



UNIVERSIDADE
E D U A R D O
MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em
Ciências de Informação Geográficas

**Análise da Precisão dos Modelos do Método dos
Mínimos Quadrados no Ajustamento de Dados
Altimétricos**

Autora: Marta Inácio

Maputo, 7 de Maio de 2025



UNIVERSIDADE
E D U A R D O
MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em
Ciências de Informação Geográfica

**Análise da Precisão dos Modelos do Método dos
Mínimos Quadrados no Ajustamento de Dados
Altimétricos**

Autora: Marta Inácio

Supervisor: Lic. Francesse Mauro Bacião, UEM

Maputo, 7 de Maio de 2025

Declaração de Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Ciências de Informação Geográfica, na faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, 7 de Maio de 2025

(Marta Inácio)

Dedicatória

Dedico este trabalho em primeiro lugar, a Deus, pelo dom da vida, por me dar força, sabedoria e perseverança ao longo desta jornada. Aos meus pais, Machume Inácio e Rosalina Timóteo que sempre acreditaram no meu potencial e me ensinaram o valor da dedicação e do esforço.

Agradecimentos

A realização deste trabalho é fruto de uma longa caminhada marcada por desafios, aprendizados e conquistas, e não teria sido possível sem o apoio e dedicação de várias pessoas, às quais manifesto a minha mais sincera gratidão. Primeiramente, agradeço a Deus, pela força, sabedoria e orientação ao longo de toda a minha jornada académica. Sem a Sua graça, nada seria possível.

À Universidade Eduardo Mondlane, especialmente à Faculdade de Ciências e ao Departamento de Ciências de Informação Geográfica, agradeço pela formação de qualidade, pela disponibilidade dos recursos e pelo ambiente académico que estimulou o meu crescimento intelectual. Minha gratidão ao meu supervisor, Lic. Francesse Mauro Bacião, pela sua orientação, paciência e pelos valiosos ensinamentos que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Aos docentes do curso, pelo saber transmitido com dedicação, e pelo exemplo de compromisso e excelência profissional. Cada aula contribuiu para a minha evolução científica.

Sou igualmente grata aos meus colegas, especialmente Hélder Machele, Imelda Cossa, Adozinda Mboa e Elisa Guirruogo, pelo companheirismo, pelas partilhas de conhecimento, pela entreatajuda e por todos os momentos de motivação e descontração. A minha família, pelo apoio incondicional e incentivo constante.

Por fim, um agradecimento muito especial aos meus amigos e a todos que, de alguma forma contribuíram para o sucesso desta etapa da minha vida

Muito Obrigada a todos!

Resumo

O presente estudo aborda a análise da precisão dos modelos do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) aplicados ao ajustamento de dados altimétricos em uma poligonal fechada. O objectivo principal é comparar a precisão de três modelos do MMQ (Paramétrico, Correlatos e Combinado) e identificar qual deles proporciona os melhores resultados no ajustamento de dados altimétricos. Foram utilizadas ferramentas computacionais, como o GNU Octave e o Microsoft Excel, para realizar os ajustamentos e avaliar a precisão dos modelos. A metodologia envolveu a aplicação dos modelos a um conjunto de dados altimétricos, seguida da avaliação da precisão de cada um, com foco na medição dos desvios padrão e na consistência dos resultados. A análise foi complementada com a elaboração de gráficos das Matrizes Variância-Covariância (MVC), permitindo a visualização das diferenças entre os modelos. Os resultados indicaram que, para os dados utilizados neste estudo, o modelo dos Correlatos foi o mais preciso, apresentando os menores desvios padrão, em comparação com os modelos Paramétrico e Combinado. Por outro lado, o modelo Combinado revelou menor precisão, evidenciando que a combinação de modelos nem sempre resulta em melhores desempenhos. Embora o modelo dos Correlatos tenha se destacado neste estudo, salienta-se que, em outros contextos e com diferentes conjuntos de dados, os modelos Paramétrico ou Combinado podem apresentar desempenho superior, dependendo das condições específicas de cada situação.

Palavras-chave: Altimetria, Método dos Mínimos Quadrados e Matriz Variância-Covariância

Abstract

This study addresses the analysis of the accuracy of Least Squares Method (LSM) models applied to the adjustment of altimetric data in a closed traverse. The main objective is to compare the accuracy of three LSM models (Parametric, Correlates, and Combined) and identify which of them provides the best results in altimetric data adjustment. Computational tools such as GNU Octave and Microsoft Excel were used to perform the adjustments and evaluate the precision of the models. The methodology involved applying the models to a set of altimetric data, followed by assessing the accuracy of each one, focusing on the measurement of standard deviations and the consistency of the results. The analysis was complemented by the development of Variance-Covariance Matrix (VCM) graphs, enabling the visualization of the differences among the models. The results indicated that, for the data used in this study, the Correlates model was the most accurate, presenting the lowest standard deviations compared to the Parametric and Combined models. On the other hand, the Combined model showed lower accuracy, demonstrating that the combination of models does not necessarily lead to better performance. Although the Correlates model stood out in this study, it is important to note that, in other contexts and with different datasets, the Parametric or Combined models may perform better depending on the specific conditions of each situation.

Keywords: Altimetry, Least Squares Method, Variance-Covariance Matrix

Lista de Abreviaturas

GNSS- *Global Navigation Satellite System* (Sistema de Navegação Global por Satélite)

GPS- *Global Positioning System* (Sistema de Posicionamento Global)

INE- Instituto Nacional de Estatística

MMQ- Método dos Mínimos Quadrados

MVC- Matriz Variância-Covariância

UEM- Universidade Eduardo Mondlane

UTM- *Universal Transverse Mercator*

FC- Faculdade de Ciências

Lista de Unidades de medidas

°C – Graus Celsius

m – Metro

m² – Metro Quadrado

mm – Milímetros

Lista de Símbolos

	Símbolo	Significado
1	Σ	Somatório
2	Az	Azimute
3	L_a	Vector das observações ajustadas
4	L_b	Vector das observações brutas
5	X_a	Vector dos parâmetros ajustados
6	X	Vector dos parâmetros de correcção
7	K	Vector dos correlatos ou de Lagrange
8	V	Vector dos resíduos
9	A	Matriz dos cofactores
10	P	Matriz dos pesos
11	I	Matriz Identidade
12	B	Matriz Design
13	R	Grau de Liberdade
14	U	Número de parâmetros
15	N	Número de observações
16	S	Número de equações
17	n_0	Número de observações necessárias
18	X^2_c	Qui-Quadrado amostral
19	σ_0^2	Variância <i>a priori</i>
20	$\hat{\sigma}_0^2$	Variância <i>a posteriori</i>
21	P	Número de lados da poligonal
22	Diag	Matriz diagonal
23	D	Comprimento de lado da poligonal
24	H_0	Hipótese Básica
25	H_1	Hipótese alternativa

