo com Konishi e Kitakawa (2008), a probabilidade posterior representa a probabilidade de o i – ésimo modelo produzir dados quando x dados são observados. Se for seleccionado um modelo de entre r modelos, será utilizado o modelo com a probabilidade posterior mais elevada. Deste modo, o BIC é definido como:

$$BIC = -2 \ln L(\hat{\theta}) + k \ln(n) \quad (36)$$

em que X é o estimador MV de V , k é o número de parâmetros do modelo e n é o número de observações.

Por conseguinte, entre r modelos, o melhor modelo é classificado como aquele que apresenta o valor BIC mais baixo.

2.7 Medidas de Acurácia

Diferentes métodos de previsão podem ser aplicados a uma mesma série temporal, sendo necessário avaliar qual o método que melhor se ajusta à curva característica dos dados para que seja o mais adequado ao processo de previsão. Para isso, o erro é calculado para cada intervalo de tempo através da equação (Epaphra, 2017).

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad (37)$$

Onde e_t é igual ao erro durante o período t , y_t é igual ao valor observado durante o período t e \hat{y}_t é igual ao valor previsto para esse período.

Armstrong e Collopy (1992), delinearam várias medidas de exatidão, as mais importantes das quais são a raiz do erro quadrático médio (RMSE), o erro absoluto médio (MAE) e o

erro quadrado médio (MSE), definidos pelas equações.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (38)$$

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (39)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (40)$$

Segundo Epaphra (2017), o modelo adequado é aquele que apresenta menores erros, independentemente do método de medição utilizado para os cálculos. Além disso, deve-se lembrar que a precisão do método diminui à medida que o horizonte de previsão aumenta, pois as previsões não são capazes de captar os efeitos dos factores aleatórios (Tubino, 2017).

Segundo Armstrong e Collopy (1992), uma vez seleccionado e implementado um modelo de previsão, a validade das previsões resultantes deve ser monitorizada através de indicadores de precisão e de desempenho, e a sua validade para o cenário actual deve ser confirmada a fim de a actualizar e garantir a fiabilidade das previsões.

Atendendo à importância da previsão para as organizações, a precisão é um dos indicadores mais importantes para avaliar os métodos de previsão disponíveis e garantir a maior precisão dos resultados (Tubino, 2017).

2.8 Valor em Risco

Segundo Jorion (2003), valor em risco resume a perda esperada do pior caso ao longo do tempo e o intervalo de confiança, isto é, uma medida da probabilidade máxima de perda de uma determinada carteira (ou activo) com precisão estatística, dado um intervalo de temporal.

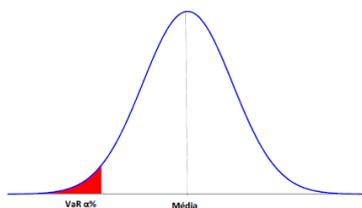


Figura 3: VaR de uma distribuição Normal com grau de confiança de $(1 - \alpha)\%$
Fonte: Morgan (1999)

Para mostrar o valor p da distribuição das variações dos preços dos activos, na verdade determina-se o quantil pela distribuição dos retornos. O valor unitário monetário do VaR é obtido multiplicando o valor da situação financeira pelo VaR do log do retorno. No caso das posições vendidas em VaR, o valor de risco do comprimento da posição é especificado para o lado direito da função de distribuição (Morettin, 2006).

O valor em risco (VaR) consiste na aplicação de um intervalo de confiança e de um grau de confiança a uma gama de retornos em que ocorre um determinado nível de perda financeira.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq VaR) &= 1 - \alpha \\
 P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaR - 0}{\tilde{\sigma}_t}\right) &= 1 - \alpha \\
 P\left(Z \leq \frac{VaR}{\tilde{\sigma}_t}\right) &= 1 - \alpha \\
 P(Z * \tilde{\sigma}_t \leq VaR) &= 1 - \alpha
 \end{aligned} \tag{41}$$

Assume-se uma distribuição normal de retornos e variâncias ao longo de um intervalo de retornos, conforme dado por um estimador de volatilidade, tal que $X_t \sim N(0, \tilde{\sigma}_t)$. Valor em risco, como a perda máxima de um activo no estante t, para o nível de confiança $1 - \alpha$.

Segundo Galdi e Pereira (2007), o VaR é amplamente utilizado pelas empresas e o método para calcular o VaR é o seguinte:

- A série temporal analisada deve permanecer estacionária;
- A série temporal dos retornos logaritmos deve seguir distribuição normal padrão.

Segundo Galdi e Pereira (2007), as principais vantagens e desvantagens da utilização do modelo VaR.

Vantagens:

- Fornece uma referência para risco de mercado de diferentes posições expostos a diferentes fontes de risco.
- Pode ser usado como um indicador de desempenho para determinar o momento do investimento.
- É utilizado para fins legais, pois estabelece requisitos de participação de capital para cobrir perdas.

Desvantagem

- As perdas futuras são previstas com base em dados históricos de volatilidade, mas no mercado financeiro ocorrem diferentes mudanças inesperadas que nunca foram vistas antes.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Material

Dados

Os dados a utilizar para este estudo referem-se às cotações diárias das acções da cerveja em Moçambique, que foram obtidas no site da Bolsa de Valores de Moçambique e abrangem o período entre 2 de janeiro de 2019 e 29 de dezembro de 2023.

Como se trata de um trabalho de modelagem e previsão de preços de ações, a metodologia adotada, em uma primeira fase, consiste na coleta de cotações diárias para o período compreendido entre 2 de janeiro de 2019 e 29 de dezembro de 2022. Esses dados são utilizados para modelar a série e realizar a previsão. Na segunda fase, serão recolhidas cotações diárias do período entre 30 de dezembro de 2022 e 29 de dezembro de 2023, estes dados são utilizados para comparar os resultados obtidos na previsão.

O tratamento dos dados foi efectuado com recurso ao Microsoft Office Excel 2007 e ao software Rstudio. O respetivo relatório será digitado utilizando o software \LaTeX .

3.2 Métodos

3.2.1 Análise descritiva

Antes de se avançar para a outras análise da série, é efetuada uma análise descritiva do preço das acções. A análise descritiva apresenta um resumo dos dados e fornece informações sobre características como a média, a mediana, a variância, o desvio padrão, assimetria, curtose, estacionaridade, normalidade e decomposição de serie. Isto facilita a compreensão da distribuição e da variabilidade dos dados.

Para verificar a normalidade da série temporal em análise, é calculado medidas como assimetria e curtose. O objectivo é verificar se a medida de assimetria é igual à 0 e a curtose é igual à 3. Para confirmar a normalidade, é realizado o teste KS (Kolmogorov-Smirnov).

O teste KS é baseado nas seguintes suposições:

- H_0 : a série apresenta uma distribuição normal;

- H_a : a série não apresenta uma distribuição normal.

Para verificar a estacionaridade da série temporal estudada, é testada a existência de raízes unitárias. O objectivo é verificar se as raízes da equação característica de uma série temporal são iguais a 1. Se isso acontecer, significa que a série temporal não é estacionária.

Para confirmar a presença de raiz unitária, é realizado, o teste ADF (Dickey-Fuller Aumentado).

O teste ADF é baseado nas seguintes suposições:

- H_0 : a série apresenta raiz unitária, sendo por isso não-estacionária;
- H_a : a série não apresenta raiz unitária, sendo por isso estacionária.

O Teste de Dickey-Fuller Aumentado (DFA) é definido pela seguinte equação:

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta Y_{t-i} + a_t \quad (42)$$

Onde:

- Y_t é a série temporal a ser testada;
- $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ representa a primeira diferença da série;
- α é o termo constante (opcional);
- βt representa uma tendência temporal (opcional);
- γY_{t-1} é o termo crítico do teste;
- $\sum_{i=1}^p \delta_i \Delta Y_{t-i}$ adiciona termos defasados para corrigir autocorrelação;
- a_t é o erro aleatório.

Após analisar os resultados e verificar a não estacionariedade da série temporal, a primeira diferenciação logarítmica é realizada utilizando a seguinte transformação:

$$r_t = \ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) \quad (43)$$

Após a primeira diferenciação logarítmica ser realizada, a série é assumida estacionária. Antes de iniciar a estimação dos modelos da série é realizada uma análise descritiva dos indicadores dos retornos.

A presença de autocorrelação entre os retornos, também é avaliada pelo teste Ljung-Box, que se baseia nas hipóteses:

- H_0 : Não há autocorrelação entre os retornos até uma determinada ordem;
- H_a : há uma autocorrelação entre os retornos até uma determinada ordem.

O teste de Ljung-Box verifica a presença de autocorrelação na série temporal. A estatística do teste é dada por:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \quad (44)$$

Onde:

- $Q(m)$ é a estatística do teste para m defasagens;
- n é o número de observações da série temporal;
- $\hat{\rho}_k$ é a autocorrelação amostral na defasagem k ;
- m é o número de defasagens consideradas.

3.2.2 Modelos

Uma vez confirmada a estacionariedade da série, os modelos ARMA-GARCH, ARMA-EGARCH e ARMA-GRJGARCH são estimados. O modelo ARMA é considerado um caso especial do modelo ARIMA(p, d, q) porque a primeira diferenciação foi realizada (o valor do parâmetro d no modelo ARIMA é 1). Portanto, o parâmetro de diferenciação não existe mais (d = 0), então o modelo ARIMA (p, 1, q) é reduzido ao modelo ARMA (p, q).