Índice

Declaração de Honra.....	i
Dedicatória.....	ii
Agradecimentos.....	iii
Resumo.....	iv
Abstract.....	v
Lista de Abreviaturas.....	vi
Lista de Unidades de medidas.....	vi
Lista de Símbolos.....	vii
Lista de Tabelas.....	xii
Lista de Gráficos.....	xiii
1.Introdução.....	1
1.1. Contextualização.....	1
1.2. Definição do problema.....	2
1.3. Justificativa.....	3
1.4. Relevância.....	3
1.5. Objectivos.....	4
1.5.1. Geral.....	4
1.5.2. Específicos.....	4
1.6. Área de Estudo.....	5
1.6.1. Localização Geográfica da área de estudo.....	5
1.6.2. Características Físicas e Geográficas.....	5
2.Revisão de Literatura.....	7
2.1. Topografia.....	7
2.2.1. Levantamento Topográfico.....	8
2.1.1.1. Tipos de Levantamento Topográficos ou Clássicos.....	9
2.1.1.2. Levantamento Altimétrico.....	9
2.1.2. Métodos De Nivelamento Geométrico.....	9

2.2. Teoria dos Erros	11
2.2.1. Resíduo	11
2.3. Medidas de Dispersão.....	12
2.4.1. Desvio Padrão	13
2.4.1. Atribuição de pesos nas Observações	13
2.4.2. Variância.....	14
2.4.2.1. Variância <i>a Priori</i>	14
2.4.2.2. Variância <i>a posteriori</i>	14
2.4.3. Covariância.....	15
2.4.4. Matriz variância-covariância.....	15
2.5. Ajustamento de Observações	15
2.5.1. Modelo Matemático.....	16
2.5.1.1. Modelo Funcional.....	17
2.5.1.2. Modelo Estocástico	17
2.5.2. Princípio do Método dos Mínimos Quadrados	17
2.5.3. Matriz dos Pesos	18
2.5.4. Finalidade do Método dos Mínimos Quadrados.....	19
2.6. Método dos Mínimos quadrados	19
2.6.1. Método Paramétrico	20
2.6.2. Método dos Correlatos	23
2.6.3. Modelo Combinado.....	24
2.7. Diferenças e pontos comuns entre os modelos do MMQ.....	26
2.8. Controle de Qualidade do Ajustamento	27
2.8.1. Teste de Hipótese	27
2.8.2. Distribuição Qui-Quadrado χ^2	28
2.8.3. Teste Unilateral.....	29
2.8.4. Teste Bilateral	29
3. Material e Métodos	31

3.1.Procedimentos metodológicos.....	31
3.1.1.Tipo de Investigação.....	31
3.1.2.Equipamentos usados no campo	31
3.1.3.Equipamentos utilizados no Gabinete	32
3.2.Métodos	32
3.2.1.Observações directas	33
4.Resultados e Discussão	44
4.1. Resultados do Pré-processamento dos Dados de Campo	44
4.1.1. Resultados dos dados da Implantação do ponto de apoio.....	44
4.1.2.Resultados de Dados do Levantamento (Desníveis e Distâncias)	44
4.2. Teste de qualidade do Ajustamento	45
4.3. Gráficos Comparativos das precisões das MVC's das observações.....	47
5.Conclusões e Recomendações	53
5.1. Conclusão.....	53
5.2. Recomendações.....	54
6.Referências Bibliográficas.....	55
7. Anexos.....	59
Anexo 1: Tabela de Distribuição Qui-quadrada (inversa)	60
Anexo 2: Mapa de Localização da Poligonal na área de Estudo	61
Anexo 3: Matrizes Variância-Covariância das Observações ajustadas para os três modelos.....	62
Anexo 4:Matriz dos Pesos, Matriz Cofactoras A e B.....	65
Comandos referentes ao Ajustamento usando o Modelo Paramétrico	66
Anexo 5: Comando para o cálculo das equações normais (N,U).....	66
Anexo 6: Comando para o cálculo dos parâmetros ajustados (Xa)	66
Anexo 7: Comando para o cálculo do vector dos resíduos (V).....	66
Anexo 8: Comando que calcula o sigma- <i>a posteriori</i> ($\hat{\sigma}_0^2$).....	66
Anexo 9: Comando que calcula o Qui-Quadrado Amostral (X^2_c)	66
Anexo 10: Comando que calcula MVC dos parâmetros ajustados (MVC_Xa)	66

Anexo 11: Comando que calcula MVC das observações ajustadas (MVC_La)	66
Comandos referentes ao Ajustamento usando o Modelo dos Correlatos.....	67
Anexo 12: Comando que calcula o erro de fechamento (W).....	67
Anexo 13: Comando que calcula a matriz normal (M)	67
Anexo 14: Comando que calcula o vector dos correlatos/Lagrange (K).....	67
Anexo 15: Comando que calcula o vector dos resíduos (V)	67
Anexo 16: Comando que calcula o vector das observações ajustadas (La)	67
Anexo 17: Comando que calcula o sigma- <i>a posteriori</i> ($\hat{\sigma}_0^2$).....	67
Anexo 18: Comando que calcula o Qui-Quadrado Amostral (X^2_c)	67
Anexo 19: Comando que calcula MVC das observações ajustadas (MVC_La)	67
Comandos referentes ao Ajustamento usando o Modelo Combinado.....	68
Anexo 20: Comando que calcula o erro de fechamento (W).....	68
Anexo 21: Comando que calcula a matriz normal (M)	68
Anexo 22: Comando que calcula das correcções dos parâmetros (X).....	68
Anexo 23: Comando que calcula vector de Lagrange ou dos correlatos (K)	68
Anexo 24: Comando que calcula o vector dos parâmetros ajustados	68
Anexo 25: Comando que calcula o vector dos resíduos.....	68
Anexo 26 Comando que calcula o vector das observações ajustadas.....	69
Anexo 27: Comando que calcula o de valor de sigma <i>a posteriori</i>	69
Anexo 28: Comando que calcula qui-quadrado amostral.....	69
Anexo 29: Comando para o cálculo das MVC's dos parâmetros, observações, resíduos e erro de fechamento (Xa, La, V e W)	69
Anexo 30: Tabelas de Nivelamento.....	70

Lista de Figuras

Figura 1:Mapa de Localização Geográfica da área de estudo.....	5
Figura 2: Imagem do Parque de Estacionamento.....	6
Figura 3:Método de visadas iguais.....	10
Figura 4:Precisão e Acurácia.....	12
Figura 5:Diagrama do modelo Paramétrico.....	22
Figure 6:Diagrama do modelo dos Correlatos.....	24
Figure 7:Diagrama do modelo Combinado.....	26
Figure 8:Gráfico de região de aceitação do valor amostral de X_2	28
Figure 9:Planta Topográfica da Poligonal.....	38
Figura 10:Fluxograma Metodológico.....	43

Lista de Tabelas

Tabela 1:Equipamentos usados no campo.....	31
Tabela 2:Equipamentos usados no Gabinete.....	32
Tabela 3:Coordenadas da Base.....	44
Tabela 4: Dados observados em Campo.....	45
Tabela 5:Coordenadas dos Vértices da poligonal.....	45
Tabela 6:Resultados do Teste de Qualidade Bilateral.....	46
Tabela 7:Precisões do Modelo dos Correlatos.....	47
Tabela 8:Tabela de precisões do modelo paramétrico.....	48
Tabela 9: Precisões do Modelo Combinado.....	50

Lista de Gráficos

Gráfico 1: Precisões Modelo dos Correlatos.....	48
Gráfico 2: Precisões do Modelo Paramétrico.....	49
Gráfico 3: Precisões do Modelo Combinado.....	50
Gráfico 4: Comparação das precisões das observações.....	52

Introdução

O presente capítulo visa contextualizar o tema proposto, definindo a problemática, justificando a sua relevância. O capítulo apresentará ainda os objectivos que se pretendem alcançar com o desenvolvimento do tema, trazendo uma visão clara dos resultados esperados e da contribuição que o estudo pode oferecer para as diferentes áreas.

1.1. Contextualização

Nas medições Geodésicas e Topográficas, a presença de erros é inevitável, o que condiciona o alcance da precisão absoluta das medidas devido a vários factores, desde a limitação humana, imperfeição instrumental e instabilidade da natureza (Amorim, 2005).

Segundo Fonte (1994), a execução das operações de campo leva ao aparecimento de erros que podem ser de 3 tipos nomeadamente: erros sistemáticos, erros grosseiros e erros aleatórios. A compreensão da natureza desses erros e de como tratá-los é fundamental para garantir a precisão e confiabilidade dos resultados de um levantamento. Segundo Dalmolin (2002), o Ajustamento é um ramo da Matemática aplicada que tem por objectivo dar uma solução única para problemas onde o número de observações é superabundante e o sistema de equações lineares é inconsistente. Consiste numa expansão do Método dos Mínimos Quadrados desenvolvidos independentemente por Gauss (1795) e Legendre (1805).

Gemael (1994) diz que no ajustamento de observações, não trabalha-se com dados que contenham erros sistemáticos, pois esses são causados por factores previsíveis como falhas nos instrumentos ou condições ambientais, podem ser identificados e corrigidos previamente. Da mesma forma, erros grosseiros são descartados antes do ajustamento, pois esses resultam de falhas humanas ou problemas inesperados que podem ser detectados como *outliers*¹ (Klein *et al.*, 2011).

Dessa forma, o foco no ajustamento recai apenas sobre dados que contem erros aleatórios, pois os mesmos são inevitáveis e não podem ser corrigidos de forma directa, mas podem ser minimizados através de técnicas de ajustamento, como o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A aleatoriedade desses erros faz com que seu impacto seja diluído ao longo de várias medições, sendo possível minimizá-los através do MMQ, que visa distribuir os erros de forma equilibrada e ajustar os dados com base nos princípios estatísticos. Ao aplicar o MMQ, os erros aleatórios são suavizados, resultando em medições

¹ São dados que se destacam por estarem significativamente distantes dos outros valores em conjunto de observações.

ajustadas que melhor se aproximam da realidade, aumentando assim a precisão geral do levantamento. O MMQ é uma técnica fundamental no Ajustamento de dados, cujo objectivo é minimizar a soma dos quadrados dos resíduos - as diferenças entre os valores medidos e os ajustados (Santos, 2006).

No presente trabalho, serão levantados dados altimétricos em uma poligonal fechada, para posterior ajuste usando os três modelos do MMQ (paramétrico, correlatos e combinado), com o objectivo de avaliar qual dos modelos melhor se adequa no ajuste de dados altimétricos, a avaliação será feita comparando as Matrizes variâncias e covariâncias das observações ajustadas.

1.2. Definição do problema

Segundo Gemael *et al.*, (2015), as observações conduzidas pelo homem se caracterizam pela inevitável presença dos erros de medição. Sejam tais erros provocados por falha humana, imperfeição dos equipamentos ou influência das condições ambientais, assim sendo faz-se necessária a repetição das observações para obtenção de uma medida de confiança, o qual pode-se extrair um resultado único que represente a grandeza medida com maior confiança. Isso se dá pelo ajustamento das observações, o qual também pode-se estimar a precisão da solução adoptada.

A precisão dos dados observacionais é crucial em projectos de engenharia, cartografia entre outros, onde pequenos erros podem resultar em grandes desvios nas fases subsequentes. Entre os diversos critérios possíveis para o ajustamento das observações, o mais difundido e aceito na Topografia é aquele que segue o princípio dos Mínimos Quadrados, ou seja, que minimiza a soma do quadrado dos erros aleatórios, ponderados pelos respectivos pesos das observações (Ghilani e Wolf, 2006). O uso do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para ajustar dados Topográficos, é essencial devido à sua capacidade de minimizar os erros aleatórios presentes em qualquer medição Topográfica. Esses erros, podem comprometer a precisão dos levantamentos, o que é crucial em projectos de engenharia. Deste modo, o MMQ garante uma solução que ajusta as observações de forma optimizada, gerando resultados mais confiáveis. O presente trabalho versa sobre o uso dos modelos do MMQ no ajustamento de dados altimétricos, uma que são escassas as literaturas que abordam sobre o uso dos três modelos em ajuste e comparação dos resultados fornecidos de dados altimétricos, sendo que a maioria delas aborda sobre o uso de um modelo para tratamento de dados planimétricos, sem usar os outros modelos para identificar qual deles seria o melhor para ajuste dos mesmos.