Na determinação do modelo ARMA, é considerado a sequência (p, q) que remova a autocorrelação nos resíduos. As funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) são usadas para determinar a estrutura do modelo. A ordem do teste é (3,3) e então é selecionado o modelo que apresenta o menor critério de informação de Akaike (AIC) (Akaike, 1973) e Schwarz (BIC) (Schwarz, 1978). Uma vez ajustado o modelo, realize um teste Ljung-Box nos resíduos para garantir que não existam mais autocorrelações, se ainda existirem, os controles p e q devem ser aumentados.

Após definir os valores de p e q, os parâmetros são estimados pelo método de máxima verossimilhança.

A seguir, é necessário verificar com os métodos diagnósticos se a heteroscedasticidade condicional dos resíduos do modelo ARMA é uma variância dependente (fenômeno ARCH). Para isso, são verificados o FAC e o FACP dos resíduos quadrados do modelo ARMA. A presença de heteroscedasticidade condicional é verificada pelos testes Ljung-Box e pelo

multiplicador de Lagrange, aplicando nos resíduos quadrados do modelo ARMA.

O teste Ljung-Box considera as seguintes hipóteses:

- H_0 : os coeficientes de autocorrelação dos resíduos quadrados são zero até uma determinada ordem;
- H_a : os coeficientes de autocorrelação dos resíduos quadrados são zero de ordem p .

O teste do Multiplicador de Lagrange considera:

- H_0 : Não há heterocedasticidade condicional (os resíduos têm variância constante ao longo do tempo);
- H_a : Há heterocedasticidade condicional (os resíduos têm variância constante ao longo do tempo).

A estatística de teste do Multiplicador de Lagrange (LM) para detectar heterocedasticidade condicional em um modelo ARCH é dada por:

$$nR^2 = \chi_q^2 \quad (45)$$

Onde n é o número de observações observadas e R^2 é o quadrado dos resíduos.

Rejeitar a hipótese nula significa que os erros no modelo ARMA são heteroscedásticos; não apresenta variância constante e verifica-se a presença do efeito ARCH.

Uma vez confirmada a heteroscedasticidade condicional nos resíduos, o modelo ARCH é aplicado.

A determinação da ordem do modelo GARCH, também é feita iterativamente, utiliza-se o método de máxima verossimilhança para calcular os modelos ARMA-GARCH, ARMA-EGARCH e ARMA-GRJGARCH adaptados às séries dos retornos, sequências dos modelos GARCH, EGARCH e GRJGARCH, também são determinados iterativamente, procurando sequências de m e n que minimizem os critérios de informação AIC e BIC.

Tendo estimado o modelo ARMA-GARCH, é verificado a assimetria do modelo.

A estatística de assimetria dos resíduos a_t de um modelo ARMA-GARCH é dada por:

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (a_t - \bar{a})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (a_t - \bar{a})^2\right)^{3/2}} \quad (46)$$

Onde:

- S é a estatística de assimetria (Skewness);
- a_t são os resíduos do modelo;
- \bar{a} é a média dos resíduos;
- n é o número de observações.

A curtose dos resíduos a_t de um modelo ARMA-GARCH pode ser definida por:

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (a_t - \bar{a})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (a_t - \bar{a})^2\right)^2} \quad (47)$$

onde:

- \bar{a} é a média amostral dos resíduos,
- n é o número de observações.

Após o cálculo da assimetria e curtose, é feito o teste de "sign bias" (viés de sinal) é utilizado para verificar se choques positivos e negativos têm impactos diferentes na volatilidade condicional de um modelo GARCH. Segundo Aurélio (2015), o teste de "sign bias" (viés de sinal) avalia a presença de assimetria na forma como a volatilidade impacta na notícias boas e ruins.

O teste de "sign bias" geralmente envolve a realização de uma regressão auxiliar.

$$(\sigma_t^2) = \beta_0 + \beta_1 S_{t-1}^- + \beta_2 S_{t-1}^- a_{t-1} + \beta_3 S_{t-1}^+ a_{t-1} + a_t \quad (48)$$

onde:

- σ_t^2 representa a variância condicional dos resíduos;
- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os coeficientes do modelo;
- S_{t-1}^- e S_{t-1}^+ representam indicadores de condições passadas;
- a_t é o resíduo no tempo t .

O teste é baseado nas seguintes hipóteses:

- H_0 : Os choques positivos e negativos têm o mesmo impacto na volatilidade condicional;
- H_a : Os choques positivos e negativos têm impactos diferentes na volatilidade condicional.

Após a estimativa dos modelos, são diagnosticados os resíduos dos modelos ARMA-GARCH, ARMA-EGARCH e ARMA-GRJGARCH, pois a volatilidade não é directamente observável, os resíduos dos modelos GARCH, EGARCH e GRJGARCH não podem ser calculados a partir dos valores observados. Como normalmente é feito ao modelar com modelos ARMA.

A solução é utilizar os chamados resíduos padronizados (z_t), que são obtidos pela seguinte equação:

$$z_t = \frac{a_t}{\hat{\sigma}_t} \quad (49)$$

Com:

a_t – valores dos resíduos;

t – tempo;

$\hat{\sigma}_t$ - Desvio padrão calculado;

Para verificar se os resíduos padronizados seguem uma distribuição de probabilidade especificada, um gráfico de histograma é usado para verificar se os resíduos padronizados são simétricos. O teste Jarque-Bera (Jarque e Bera, 1987) ainda é utilizado para verificar a normalidade. Após o cálculo dos resíduos padronizados, aplica-se o teste Ljung-Box ao quadrado dos resíduos padronizados.

O objectivo é verificar se o efeito ARCH persiste ou desaparece após a estimação do modelo.

O teste é baseado nas seguintes hipóteses:

- H_0 : Não há heterocedasticidade condicional (os resíduos têm variância constante ao longo do tempo);
- H_a : Há heterocedasticidade condicional (os resíduos têm variância constante ao longo do tempo).

Curvas de impacto de notícias (NIC) também são geradas para os modelos GJRGARCH e EGARCH para mostrar visualmente o impacto de boas e más notícias nos retornos.

3.2.3 Previsão

Quanto as previsões, foi usado a previsão de um passo, também chamadas de previsões estáticas. Este método envolve fazer previsões com base em todas as observações do treinamento.

O verdadeiro valor da variação é calculado como o quadrado do coeficiente dos retornos

fora da amostra, que modela a volatilidade persistente de acordo com Poon e Granger (2003).

$$y_p = r_{if}^2 \quad (50)$$

r_{if} - retornos para o teste.

Para verificar a precisão da previsão, é necessário calcular a diferença entre a variação estimada da previsão e o quadrado dos retornos da amostra para o período correspondente à previsão. Essa diferença é chamada de erro de predição, e quanto menor for, melhor porque o modelo é mais preciso.

O desempenho dos modelos na previsão é comparado utilizando o erro médio absoluto (MAE), a raiz do erro médio quadrático (RMSE) e o erro médio quadrático (MSE).

Após estimar os modelos ARMA-GARCH, ARMA-EGARCH e ARMA-GJRGARCH, o risco de investimento pode ser quantificado usando, o Value at Risk (VaR):

$$\text{VaR}_{\alpha,t} = \mu_t + \sigma_t q_\alpha \quad (51)$$

onde:

- μ_t é a média condicional estimada pelo modelo ARMA;
- σ_t é o desvio padrão condicional (volatilidade) previsto pelo modelo GARCH;
- q_α é o quantil da distribuição dos resíduos padronizados (por exemplo, normal ou t de Student) para o nível de confiança desejado.

Finalmente, calcula-se o valor em risco, afim de monitorar o risco do activo e verificar se a exposição ao risco está dentro dos limites aceitáveis. Ajuda a identificar e quantificar o risco potencial de perda no activo.

$$\text{VaR}_t = |\hat{r}_t - Z\hat{\sigma}_t| * V \quad (52)$$

Onde:

- \hat{r}_{if} - Retorno esperado para o teste;
- Z - Valor crítico;
- $\hat{\sigma}_t$ - Desvio padrão dos retornos;
- V - Valor do investimento.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentadas as fases de desenvolvimento dos modelos para a previsão dos preços das acções da CDM. Considerando a necessidade de compreender o comportamento dos preços das acções da CDM ao longo do tempo, realizou-se uma análise exploratória, com o intuito de examinar as estatísticas descritivas. Dado que se trata de uma série temporal financeira, a análise é conduzida na série dos retornos. Após a descrição da série utilizada no estudo, são estimados os modelos ARMA, ARMA-GARCH, ARMA-EGARCH e ARMA-GRJGARCH.