1.3. Justificativa

A escolha do presente tema, visa trazer a comparação da precisão dada pelos três modelos do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), identificando qual dos três fornece maior precisão em diferentes cenários altimétricos, promovendo decisões mais seguras e eficientes em levantamentos e obras de Engenharia. Embora o Método dos Mínimos Quadrados seja amplamente utilizado em diversas aplicações Topográficas, poucas pesquisas exploram diretamente a precisão dos diferentes modelos no ajuste de dados altimétricos.

Uma análise comparativa pode fornecer um entendimento mais profundo sobre as limitações e vantagens de cada abordagem, contribuindo assim para o avanço do conhecimento científico na área.

1.4. Relevância

Sendo que existem poucas abordagens que tratam sobre o uso simultâneo e posterior comparação da precisão fornecida pelos diferentes modelos do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) - paramétrico, correlato e combinado - no âmbito científico o presente trabalho avança estudos sobre o uso do MMQ, ao comparar a precisão fornecida por cada modelo, a fim de saber qual dos três melhor adequa-se no Ajustamento de dados altimétricos.

A pesquisa visa mostrar qual dos modelos fornece uma maior precisão quando aplicados no ajuste de dados altimétricos, pois na medida em que estes dados quando ajustados são fundamentais para a implantação de infra-estruturas, especialmente em regiões com instabilidades geológicas. Escolher o modelo de ajustamento adequado pode reduzir ou até mesmo eliminar possíveis danos que comprometam a segurança de obras, como pontes, edifícios ou estradas, reduzindo assim custos com manutenção ou, em casos extremos, evitando acidentes catastróficos.

1.5. Objectivos

O presente trabalho apresenta três modelos do Método dos Mínimos Quadrados - paramétrico, correlatos e combinado, esses que são aplicados no ajustamento de observações em levantamentos Topográficos. O estudo realiza uma análise da precisão gerada por cada modelo, com o objectivo de determinar qual dos três modelos é o mais adequado para o Ajustamento de dados altimétricos.

1.5.1. Geral

Comparar a precisão fornecida pelos modelos do Método dos Mínimos Quadrados no Ajustamento de dados altimétricos.

1.5.2. Específicos

- Definir o Modelo Matemático para o ajuste de dados, tendo em conta os três modelos do MMQ;
- Levantar dados altimétricos em uma poligonal fechada, usando o método de visadas iguais;
- Ajustar os dados levantados usando os três modelos do MMQ; e
- Avaliar a precisão dos dados ajustados por meio de gráficos, usando a Matriz Variância-Covariância das observações.

1.6. Área de Estudo

Apresentada a localização Geográfica e as características Físicas e Geográficas da área de estudo.

1.6.1. Localização Geográfica da área de estudo

A área de estudo está localizada no Campus Universitário Principal da Universidade Eduardo Mondlane, especificamente no Parque de Estacionamento da Faculdade de Ciências. Esta área faz limites A Norte, pela via de acesso principal interna do Campus, a Este pelo edifício do Departamento de Matemática e Informática, a Sul por uma área de circulação que dá acesso a outros edifícios académicos e a Oeste pela estrada de circulação que conecta o interior do campus com as zonas adjacentes.

O Campus Universitário Principal da Universidade Eduardo Mondlane situa-se entre os paralelos