4.1 Resultados

4.1.1 Análise exploratória

Avança-se com apresentação de série temporal do preço das acções da CDM

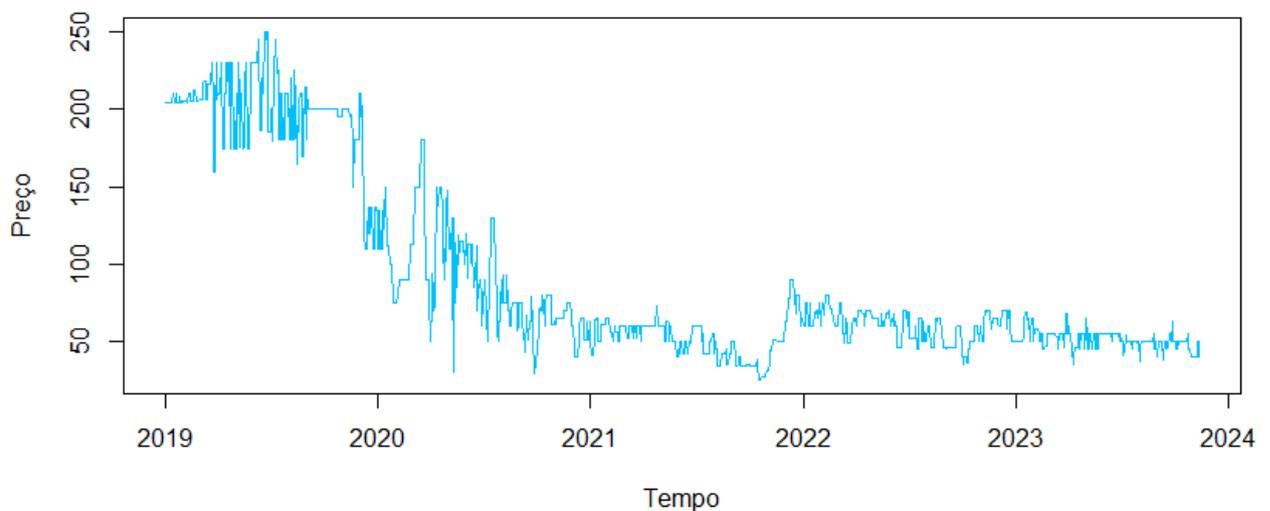


Figura 4: Série Temporal de preços das Acções da CDM

Ao analisar a série temporal de preços das acções da CDM (Figura 4), é possível identificar que em 2019, os preços estavam acima de 200 MZN com alguma volatilidade; em 2020, houve uma queda acentuada para abaixo de 100 MZN, seguida de uma tendência de queda mais moderada até 2021, quando se estabilizou. Em 2022, a volatilidade aumentou, refletindo incerteza no mercado, mas sem recuperação aos níveis anteriores. No ano seguinte, 2023, as acções permaneceram em torno de 50, com menor volatilidade, indicando estabilidade em um nível inferior.

Tabela 1: Estatísticas descritivas do preço das acções de CDM

Variável	Mínima	Máxima	Média	Desvio padrão	Variância	Assimétria
Preço(MZN)	25,50	250	90,63	59,46	3535,49	1,23

Ao verificar as estatísticas descritivas do preço das acções da CDM(Tabela 1), é notado que ao longo do período de 02 de janeiro de 2019 até 29 de dezembro 2023, o preço mínimo foi de 25,50 MZN, o preço máximo de 250,00 , a média foi de 90,63, o desvio padrão de 59,46 com variância de 3535,49 e apresenta uma distribuição assimétrica.

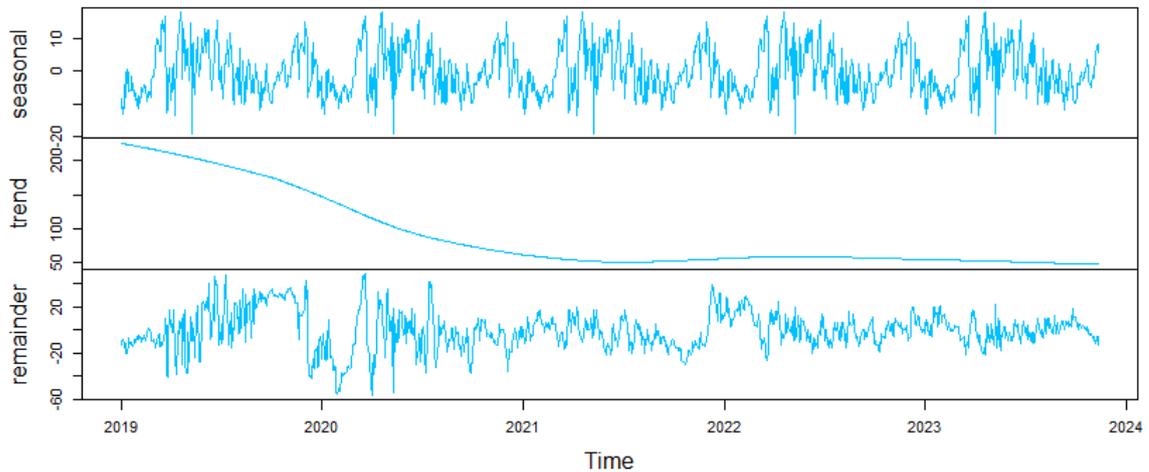


Figura 5: Decomposição de série de preços de acções

Analisando a decomposição da série de preços de acções (Figura 5), é notado que a série não apresenta ciclos sazonais, possui uma tendência decrescente ao longo do tempo e a série é um ruído branco (não apresenta nenhum padrão é puramente aleatório).

Tabela 2: Testes de Estacionariedade e Normalidade da Série Temporal do Preço das Acções

Testes	Estatísticas do teste	P-valor
Dickey – Fuller Aumentada	-2,4139	0,4031
Jarque – Bera	313,22	$< 2, 2 * 10^{-16}$

O teste de raiz unitária de Dickey-Fuller aumentado (tabela 2), revela um *p*-valor de 0,4, o qual é superior a 0,05, assim, não há evidências suficientes para tirar uma conclusão estatisticamente significativa acerca da série ser estacionaria, conforme era antecipado

devido à clara tendência decrescente observada na (figura 5). Entretanto o teste de normalidade de Jarque-Bera (tabela 2), revela um p – valor menor que $2,2 * 10^{-16}$, assim, não há de evidências suficientes para tirar uma conclusão de que a série segue distribuição normal, o que também é evidente pois a série é um ruído branco e apresenta tendência decrescente ao longo do tempo observada na (figura 5).

Análise da série de log-retornos

Deste modo, inicia a análise da série dos log-retornos, pois não foi verificado a estacionariedade no preço das acções da cerveja de Moçambique.

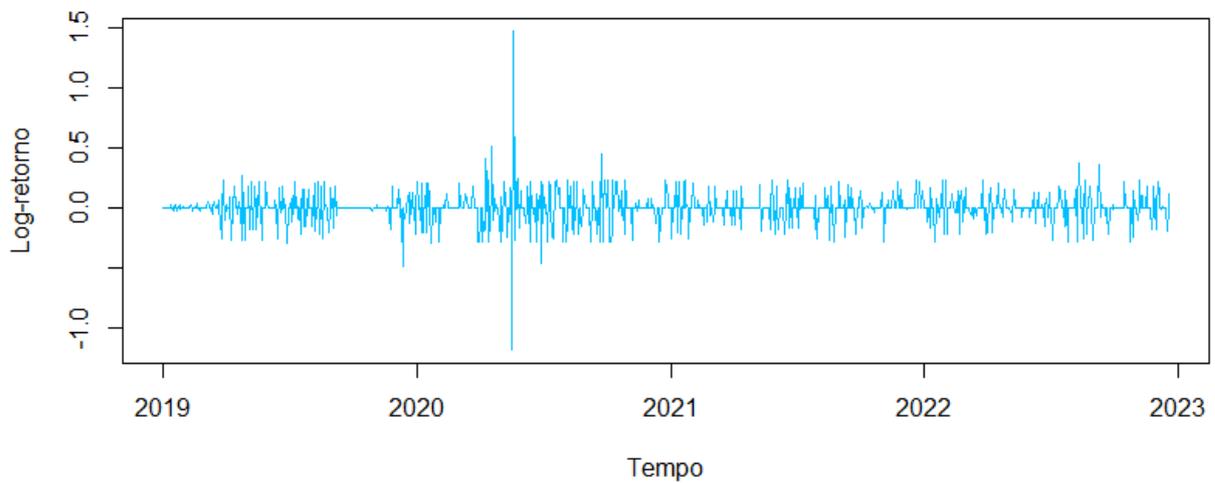


Figura 6: Série Temporal de log-retorno das Acções da CDM

Ao analisar o gráfico da série temporal de retorno das acções da CDM (Figura 6), é possível verificar a existência de períodos de baixa volatilidade e alta volatilidade e no primeiro semestre verifica-se que é o período que apresentou o maior risco retorno.

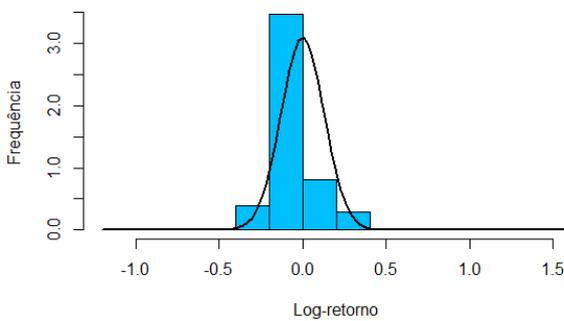


Figura 7: Histograma de log-retornos das Acções da CDM

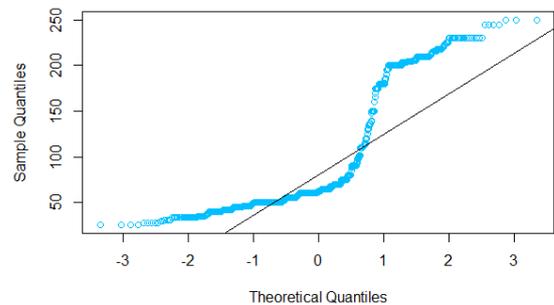


Figura 8: QQ-Normal de log-retornos das Acções da CDM

Tabela 3: Estatística descritivas da série de log-retornos das Ações da CDM

Mínima	Máxima	Média	Variância	Curtose	Assimetria
-1,1871	1,4689	-0,0012	0,0166	24,353	0,5271
Jarque – Bera (Normalidade)					
Estatística	P-valor				
118,04	$2,2 * 10^{-16}$				

Analisando a (tabela 3), pode ser notado que média dos log-retornos é de $-0,0012\%$, a mínima é de $-1,1871\%$, máxima é de $1,4689$ e a variância de $0,0166\%$. Verifica-se que a série de log-retornos apresentam uma distribuição assimétrica, sendo o valor da assimetria igual a $0,5271$, o que é evidenciado pela (Figura 7), as suas observações estão mais concentradas à esquerda da media e também verifica-se na (Figura 8) observações não estão sobrepostas na recta de distribuição normal. Os log-retornos apresentam uma distribuição leptocúrtica (caudas mais pesadas que a distribuição normal), isto é, a curtose é igual a $24,353$. Esta verificação é confirmada pela aplicação do teste de Jarque-Bera (JB) em que o p-valor apresenta um valor de $2,2 * 10^{-16}$, isto é, não há evidências suficientes para tirar uma conclusão estatisticamente significativa de que a série segue distribuição normal.