25° 56' 45" S e 25° 57' 15" S e meridianos 32° 35' 30" E e 32° 36' 20" E

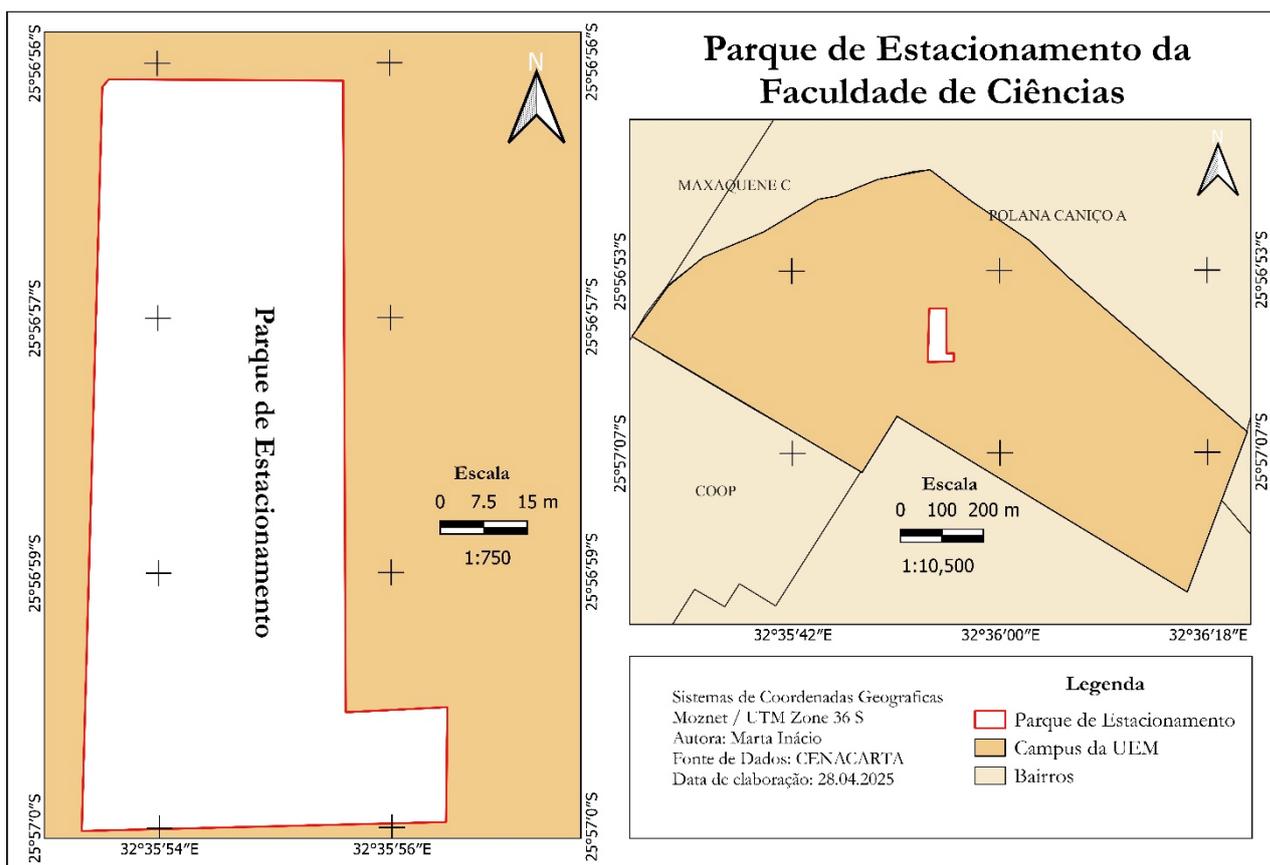


Figura 1: Mapa de Localização Geográfica da área de estudo



Figura 2: Imagem do Parque de Estacionamento

1.6.2. Características Físicas e Geográficas

Nesta secção, apresentam-se as principais características físicas e geográficas da área de estudo, com especial enfoque no relevo e na vegetação predominante. O relevo desempenha um papel fundamental no processo de colecta e ajustamento dos dados altimétricos, pois condiciona as variações de altitude que devem ser cuidadosamente analisadas e modeladas. Por sua vez, a vegetação interfere significativamente nas condições de visibilidade e acessibilidade dos pontos de medição, podendo influenciar a precisão das observações e o tempo necessário para a execução dos levantamentos topográficos.

- **Relevo** - Durante o reconhecimento da área de estudo, notou-se que o relevo é maioritariamente plano, com pequenas áreas de declives suaves. A superfície é regular e nivelada, em algumas zonas próximas aos passeios, nota-se ligeiras diferenças de altura, mas no geral, o terreno apresenta pouca variação altimétrica.

Revisão de Literatura

O segundo Capítulo apresenta a área de estudo e um enquadramento teórico sobre a temática. O capítulo visa abordar conceitos fundamentais para a compreensão do estudo, tais como Topografia, Ajustamento de Observações, Método dos Mínimos Quadrados.

2.1. Topografia

A palavra Topografia é originada do idioma grego Topos Graphen. Após a tradução para a língua portuguesa têm-se Topos significando lugar ou região e Graphen equivalente a descrição, ou seja, descrição de um lugar (Machado *et al.*, 2014).

Existem diversas definições sobre o significado da Topografia. Véras Júnior (2003), define como a ciência que tem por objectivo conhecer, descrever e representar graficamente sobre uma superfície plana, partes da superfície terrestre, desconsiderando a curvatura do planeta Terra. Doubek (1989) afirma que a Topografia tem por objectivo o estudo dos instrumentos e métodos utilizados para obter a representação gráfica de uma porção do terreno sobre uma superfície plana.

Analisando estas definições pode-se constatar que a Topografia é a ciência que ocupa-se do estudo, medições, projecções e representação gráfica de uma porção de terreno, até onde a esfericidade da Terra não interfere na precisão das medidas.

O objectivo principal é efectuar o levantamento (executar medições de ângulos, distâncias e desníveis) que permita representar uma porção da superfície terrestre em uma escala adequada. Às operações efectuadas em campo, com o objectivo de colectar dados para a posterior representação, denomina-se de levantamento Topográfico (Veiga *et al.*, 2012). Na Topografia trabalha-se com medidas (lineares e angulares) realizadas sobre a superfície da Terra e a partir destas medidas são calculados áreas, volumes, coordenadas, etc. Além disto, estas grandezas poderão ser representadas de forma gráfica através de mapas ou plantas (Augusto *et al.*, 2012)

Para tanto é necessário um sólido conhecimento sobre instrumentação, técnicas de medição, métodos de cálculo e estimativa de precisão (Kahmen e Faing, 1998). Este conhecimento que se exige, é importante para que saiba se orientar nos trabalhos práticos de Topografia. Segundo Brinker e Wolf (1997), o trabalho prático da Topografia pode ser dividido em cinco etapas a saber:

- Tomada de decisão- nesta fase ou etapa relacionam-se os métodos de levantamento, equipamentos, posição ou pontos a serem levantados, entre outros.
- Trabalho de campo ou aquisição de dados- efectuam-se as medições e gravação de dados;
- Cálculo e processamento- efectuam-se os cálculos baseados nas medidas obtidas no campo, para a determinação de coordenadas, volumes, etc.;
- Mapeamento ou representação- produção dos mapas ou cartas a partir dos dados colhidos em campo e calculados;
- Locação- nesta etapa faz-se a implantação do projecto no terreno.

Para Veiga *et al.*, (2012), a topografia pode ser dividida em 2 campos de estudo que são a Topometria e Topologia. A Topometria pode ser entendida como o campo que se destina ao estudo dos processos clássicos de medição das distâncias, ângulos e desníveis, que tem como principal objectivo a determinação de posições relativas dos pontos. Entretanto Fróes (2015) divide a topometria em duas partes, a saber:

- Planimetria - consiste na obtenção de ângulos e distâncias horizontais a fim de determinar a projecção do ponto no plano topográfico;
- Altimetria - consiste na obtenção das diferenças de níveis em relação ao terreno, no plano vertical.

No presente trabalho, será dada maior atenção a Topometria altimétrica.

2.2.1. Levantamento Topográfico

Segundo Antunes (1995), levantamento topográfico refere-se à recolha de dados necessários para a elaboração e produção de uma planta ou carta topográfica de uma parcela da superfície. Enquanto isso, Pastana (2010) acrescenta, citando Cordini J (S/d), que o levantamento topográfico é a recolha dos dados com precisão necessária dos elementos suficientes para o desenho da sua Planta topográfica. Estes dados são as coordenadas planimétricas (que definem a posição relativa dos pontos colhidos) e altimétricas (onde temos uma 3ª coordenada respectiva à altitude do ponto colhido). É plausível também dizer que é um processo que, através de dados observacionais (ângulos e distâncias), e com instrumentos adequados e exactidão pretendida, faz-se a implantação e materialização dos pontos de apoio no terreno, determinando suas coordenadas topográficas (Veiga *et al.*, 2012).

A aquisição da informação topográfica para a elaboração de cartas ou plantas é feita com o recurso a três métodos (Fonte, 1996):

- Métodos Topográficos ou Métodos Clássicos – têm como base fundamental a medição de ângulos e distâncias recorrendo a instrumentos tais como teodolitos, níveis e distanciômetros;
- Métodos Fotogramétricos – a informação é obtida por via de fotografias aéreas métricas ou imagens numéricas multiespectrais recolhidas por sensores instalados em satélites artificiais da terra; e
- O Sistema Global de Posicionamento – utiliza receptores dos sinais emitidos pelos satélites da constelação GPS, permitindo a determinação precisa das coordenadas dos locais onde as antenas dos receptores são colocadas.

2.1.1.1. Tipos de Levantamento Topográficos ou Clássicos

Segundo Júnior *et al.*, (2014), o levantamento topográfico pode ser dividido em 3 partes a saber:

- Levantamento Planimétrico - o objectivo principal é colher dados que resultem na obtenção das dimensões da área levantada e as suas coordenadas Planimétricas (Coordenada X e Coordenada Y), isto é, Não se leva em consideração a forma do relevo da área, apenas foca-se nas medidas das distâncias e seus ângulos horizontais, assim como a localização geográfica.
- Levantamento Altimétrico- leva-se em conta somente a forma do relevo da área e as coordenadas altimétricas, isto é, tem-se a ideia do relevo do terreno focalizando o levantamento nas distâncias e ângulos verticais.
- Levantamento Planialtimétrico- tem-se em conta as dimensões e coordenadas planimétricas e altimétricas, isto é, tem-se a ideia do relevo do terreno em questão, estudando-se suas distâncias horizontais e verticais, ângulos horizontais e verticais e localização geográfica.

2.1.1.2. Levantamento Altimétrico

Foca exclusivamente, na determinação das alturas relativas a uma superfície de referência, dos pontos de apoio e/ou dos pontos de detalhes, pressupondo-se o conhecimento de suas posições planimétricas, visando à representação altimétrica da superfície levantada (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1994).

2.1.2. Métodos De Nivelamento Geométrico

O Nivelamento Geométrico, baseia-se na realização de medidas da diferença de nível entre pontos do terreno através de leituras correspondentes a visadas horizontais, obtidas com um nível, em miras colocadas verticalmente nos referidos pontos. Trata-se de um levantamento que tem como objectivo exclusivamente a determinação das alturas relativas a uma superfície de referência, dos pontos de apoio

e/ou dos pontos de detalhe, pressupondo-se o conhecimento das suas posições planimétricas, com vista à representação altimétrica da superfície levantada (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1994).

A divisão dos métodos de nivelamento geométrico pode ser feita da seguinte maneira:

- Visadas Iguais- Consiste no posicionamento de duas miras colocadas à mesma distância do nível, sobre os pontos onde se pretende determinar o desnível, sendo então efectuadas as leituras (figura 1). Trata-se de um processo em que o desnível é determinado pela diferença entre a leitura de ré e a de vante (Veiga, *et al.*, 2012).

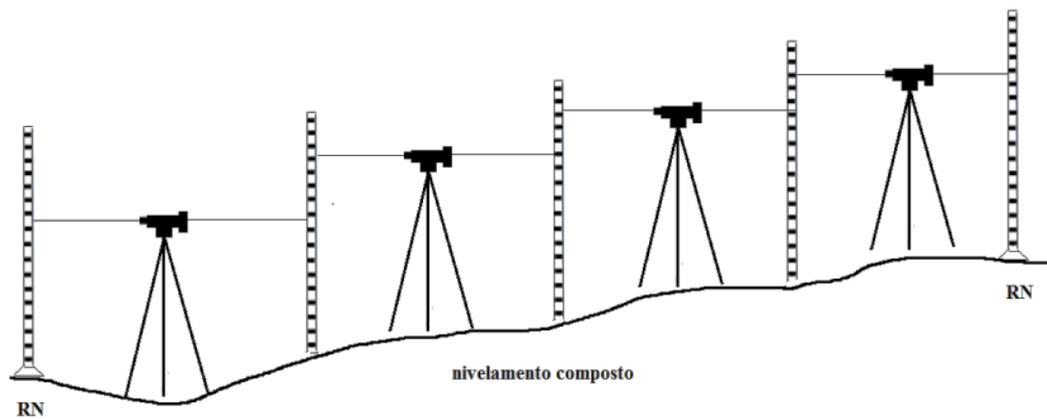


Figura 3:Método de visadas iguais (Veiga, Zanetti, Faggion,2012)

- Visadas Extremas- neste método, faz-se leitura nas extremidades da linha de nivelamento, ou seja o equipamento é posicionado em um ponto e são feitas leituras a frente e atrás.
- Visadas recíprocas- este método é usado principalmente em terrenos acidentados ou obstáculos (rios, lagos, etc). O nivelamento é feito de ambos os lados do obstáculo, e depois os resultados são comparados.
- Visadas Equidistantes- é o mesmo que o método das visadas iguais, o equipamento é colocado entre as duas miras (afrente e atrás).

2.2. Teoria dos Erros

Para Amorim (2005) na medição de uma determinada grandeza, a limitação humana, imperfeição instrumental e instabilidade da natureza são factores que impedem a exactidão absoluta das medidas.

No entanto, para Fonte (1994), a execução das operações de campo leva ao aparecimento de erros que podem ser de 3 tipos a saber:

- Erros Acidentais ou Grosseiros- são normalmente originados por enganos ou descuidos e apresentam uma magnitude muito superior aos outros tipos de erros, isto é, resulta de causas humanas.
- Erros Sistemáticos- repetem-se do mesmo modo sempre que uma determinada acção se repete nas mesmas circunstâncias. São erros que, quando conhecidos, podem sempre ser expressos através de uma formulação matemática.
- Erros Aleatórios- são de pequena amplitude cuja origem é desconhecida e que têm propriedades análogas às propriedades estatísticas de uma amostragem. Pode dizer-se que são os erros existentes em um grupo de observações depois de detectados e eliminados os erros acidentais, identificadas as causas de erros sistemáticos e corrigidas as observações da sua influência.