Tabela 4: Teste de raiz unitária de Dickey- Fuller

	Estatística t	Probabilidade
Teste Estatístico Dickey Fuller Aumentado	-38,177	$2,2 * 10^{-16}$
	1%	-2,58
Valores críticos de teste	5%	-1,95
	10%	-1,62

Ao verificar o Teste de raiz unitária de Dickey- Fuller (Tabela 4), pode notar-se que em termos absolutos, o valor da estatística de Dickey-Fuller Aumentado ($-38,177$) associado a uma probabilidade de $2,2 * 10^{-16}$ é maior do que os valores críticos de Mackinnon, não há evidências suficientes para se rejeita a hipótese de que a série seja estacionaria, podendo se assumir que a série de log-retornos é estacionária.

Tabela 5: Teste de Ljung-Box

Defasagem	Q	P-valor	Defasagem	Q	P-valor
1	36,46	$1,56 * 10^{-9}$	10	73,342	$2,36 * 10^{-11}$
5	48,60	$1,19 * 10^{-9}$	15	79,085	$1,03 * 10^{-10}$
10	59,72	$4,10 * 10^{-9}$	20	84,769	$6 * 10^{-10}$

Ao verificar os testes de Ljung-Box (Tabela 5), pode notar-se que os p-valores de diferen-

tes defasagens seleccionadas aleatoriamente no intervalo de 1 até 20 são inferior que 5%, não há evidências suficientes para assumir que os log-retorno não são autocorrelacionados, o que pode indicar que o log-retorno não foi gerado por um processo de ruído branco.

4.1.2 Modelação ARMA

Identificação dos parâmetros do modelo ARMA

Para identificar os parâmetros podem ser usados os correlogramas das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da série.

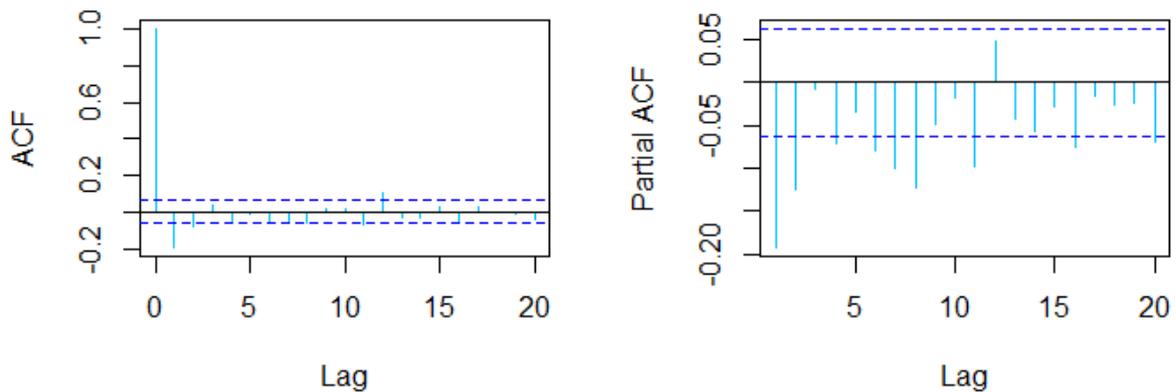


Figura 9: Correlogramas da série de log-retorno

Analisando as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial (Figura 9), pode notar-se que a função de autocorrelação (FAC), logo na defasagem 1 mostra-se diferente de zero em termos estatísticos, porém existem outras defasagens parecem não ser diferentes de zero, isto é, quanto mais aumenta o número de defasagens a correlação tende mais a zero o que verifica-se na função de autocorrelação parcial que logo na primeira defasagem mostra-se ser diferente de zero em termos estatísticos, porém não é apenas a primeira defasagem que mostra ser diferente de zero.

Para confirmar a ordem dos termos p e q do modelo ARMA foram ainda calculados os critérios BIC e AIC de vários modelos ARMA.

Tabela 6: Valores de AIC e BIC para os vários modelos ARMA(p, q)

(p, q)	AIC	BIC	(p, q)	AIC	BIC	(p, q)	AIC	BIC
(1, 0)	-1281,0	-1266,3	(0, 3)	-1296,2	-1271,7	(1, 3)	-1328,6	-1299,2
(2, 0)	-1294,8	-1275,2	(1, 1)	-1326,6	-1307,0	(2, 2)	-1328,5	-1299,1
(3, 0)	-1292,8	-1268,3	(2, 1)	-1330,0	-1305,5	(2, 3)	-1329,8	-1295,5
(0, 1)	-1290,8	-1276,1	(3, 1)	-1329,6	-1300,2	(3, 2)	-1331,2	-1296,9
(0, 2)	-1297,8	-1278,2	(1, 2)	-1330,5	-1306,0	(3, 3)	-1329,9	-1290,7

Ao analisar os valores de AIC e BIC para os diversos modelos ARMA (Tabela 6), observamos uma discrepância na seleção do modelo ótimo. O critério AIC indicou o modelo ARMA(3, 2) como o mais adequado, com o menor valor de AIC (-1331,2). No entanto, o critério BIC, que penaliza modelos mais complexos, favoreceu o modelo ARMA(1, 1), apresentando o menor valor de BIC (-1307,0).

Tabela 7: Teste de Ljung-Box dos resíduos dos modelos

Defasagem	ARMA (1, 1)		ARMA (3, 2)	
	Q	p-valor	Q	p-valor
1	2,4332	0,11880	0,0052	0,9422
2	2,6285	0,26870	0,2268	0,8928
3	11,983	0,00744	0,7862	0,8528
4	12,037	0,01708	0,8107	0,9370
5	12,565	0,02782	0,8717	0,9722
6	13,388	0,03727	2,0499	0,9151
7	15,602	0,02901	6,2900	0,5063
8	18,413	0,03067	8,4846	0,3876
9	18,413	0,03067	8,7133	0,4641
10	18,884	0,04176	9,6057	0,4757
11	22,260	0,02244	11,195	0,4271
12	31,035	0,00195	20,201	0,0634
13	31,938	0,00245	20,483	0,0838
14	32,809	0,00307	20,906	0,1041
15	33,466	0,00405	21,353	0,1259
16	36,055	0,00284	22,885	0,1168
17	36,516	0,00391	23,473	0,1345
18	36,517	0,00605	23,491	0,1724
19	36,583	0,00894	23,559	0,2136
20	37,728	0,00956	24,114	0,2375

Verificando o ajuste da função de autocorrelação nos resíduos dos modelos (Tabela 7), pode ser notado que, para o modelo ARMA (3, 2), não há evidência estatística suficiente para rejeitar a hipótese nula de que não há autocorrelação nos resíduos em todas as defasagens, obtendo-se $X_{20}^2 = 24,114 \leq X_{20}^2(0,05) = 31.41043$ e um p-valor de 0,2375. Entretanto, no modelo ARMA (1, 1), não há evidência estatística suficiente para rejeitar a hipótese nula de que não há autocorrelação nos resíduos em apenas defasagens 1 e 2, obtendo-se $X_{20}^2 = 37,728 \geq X_{20}^2(0,05) = 31.41043$ e um p-valor de 0,00956. Portanto, apenas no modelo ARMA (3, 2), a hipótese de que as funções são estatisticamente iguais a zero até a defasagem 20 não pode ser rejeitada e assim conclui-se que os resíduos não estão correlacionados e isso não é verificado no modelo ARMA (1, 1).

Tabela 8: Comparação dos modelos pelos erros de previsão

Metricas	ARMA (1, 1)	ARMA (3, 2)
ME	$4,6181 * 10^{-5}$	$7,2627 * 10^{-5}$
MAE	0,076879	0,0772329
RMSE	0,123459	0,1227994
MASE	0,672104	0,6751955

Verificando o ajuste dos modelos com as erros de previsão (Tabela 8), nota se que quanto ao erro médio (ME), erro médio absoluto (MAE) e MASE o modelo ARMA (1, 1) apresenta o melhor ajuste, entretanto quanto ao RMSE o modelo ARMA (3, 2) apresenta o melhor. Com vista a prosseguir com as análises será selecionado o modelo ARMA (1, 1), sendo o modelos mais simples e tem um bom ajuste.

Tabela 9: Modelo ARMA (3, 2)

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	θ_1	θ_2	intercepto
Parâmetros	0.0558	0.4789	0.1095	-0.3150	-0.5993	-0.0013
Erro padrão	0.1858	0.1347	0.0340	0.1848	0.1718	0.0010

Depois de ser selecionado o modelo, a fase seguinte, é o diagnóstico do respectivo modelo. Antes de estimar os modelos ARCH é necessário verificar a existência de heterocedasticidade condicional. Após a aplicação do modelo ARMA à log-retornos, são aplicados testes de Ljung-Box e de Multiplicador de Lagrange, nos resíduos ao quadrado resultantes da equação da média condicional.