2.2.1. Resíduo

Denomina-se de resíduo ao valor simétrico do erro aparente, ou seja, é a grandeza com o mesmo valor do erro aparente, porém com sinal contrário (correção do erro). É um dos elementos mais importantes na aplicação do ajustamento de observações, pois o método dos mínimos quadrados e as análises pós-ajustamento fundamentam-se na qualidade desses resíduos, no entanto Gemael (1994) citado por Klein (2011), acrescenta que o resíduo é a diferença entre o valor estimado de uma grandeza e o valor observado para esta grandeza, ou seja, é o valor que corresponde ao erro aparente com o sinal trocado mantendo a sua magnitude.

$$v_i = \bar{l} - l_i \quad (1)$$

Portanto, importa referir que segundo Gemael (1994), o método dos mínimos quadrados, que consiste em minimizar a soma ponderada dos quadrados dos erros aleatórios, equivale a minimizar a soma ponderada dos quadrados dos resíduos, entretanto segundo Amorim (2005), o resíduo é de extrema

importância, pois é imprescindível no teste de qualidade do ajustamento, e a análise dos erros e seus comportamentos é realizada também a partir dos resíduos.

Teoricamente os resíduos são idênticos aos erros (aparente e verdadeiro), com exceção de que os resíduos podem ser calculados e os erros verdadeiros não, pois não se conhece o valor verdadeiro da grandeza. Portanto, são os resíduos e não os erros que são usados na análise e correção das medições, e por serem similares, na prática os termos resíduo e erro são usados indistintamente (Nazareno, 2012).

2.3. Medidas de Dispersão

Vários termos são usados para descrever a qualidade das medidas. É muito comum na Mensuração o uso dos termos precisão e acurácia. O termo precisão ou acurácia aparente é o grau de refinamento com o qual uma grandeza é medida; em outras palavras, significa o quanto os valores de uma série de medidas estão próximos uns dos outros.

A acurácia refere-se ao grau de proximidade de uma estimativa com seus parâmetros (valor verdadeiro) enquanto precisão expressa o grau de proximidade das observações de sua média (Mikhail e Ackemann, 1976).

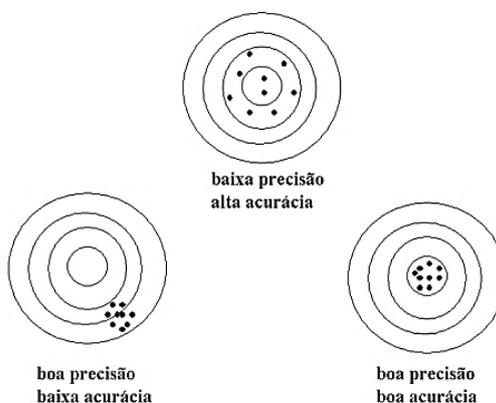


Figura 4: Precisão e Acurácia (Mikhail e Ackemann, 1976)

É conveniente ressaltar que nem sempre uma operação de grande precisão seja necessariamente uma operação acurada. Nas medições os termos mais usados para expressar a precisão são a variância e o desvio padrão ou erro médio quadrático.

2.4.1. Desvio Padrão

O valor mais provável de uma grandeza é aquele para o qual a soma do quadrado dos resíduos é mínima. Assim, baseado no princípio dos mínimos quadrados, o desvio padrão é definido como a raiz da média dos quadrados dos resíduos.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\bar{l} - l_i)^2}{n-1}} \quad (2)$$

Quando se tem mais de 30 observações a fórmula (3) toma a seguinte forma:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\bar{l} - l_i)^2}{n}} \quad (2.1)$$

Entretanto Nazareno (2012) acrescenta que desvio padrão fixa os limites de um intervalo dentro do qual se espera que as medições de uma grandeza estejam nele contidas, e que este pode ser determinado também através das variâncias, fazendo raiz das mesmas.

2.4.1. Atribuição de pesos nas Observações

Pode-se dizer que uma observação é boa se a mesma apresentar um desvio padrão com pequenos valores, isto é, se assumirmos que a observação é boa, ela terá como um de seus factores a precisão relativa da mesma, isto é, uma observação é boa se a mesma apresentar um desvio padrão com pequenos valores (Santos, 2006). Tanto Nazareno (2012) como outros autores concordam que o peso de uma observação é a confiança relativa de um valor observado comparado com algum outro valor, ou seja, este peso é inversamente proporcional ao quadrado do desvio padrão correspondente à observação.

No entanto Nazareno (2012) diz que a tarefa de atribuir pesos a uma observação é a das mais complexas em ajustamento das observações.

Entretanto Nazareno (2012); Santos (2006) concordam que cuidados devem ser tomados na atribuição de pesos numa observação, por esta não ser uma tarefa fácil, devendo assim prestar-se atenção no seguinte:

- Tipo de instrumentos usados nas observações;
- As condições climáticas para o instrumento utilizado;
- O operador dos próprios instrumentos;
- O horário de observação indicado; e

- A instalação no campo de cada instrumento.

Nazareno (2012) destaca que nas medições angulares os pesos são atribuídos proporcionalmente ao número de vezes em que os ângulos são medidos. No nivelamento, os pesos são inversamente proporcionais ao comprimento das seções niveladas. Assim, quanto mais longa a seção nivelada menor será o peso agregado.

2.4.2. Variância

Quando definimos que o valor mais provável de um conjunto de observações, o somatório do quadrado das diferenças entre este valor mais provável e cada uma das observações é mínimo (método dos mínimos quadrados). Este somatório dividido pelo número de observações resulta em uma média denominada variância, cuja expressão é definida como (Amorim, 2005):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 \quad \text{ou} \quad \sigma_x^2 = \frac{V x^T V x}{n-1} \quad (3)$$

2.4.2.1. Variância *a Priori*

A variância da unidade de peso *a priori* é arbitrária, na maioria das vezes o valor escolhido é a unidade $\hat{\sigma}_0^2 = 1$ (Amorim, 2005). No entanto Filho (2005), acrescenta que embora seja um valor arbitrário, geralmente usa-se a unidade para facilitar nos procedimentos computacionais na inversão das matrizes nos cálculos. Segundo Gemael (1994), citado por Gomes (2014) a variância *a priori*, não tem influência no vector solução dos parâmetros estimados na matriz dos coeficientes das equações normais.