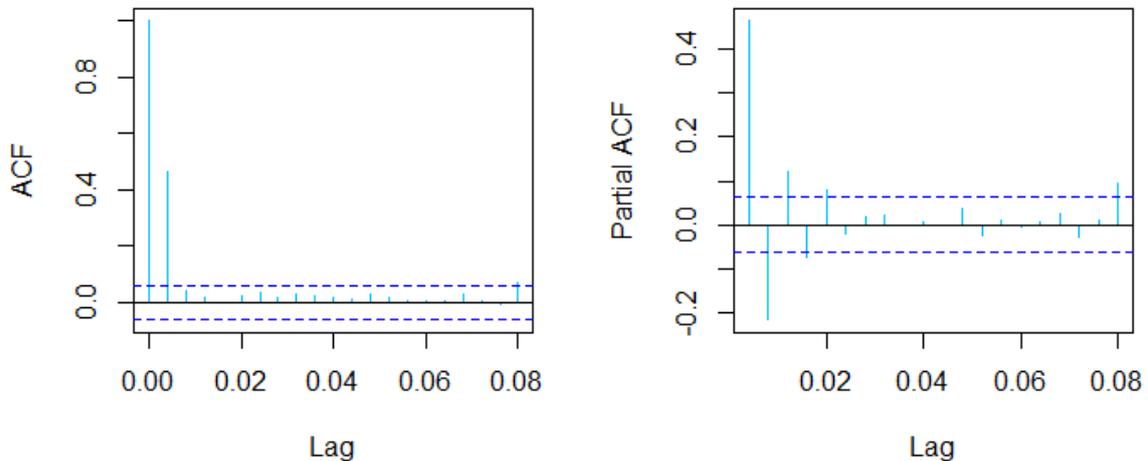


Figura 10: Correlogramas dos resíduos ao quadrado do modelo ARMA (3, 2)

Analisando as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial (Figura 10), pode ser

notado que, em ambas as funções logo na defasagem 1 mostra-se diferente de zero em termos estatísticos, porém existem outras defasagens parecem não ser diferentes de zero, isto é, quanto mais aumenta o número de defasagens a correlação tende mais a zero.

Para confirmar a presença de heteroscedasticidade condicional serão calculados dois testes, o teste Ljung-Box e Multiplicador de Lagrange, os testes serão aplicados aos resíduos ao quadrado do modelo ARMA (3, 2).

Tabela 10: Ljung-Box dos resíduos ao quadrado

Defasagem	Q	p-valor
1	213,41	$2,2 * 10^{-16}$
5	216,34	$2,2 * 10^{-16}$
10	219,64	$2,2 * 10^{-16}$
15	221,24	$2,2 * 10^{-16}$
20	227,62	$2,2 * 10^{-16}$

Tabela 11: Multiplicador de Lagrange dos resíduos ao quadrado

Defasagem	LM	p-valor
1	317,55	$2,2 * 10^{-16}$
5	317,76	$2,2 * 10^{-16}$
10	320,58	$2,2 * 10^{-16}$
15	319,00	$2,2 * 10^{-16}$
20	317,78	$2,2 * 10^{-16}$

Ao verificar Teste de Ljung-Box dos resíduos ao quadrado (Tabela 10), pode notar-se que o p-valor é menor que 5%, não há evidências suficientes para assumir que os resíduos ao quadrado apresentam homoscedasticidade condicional, verificando-se assim a presença de efeitos ARCH. O teste de Multiplicador de Lagrange (Tabela 11), os resíduos ao quadrado, mostra que os p-valor é menor que 5%, significando que a hipótese nula de não-existência de efeitos ARCH é rejeitada.

4.1.3 Modelação ARCH

Tabela 12: Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança de ARMA(3, 2)-GARCH(1, 1)

Parâmetros	Estimativas	Erro padrão	T value	Pr(> t)
μ	-0,000735	0,000751	-0,97827	0,327942
ϕ_1	0,376783	0,116089	3,24565	0,001172
ϕ_2	0,257485	0,093796	2,74517	0,006048
ϕ_3	0,034151	0,040022	0,85331	0,393486
θ_1	-0,549852	0,109460	-5,02331	0,000001
θ_2	-0,360010	0,101343	-3,55240	0,000382
ω	0,000293	0,000147	1,99587	0,045948
α_1	0,159311	0,022403	7,11102	0,000000
β_1	0,839689	0,021710	38,6783	0,000000

Analisando os valores da estimação do Modelo ARMA(3, 2)-GARCH(1, 1) (Tabela 12), verifica-se que os coeficientes estimados são estatisticamente significativos para um nível de significância de 5%, apenas os parâmetros μ e ϕ_3 do modelo são não significativos de 5%. É possível constatar que a resultante de $\alpha_1 + \beta_1$ é 0,999, que é muito próximo de 1. Considerando o erro padrão associado a estas estimativas, há que considerar que a condição de estacionariedade é verificado, o que significa que a hipótese da existência de raízes unitárias deve ser considerada. O que sugere um modelo quase integrado na variância em que os choques têm um efeito persistente na volatilidade condicional ao longo do tempo.

Tabela 13: Teste de Assimetria

	t-value	P-valor	Assimetria	Curtose
Sign Bias	2,507476	0,012317	-0,4358	3,96774
Negative Sign Bias	-3,10127	0,002873		
Positive Sign Bias	0,857755	0,391194		
Joint Effect	1,355984	0,715884		

Analisando os valores do Teste de Assimetria (Tabela 13), verifica-se que o valor de assimetria é -0.4357967, que indica uma assimetria negativa. Isso significa que a distribuição dos resíduos tem uma cauda mais longa à esquerda e com curtose diferente de 3. Tendo a assimetria negativa, o teste signbias encontrou significancia, o que pode indicar que a assimetria é forte o suficiente para afectar a volatilidade condicional de forma significativa.

Tabela 14: Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança de ARMA(3, 2)-EGARCH(1, 1)

Parâmetros	Estimativa	Erro padrão	T-valor	Pr(> t)
μ	0,000077	0,000557	0,13888	0,889543
ϕ_1	0,384333	0,028300	13,5807	0,000000
ϕ_2	0,279172	0,026025	10,7272	0,000000
ϕ_3	0,003897	0,025697	0,15167	0,879448
θ_1	-0,547858	0,013753	-39,8358	0,000000
θ_2	-0,383767	0,012366	-31,0329	0,000000
ω	-0,228581	0,073033	-3,12981	0,001749
α_1	-0,016180	0,029469	-0,54907	0,582959
β_1	0,934579	0,016810	55,5981	0,000000
γ_1	0,415583	0,036225	11,4723	0,000000

Analisando os valores da estimação do Modelo ARMA(3, 2)-EGARCH(1, 1) (Tabela 14), verifica-se que os coeficientes estimados são estatisticamente significativos para um nível de significância de 5%, apenas os parâmetros μ , ϕ_3 e α_1 do modelo são não significativos.

É possível constatar que a resultante de $\alpha_1 + \beta_1$ é 0,91840. Considerando o erro padrão associado a estas estimativas, há que considerar que o modelo verifica a condição de estacionariedade, o que significa que a hipótese da não existência de raízes unitárias deve ser considerada.

Tabela 15: Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança de ARMA(3, 2)-GJRGARCH(1, 1)

Parâmetros	Estimativa	Erro padrão	T-value	Pr(> t)
μ	-0,000752	0,000768	-0,97913	0,327514
ϕ_1	0,374996	0,129187	2,90274	0,003699
ϕ_2	0,259298	0,103437	2,50682	0,012182
ϕ_3	0,033524	0,040165	0,83465	0,403917
θ_1	-0,546913	0,123273	-4,43658	0,000009
θ_2	-0,362300	0,114060	-3,17641	0,001491
ω	0,000292	0,000153	1,90382	0,056934
α_1	0,153812	0,032776	4,69278	0,000003
β_1	0,839904	0,021749	38,6173	0,000000
γ_1	0,010569	0,040647	0,26001	0,794856

Analisando os valores da estimação do Modelo ARMA(3, 2)-EGARCH(1, 1) (Tabela 15), verifica-se que os coeficientes estimados são estatisticamente significativos para um nível de significância de 5%, apenas os parâmetros μ , ϕ_3 , ω e γ_1 do modelo são não significativos. É possível constatar que a resultante de $\alpha_1 + \beta_1$ é 0,993716. Considerando o erro padrão associado a estas estimativas, há que considerar que a condição de estacionariedade é verificado, o que significa que a hipótese da existência de raízes unitárias deve ser considerada. O que sugere um modelo quase integrado na variância em que os choques têm um efeito persistente na volatilidade condicional ao longo do tempo.

Seleção do modelo

Tabela 16: Medidas de bondade do ajustamento

Modelos	AIC	BIC	L
ARMA-GARCH	-1,6168	-1,5723	810,9273
ARMA-EGARCH	-1,6719	-1,6225	839,2504
ARMA-GJRGARCH	-1,6148	-1,5655	810,964

Analisando as medidas de bondade do ajustamento (Tabela 16), nota-se que, o modelo ARMA(3, 2)-EGARCH(1, 1) provavelmente parece ser o mais adequado, pois é o modelo com maior logaritmo de verossimilhança e e menores valores nos critérios AIC e BIC.

Análise dos resíduos

Após estimar o modelo, a próxima etapa envolve o diagnóstico residual padronizada. Estes devem ser não correlacionados, sem qualquer efeito ARCH e ter distribuição normal reduzida. Em suma, os resíduos devem apresentar características de ruído branco.

Tabela 17: Teste do multiplicador de Lagrange

Defasagem	ARMA-GARCH		ARMA-EGARCH		ARMA-GJRGARCH	
	Q	P-valor	Q	P-valor	Q	P-valor
3	0,2602	0,6100	0,8991	0,3430	0,2409	0,6235
5	1,1188	0,6980	2,2219	0,4242	1,0987	0,7039
7	1,5525	0,8108	2,9691	0,5194	1,5373	0,8139

Analisando o teste do multiplicador de Lagrange (Tabela 17), verifica-se que os valores p de todos os modelos são superiores a 5%, o que significa que a hipótese da existência do efeito ARCH é rejeitada.

Tabela 18: Teste de Ljung-Box nos resíduos padronizados

Defasagem	ARMA-GARCH		ARMA-EGARCH		ARMA-GJRGARCH	
	Q	P-valor	Q	P-valor	Q	P-valor
1	0,0006	0,9801	0,1128	0,7370	0,0006	0,9799
2	0,8281	0,6610	0,3571	0,8365	0,8557	0,6519
4	2,5529	0,6352	3,2572	0,5157	2,6405	0,6197
5	2,5768	0,7649	3,3760	0,6422	2,6606	0,7521
6	2,6051	0,8565	3,6080	0,7295	2,6930	0,8463
8	5,2090	0,7350	4,6720	0,7920	5,2016	0,7358
9	5,7139	0,7682	5,7204	0,7675	5,7267	0,7669
10	5,9066	0,8230	6,1144	0,8056	5,9305	0,8211
11	6,7337	0,8202	6,5816	0,8319	6,7464	0,8192
13	12,955	0,4513	14,449	0,3430	12,957	0,4512
14	14,956	0,3812	15,194	0,3650	14,954	0,3813
15	17,611	0,2837	17,873	0,2694	17,617	0,2834
17	17,635	0,4122	18,275	0,3717	17,642	0,4118
18	17,648	0,4790	18,390	0,4302	17,656	0,4785
19	18,314	0,5016	19,149	0,4473	18,317	0,5013
20	18,812	0,5341	19,739	0,4744	18,826	0,5331

Ao verificar os testes de Ljung-Box nos resíduos padronizados (Tabela 18), pode ser notado que os p-valores de diferentes defasagens até 20 são superiores que 5% em todos os modelos, não há evidências suficientes para assumir que os resíduos padronizados são autocorrelacionados, o que pode indicar que o resíduos padronizados é gerado por um processo de ruído branco.

Tabela 19: Teste de Ljung-Box nos resíduos ao quadrado padronizados

Defasagem	ARMA-GARCH		ARMA-EGARCH		ARMA-GJRGARCH	
	Q	P-valor	Q	P-valor	Q	P-valor
1	1,0881	0,2969	0,8478	0,3572	1,0155	0,3136
2	1,1200	0,5712	1,2957	0,5232	1,0529	0,5907
4	2,0522	0,7262	3,2253	0,5208	1,2681	0,7416
5	2,5981	0,7617	4,0762	0,5385	2,5095	0,7751
6	2,6126	0,8557	4,1193	0,6605	2,5221	0,8660
8	3,3948	0,9072	5,6243	0,6892	3,3234	0,9125
9	3,4850	0,9419	5,6516	0,7742	3,4228	0,9452
10	3,4987	0,9671	7,6590	0,6621	3,4398	0,9691
11	4,0385	0,9688	8,3757	0,6793	3,9982	0,9700
13	7,8945	0,8504	14,241	0,3571	7,8170	0,8541
14	8,0730	0,8855	14,795	0,3923	8,0149	0,8885
15	8,0781	0,9206	14,897	0,4588	8,0170	0,9231
17	8,6792	0,9498	15,270	0,5760	8,6223	0,9514
18	8,9961	0,9598	15,614	0,6194	8,9725	0,9604
19	9,2938	0,9683	15,802	0,6704	9,2704	0,9687
20	9,5876	0,9750	15,803	0,7288	9,5352	0,9758

Ao verificar os testes de Ljung-Box nos resíduos ao quadrado padronizados (Tabela 19), pode ser notado que os p-valores de diferentes defasagens até 20 são superiores que 5% em todos os modelos, não há evidências suficientes para assumir que os resíduos padronizados são autocorrelacionados, o que pode indicar que o resíduos padronizados foi gerado por um processo de ruído branco.

Análise de normalidade

Tabela 20: Estatísticas dos resíduos padronizados

	ARMA-GARCH	ARMA-EGARCH	ARMA-GJRGARCH
Assimetria	-0,8246	-0,6865	-0,8266
Curtose	5,0044	5,0297	4,9910
JB	1154,6	1130,5	1149,6
JB p-valor	$<2, 2 * 10^{-16}$	$<2, 2 * 10^{-16}$	$<2, 2 * 10^{-16}$

Ao analisar as estatísticas descritivas dos resíduos padronizados (Tabela 20), nota-se

que os valores de curtose são superiores a 3 para os três modelos. No entanto, não se pode dizer que o modelo seja capaz de capturar a curtose da distribuição condicional. O valor da assimetria é próximo de zero, o que leva a concluir que a distribuição dos resíduos está muito próxima de uma distribuição simétrica, mas do teste de Jarque-Bera (JB) apresenta p-valores menores que 5%, isto é, não há evidências suficientes para tirar uma conclusão estatisticamente significativa de que os resíduos padronizados apresentam um distribuição normal.

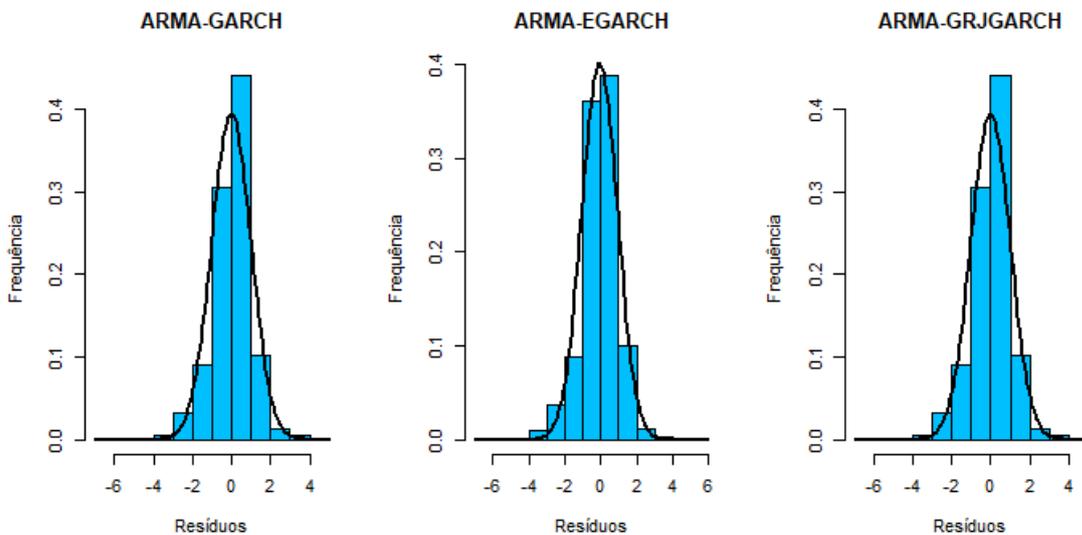


Figura 11: Histograma dos resíduos padronizados

Ao analisar os histogramas dos resíduos padronizados (Figura 11), nota-se que os mesmos confirmam que a distribuição apresenta um pico em relação à distribuição normal.

Análise comparativa de ajustes dos modelos com valor em risco

Tabela 21: Violação do VaR(95%)

Modelos	Observações	Proporções
ARMA(3, 2)-GARCH(1, 1)	77	0,0777
ARMA(3, 2)-EGARCH(1, 1)	75	0,0756
ARMA(3, 2)-GJRGARCH(1, 1)	77	0,0777

Analisando as medidas de violações do VaR(95%) (Tabela 21), nota-se que, os modelos não respeitam a percentagem de violações de 5%. Neste caso, todos os modelos apresentam percentagens superiores a 5%, sendo 7,77% para os modelos ARMA-GARCH e ARMA-GJRGARCH e 7,56% para o modelo ARMA-EGARCH.

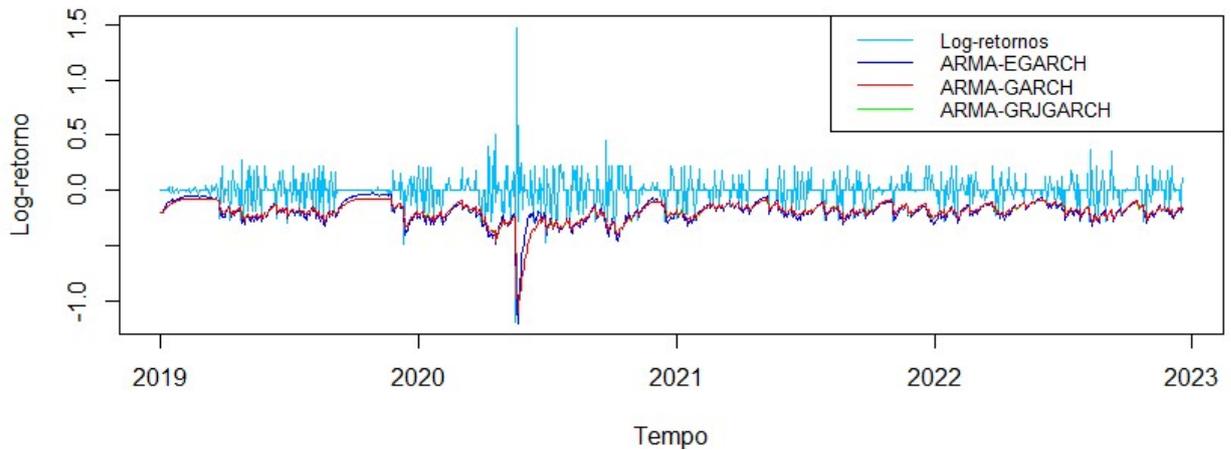


Figura 12: Retornos vs VaR(95%)

Analisando os retornos vs VaR (Figura 12), é possível identificar que existem períodos em que os retornos conseguiram romper o limite de VaR.

Ajuste de previsão para o período de 2023

Tabela 22: Erros de previsão para o período de 2023

	ARMA-GARCH	ARMA-EGARCH	ARMA-GJRGARCH
MAE	0,0349	0,1603	0,0347
MSE	0,0016	0,0261	0,0016
RMSE	0,0405	0,0260	0,0402

Analisando os erros de previsão para o período de 2023 (Tabela 22), nota-se que, os erros de previsão MAE e RMSE, o modelo ARMA(3, 2)-GJRGARCH(1, 1) é o modelo com melhor capacidade de previsão. Outra função de erro de previsão, MSE, mostra que os modelos ARMA(3, 2)-GARCH(1, 1) e ARMA(3, 2)-GJRGARCH(1, 1) possuem o mesmo poder preditivo.

Tabela 23: Risco de investimento para o período de 2023

	ARMA-GARCH	ARMA-EGARCH	ARMA-GJRGARCH
Risco associado	0,4413	0,2867	0,4402

Analisando risco de investimento para o período de 2023 (Tabela 23), nota-se que, com 95% de probabilidade, a perda máxima esperada para 248 dias, nos modelos ARMA-GARCH ARMA-EGARCH ARMA-GJRGARCH é de até 44,13%, 28,67% e 44,02%,

respectivamente do capital investido.

Tabela 24: Pior queda do preço verificada ao longo de 2023

Preço de compra	Pior queda de 2023	Varição	Percentual
58,01	35	23,01	39,67 %

Verificando pior queda do preço verificada ao longo de 2023 (Tabela 24), notar-se que em caso ter comprado as acções da CDM ao preço 58,01 MZN, em algum momento as acções desvalorizam até 39,67%, isto é, em algum momento perderia até 23,01 MZN.

Tabela 25: VaR vs pior queda do preço verificada ao longo de 2023

Queda verificada	ARMA-GARCH	ARMA-EGARCH	ARMA-GJRGARCH
39,67%	44,13%	28,67%	44,02%

Analisando VaR vs pior queda do preço verificada ao longo de 2023 (Tabela 25), é possível notar que o modelo ARMA-EGARCH apresenta menor percentagem que a queda verificada, isso indica a insuficiência do poder preditivo para esse período de previsão, ao contrário dos modelos ARMA-GARCH e ARMA-GJRGARCH que tem percentagens um pouco superiores que a queda verificada.

4.2 Discussão

Cont (2001) e Epaphra (2017) confirmaram em seu trabalho que séries temporais de activos financeiros compartilham certas características comuns, que os autores chamam de factos estilizados.

Os resultados do estudo confirmam a grande maioria dos factos estilizados apresentados pelos autores anteriormente mencionados. As seguintes características foram então verificadas na série das acções da Cerveja de Moçambique:

- Presença de caudas mais pesadas;
- O nível das perdas é maior que a dos lucros;
- Menor rendibilidade;
- Clusters de volatilidade;
- Existe uma diferença significativa nos resíduos padrão do modelo estimado;

Essas características são verificadas nos retornos da CDM, embora a características de que os retornos apresentam normalmente pouca ou nenhuma autocorrelação não foi verificado.

5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 Conclusões

Com base nos resultados obtidos, é possível afirmar que ao longo do período analisado, o valor das acções da empresa de cervejas de Moçambique apresentou uma tendência geral de queda ao longo do período analisado, com variações significativas na volatilidade.

Inicialmente, a não estacionariedade da série de preços foi confirmada visualmente e através do teste DFA, indicando a presença de tendência e/ou sazonalidade que inviabilizam a modelação directa com ARMA.

A análise dos retornos em forma logarítmica indica que, embora os preços não sejam constantes, os retornos logarítmicos são estacionários. A presença de não normalidade e autocorrelação nos retornos logarítmicos indica a possibilidade de serem necessários modelos mais sofisticados para capturar tais características e assim prever com maior precisão o comportamento futuro dos preços das acções.

Os parâmetros do modelo ARMA (1, 1) foram identificados através da análise das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial. Após a comparação dos critérios AIC e BIC, optou-se pelo ARMA (3, 2) devido o seu ajuste inicial adequado apresenta o menor valor de AIC e não foi observado alguma autocorrelação residual que precisava ser corrigida, porem nota-se a presença de heterocedasticidade condicional nos resíduos ao quadrado do modelo.

Devido a presença de heterocedasticidade condicional, levou a adoptar a modelação dos efeitos ARCH, onde testes como o Ljung-Box e o Multiplicador de Lagrange confirmaram a presença desses efeitos. Foram estimados modelos ARCH (GARCH, EGARCH, GJR-GARCH) para capturar a volatilidade persistente observada nos dados.

Verificou-se que os modelos estimados conseguiram captar com sucesso os efeitos ARCH através do teste de Ljung-Box.

As análises demonstraram que os modelos ARCH, principalmente no GARCH e GJR-GARCH, os coeficientes também são relevantes, sugerindo que a volatilidade se mantém ao longo do período analisado.

Embora o modelo ARMA(3,2)-EGARCH(1,1) seja o mais adequado em termos de ajuste aos dados históricos, todos os modelos mostram problemas em relação à normalidade dos resíduos e à gestão de risco, especialmente no que diz respeito ao valor em risco.

5.2 Recomendações

As conclusões produzidas por este trabalho, indicam que os modelos ARCH para o estudo do preço das acções da empresa Cerveja de Moçambique, apresentam bom desempenho, por isso, a sua aplicação é recomendada. Portanto recomenda-se cautela ao utilizar esses modelos para previsões e gestão de risco em cenários financeiros, pois os activos financeiros são influenciados por vários factores externos como impostos, factores económicos, factores políticos, factores de mercado, entre outros.

5.3 Limitações do estudo

As principais limitações encontradas durante a realização do estudo foram:

- Dificuldades na obtenção de dados de maior dimensão;
- Não há estudos que levam em consideração a mesma variável: preço das acções da cervejas de Moçambique o que possibilitasse a comparação dos resultados.

Referências

- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle (2^a ed.). In *Proceedings of the International Symposium on Information Theory* (Budapest, Hungria).
- Ariyo, A. A., Adewumi, A. O., & Ayo, C. K. (2014). Stock price prediction using the ARIMA model. In *International Joint Conference on Neural Networks*.
- Armstrong, J. S., & Collopy, F. (1992). Error measures for generalizing about forecasting methods: Empirical comparisons. *International Journal of Forecasting*.
- Assaf Neto, A. (2003). *Mercado financeiro*. São Paulo: Atlas.
- Assaf Neto, A. (2008). *Mercado financeiro*. São Paulo: Atlas.
- Assaf Neto, A. (2014). *Mercado financeiro* (11^a ed.). São Paulo: Atlas.
- Aurélio, C. M. A. (2015). *Assimetria na volatilidade dos mercados de acções* [Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Lisboa]. Repositório Científico do IPL. <https://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/5691>
- Barros, L. (2003). *Modelos de séries temporais: Teoria e aplicações*. São Paulo: Editora da USP.
- Bera, A. K., & Higgins, M. L. (1993). ARCH models: Properties, estimation and testing. *Journal of Economic Surveys*, 7(4), 305-366.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*.
- Blanchard, O. (2017). *Macroeconomia*. Pearson.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*.
- Bolsa de Valores de Moçambique. (2024). Acções. <https://bvm.co.mz//pt/produtos>
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008). *Time series analysis: Forecasting and control* (4^a ed.). Wiley.
- Brigham, E. F., & Houston, J. F. (2012). *Fundamentals of financial management* (13^a ed.). Cengage Learning.
- Brito, G. A. S., & Assaf Neto, A. (2008). Modelo de classificação de risco de crédito de empresas. *Revista Contabilidade e Finanças*.
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1996). *Introduction to time series and forecasting*. New York: Springer.
- Brooks, C. (2002). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Brooks, C. (2008). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2002). *Model selection and inference: A practical information-theoretic approach* (2^a ed.). New York: Springer-Verlag.

- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1, 223–236.
- Couto, J., Silva, A., & Pereira, M. (2003). Modeling volatility in financial time series. *Journal of Financial Econometrics*.
- Damodaran, A. (2012). *Investment valuation: Tools and techniques for determining the value of any asset* (3^a ed.). Wiley.
- Ehlers, L. (2009). *Estatística para análise de séries temporais: Teoria e prática*. Rio de Janeiro: Editora LTC.
- Epaphra, M. (2017). Modeling exchange rate volatility: Application of the GARCH and EGARCH models. *Journal of Mathematical Finance*.
- Enders, W. (2004). *Applied econometric time series* (2^a ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Fáveron, J. A., Silva, M. B., & Oliveira, C. D. (2003). Análise de componentes cíclicos em séries temporais econômicas. *Revista Brasileira de Economia*, 57(2), 215–230.
- Fabozzi, F. J. (1994). *Investment management*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Fabozzi, F. J., & Modigliani, F. (2002). *Foundations of financial markets and institutions* (3^a ed.). Prentice Hall.
- Fama, E. F. (1965). The behaviour of stock market prices. *Journal of Business*.
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*.
- Ferreira, M. D. P. (2009). Análise da instabilidade de preços da mamona no estado da Bahia [Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Ceará].
- Fischer, S. (1982). *Macroeconomics*. MIT Press.
- Garcia, E. M. A. (2017). Previsão de séries temporais financeiras: O caso PSI 20 [Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa]. Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- Galdi, F. C., & Pereira, L. M. (2007). Valor em risco (VaR) utilizando modelos de previsão de volatilidade: EWMA, GARCH e volatilidade estocástica. *Brazilian Business Review*.
- Gitman, L. J., & Joehnk, M. D. (2005). *Princípios de investimentos* (8^a ed.). São Paulo: Pearson.
- Gitman, L. J., & Madura, J. (2003). *Introduction to finance: Markets, investments, and financial management* (2^a ed.). Addison-Wesley.
- Glosten, L., Jagannathan, R., & Runkle, D. (1993). On the relation between expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*.
- Graham, B. (2006). *The intelligent investor: The definitive book on value investing*. HarperBusiness.

- Gujarati, D. N. (2000). *Econometria básica* (4^a ed.). McGraw-Hill.
- Gujarati, D. N. (2006). *Econometria básica* (5^a ed.). Elsevier .
- Halfeld, M. (2007). *Investimentos: Como administrar melhor seu dinheiro*. Editora Fundamento Educacional.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Harvey, A. C. (1989). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Harrell, F. E. (2001). *Regression modeling strategies: With applications to linear models, logistic regression, and survival analysis*. Springer.
- Hull, J. C. (2018). *Risk management and financial institutions* (5^a ed.). Wiley.
- Instituto Nacional de Estatística. (2022). Inquérito sobre o Orçamento Familiar (IOF 2022). INE. <https://www.ine.gov.mz>
- Jorion, P. (2003). *Value-at-risk: The new benchmark for managing financial risk* (2^a ed.). McGraw Hill.
- Konishi, S., & Kitakawa, G. (2008). *Information of criteria and statistic modeling*. New York, NY: Springer.
- Levy, H. (1999). *Introduction to investments* (2^a ed.). South-Western College Publishing.
- Lopes, P. P. (2018, 23 de novembro). CDM gera mais de 180 milhões de MT para famílias produtoras de mandioca e milho. *Jornal o País*. <https://opais.co.mz/cdm-gera-mais-de-180-milhoes-de-mt-para-familias-produtoras-de-mandioca-e-milho/>
- Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. (1998). *Forecasting: Methods and applications* (3^a ed.). Wiley.
- Malmsten, H., & Terasvirta, T. (2004). Stylized facts of financial time series and three popular models of volatility (Working Paper No. 563). SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*.
- Mankiw, N. G. (2016). *Princípios de economia*. Cengage Learning.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974>
- Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. Yale University Press.
- McQuarrie, A. D. R., & Tsay, R. S. (1998). *The analysis of time series: An introduction*. Wiley.
- Menezes, C. (2001). *Princípios da gestão financeira* (10^a ed.). Editorial Presença.
- Menezes, A. (2011). *Investimentos: Teoria e prática*. São Paulo: Atlas.
- Milone, L. (2006). *Introdução à análise de séries temporais*. São Paulo: Editora Atlas.

- Mishkin, F. S., & Eakins, S. G. (2012). *Mercados financeiros e instituições* (7^a ed.). São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Morettin, P. A. (2004). *Econometria financeira: Um curso em séries temporais não lineares*. Blucher.
- Morettin, P. A., & Toloi, C. M. C. (1987). *Análise de séries temporais*. São Paulo: Blucher.
- Morettin, P. A., & Toloi, C. M. (2004). *Análise de séries temporais*. São Paulo: Blücher.
- Morettin, P. A. (2006). *Econometria financeira: Uma análise de séries temporais financeiras*. São Paulo: Blücher.
- Morettin, P. A., & Toloi, C. M. C. (2006). *Análise de séries temporais* (2^a ed. rev. e ampliada). São Paulo: Edgard Blücher.
- Morettin, P. A., & Toloi, C. M. C. (2011). *Análise de séries temporais*. São Paulo: Blucher.
- Morgan Bank, J. P. (1999). *Risk management: A practical guide*. RiskMetrics Group.
- Morgan Bank, J. P. (1999). *Technical document*. RiskMetrics Group.
- Murteira, F., & Black, S. (1983). *Análise de séries temporais*. Lisboa: Edições 70.
- Nelson, D. B., & Cao, C. (1991). Inequality constraints in the generalized autoregressive conditional heteroskedasticity (GARCH) model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 9(4), 459–463. <https://doi.org/10.1080/07350015.1991.10509934>
- Nelson, D. B., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*.
- Oliveira, F. (1983). *A economia brasileira: Crítica à razão dualista*. São Paulo: Brasiliense.
- Palmer, J. J. (2017). *How to brew: Everything you need to know to brew beer right the first time*. Brewers Publications.
- Parzen, E. (1972). *Stochastic processes*. Englewood Cliffs, NJ: Holden-Day.
- Pinho, C. M. D., Barbedo, C. H. D., & Filho, R. D. P. L. (2011). Modelagem e previsão da volatilidade do mercado acionário brasileiro: Uma aplicação de modelos GARCH. *Revista Brasileira de Finanças*, 9(3), 323–350.
- Reilly, F. K., & Brown, K. C. (1997). *Investment analysis and portfolio management*. Dryden Press.
- Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*.
- Schwarz, G. E. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*.
- Silva, M. I., Guimarães, E. C., & Tavares, M. (2008). Previsão da temperatura média mensal de Uberlândia, MG, com modelos de séries temporais. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*.
- Smith, J. (2020). *Finanças pessoais e comportamento econômico*. Blücher.

- Swinnen, J. F. M. (Ed.). (2011). *The economics of beer*. Oxford University Press.
- Tsay, R. S. (2002). *Análise de séries temporais: Modelagem e previsão*. São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series* (2^a ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Tubino, D. F. (2017). *Planejamento e controle de produção: Teoria e prática* (3^a ed.). São Paulo: Atlas.
- Wooldridge, J. M. (2016). *Introdução à econometria: Uma abordagem moderna* (4^a ed.). São Paulo: Cengage Learning.

Apêndice

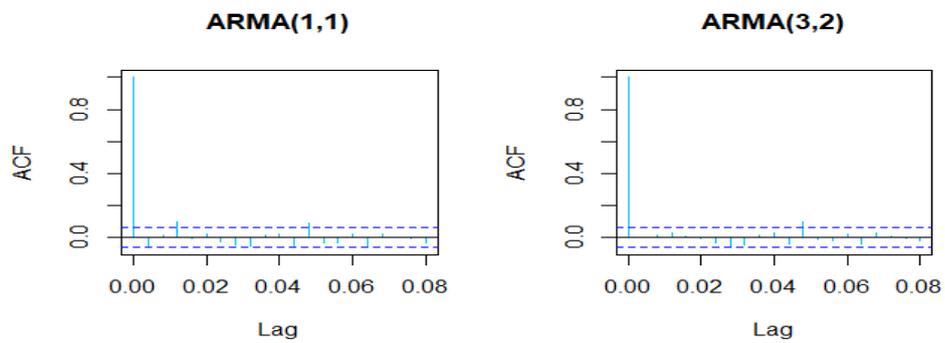


Figura 13: Correlogramas dos modelos ARMA

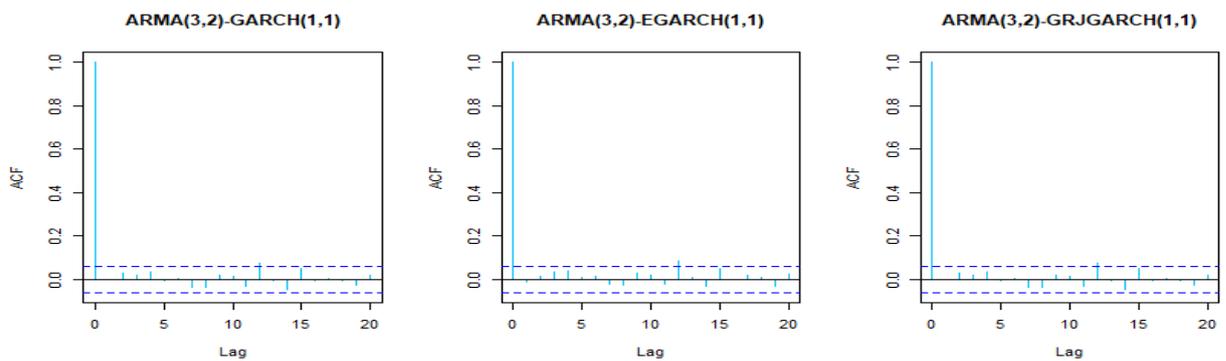


Figura 14: Correlogramas dos resíduos padronizados dos modelos da class ARCH

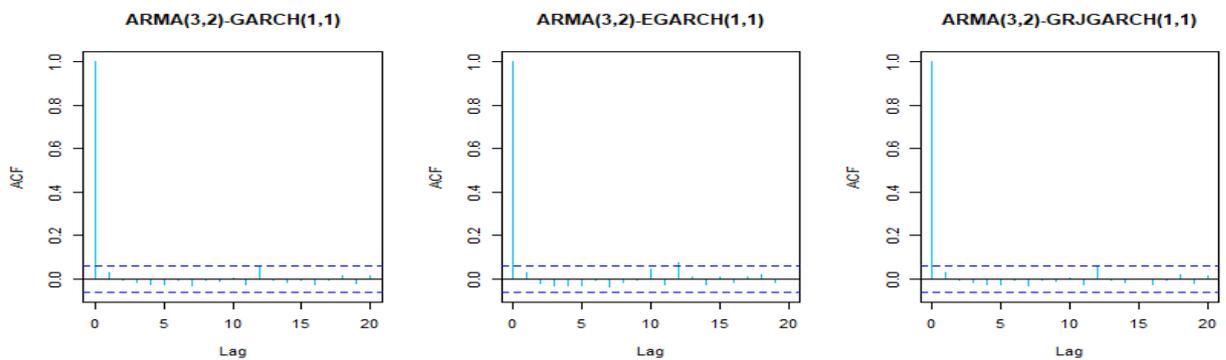


Figura 15: Correlogramas dos resíduos padronizados ao quadrado dos modelos da classe ARCH