2.4.2.2. Variância *a posteriori*

A variância *a posteriori* é estimada após o processo do ajustamento em função dos resíduos. Para se obter o sigma zero *a posteriori*, aplica-se a seguinte fórmula (Amorim, 2005):

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{r} \quad (4)$$

r : número de graus de liberdade obtido pela diferença entre **n** (número de observações) e **u** (número de parâmetros)

O valor da variância “*a posteriori*” calculado com a Eq. (4.2) deve ser estatisticamente igual ao valor da variância “*a priori*”.

Segundo Maia (1999), a variância *a posteriori* tem utilidade no ajustamento, pois é através da comparação desta com a variância *a priori* que se determina a qualidade do ajustamento, no caso de haver uma diferença significativa entre esses factores de variância pode haver presença de erros grosseiros. Coelho (2013) acrescenta que esse factor da variância é indispensável para se determinar a precisão dos parâmetros ajustados, bem como das observações ajustadas.

2.4.3. Covariância

Segundo Dalmolin (1976) a Covariância exprime o grau de dependência entre duas variáveis bidimensionais, no entanto Amorim (2005), acrescenta que a mesma representa uma medida da correlação entre duas observações e é expressa pela seguinte fórmula:

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) \cdot (\bar{y} - y_i) \quad \text{ou} \quad \sigma_{XY} = \frac{V x^T V y}{n-1} \quad (5)$$

2.4.4. Matriz variância-covariância

A matriz variância-covariância (MVC) é a generalização da variância e a covariância de uma variável n -dimensional. Essa matriz é simétrica onde na diagonal principal tem as variâncias e os dois elementos da matriz são as covariâncias (Dalmolin, 1976). Segundo Santos (2006), a matriz variância-covariância é de fundamental importância tanto na fase de pré-ajustamento como na fase de pós-ajustamento, pois através dela se tem as precisões finais das observações ajustadas, efectuando os cálculos da confiabilidade interna da rede, bem como dos erros marginais detectáveis. É de extrema importância estimar as precisões das medidas antes do processo de ajustamento para se estabelecer a MVC das observações (Amorim, 2005), no entanto Carvalho e Leandro (2007) acrescentam que a partir da MVC dos parâmetros estimados pode se determinar com que precisão os parâmetros foram estimados.

A formulação matemática para a MVC é (Amorim, 2005):

$$P = \sigma_0^2 \cdot \sum_{i=1}^b \frac{1}{l_b} \quad (6)$$

2.5. Ajustamento de Observações

Para Gemael *et al.*, (2015), “as observações conduzidas pelo homem se caracterizam pela inevitável presença dos ‘erros de medição’. Sejam tais erros provocados por falha humana (erros grosseiros), imperfeição dos equipamentos ou influência das condições ambientais (erros sistemáticos e aleatórios), faz-se necessária a multiplicação das observações para obtenção de uma medida de confiança, da qual

pode-se extrair um resultado único que represente a grandeza medida com maior confiança. Isso se dá pelo ajustamento das observações, o qual também permite estimar a precisão da solução adoptada" (Gemael *et al.*, 2015).

O ajustamento de observações é um ramo da matemática aplicada que, com a estatística, objectiva estimar valores únicos e mais prováveis para um conjunto de observações (Gemael, 1994). Segundo Dalmolin (2002), "o ajustamento é um ramo da matemática aplicada que tem por objectivo a solução única para problemas onde o número de observações é superabundante e o sistema de equações lineares é inconsistente". Stringhini *et al.*, (2008) diz que a finalidade do ajustamento é estimar, mediante a aplicação de modelos matemáticos adequados, um valor único para cada uma das incógnitas do problema e estimar a precisão de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas.

Dessa forma, o ajustamento de observações se torna uma ferramenta crucial na obtenção de resultados mais precisos e confiáveis, especialmente em contextos onde a qualidade dos dados é comprometida por erros diversos. A técnica de ajustamento não apenas corrige as inconsistências nas observações, mas também permite uma avaliação mais precisa da precisão dos resultados, garantindo maior confiança e validade nas medições e análises realizadas.

2.5.1. Modelo Matemático

Segundo Dalmolin (2002), denomina-se modelo matemático ao sistema teórico ou conceito abstracto através do qual se descreve uma situação física ou um conjunto de acontecimentos. Esta descrição não é necessariamente completa ou exaustiva. Para Santos (2006), um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação de vida real, formalizado com símbolos e expressões matemáticas. Este modelo não representa de forma fiel um fenómeno, porém, relaciona propriedades que interessam às investigações deste mesmo fenómeno.

O modelo matemático também possibilita as interligações entre as variáveis conhecidas e as variáveis desconhecidas de um fenómeno em estudo, de maneira simplificada e que seja adequada aos cálculos (Santos, 2006). O modelo matemático no ajustamento é a combinação dos métodos estocásticos e funcionais. Tanto o modelo estocástico quanto o modelo funcional deve ser correcto se o ajustamento for para determinar os valores mais prováveis, ou seja, é tão importante usar um modelo estocástico correcto quanto usar um modelo funcional correcto. A ponderação incorrecta das observações resultará na determinação incorrecta dos parâmetros desconhecidos (Ghilani, 2010).

2.5.1.1. Modelo Funcional

O autor Dalmolin (2002) refere que um modelo funcional é composto por relações que descrevem a geometria ou características físicas do problema em questão. Ghilani e Wolf (2006) afirmam que o modelo funcional é uma equação ou conjunto de equações que representam ou definem uma condição de ajustamento, que deve ser conhecida *a priori*. Afirmam ainda que se o modelo funcional representa adequadamente a situação física, os erros das observações seguirão a curva de distribuição normal.

Quando as medidas são planejadas, um modelo funcional é usualmente escolhido para representar o sistema físico ou fictício com o qual as medidas estão associadas. As medidas são feitas usualmente com a finalidade de avaliar valores para alguns ou todos os parâmetros do modelo funcional. Em Topografia, Geodesia e Fotogrametria, geralmente trabalha-se com modelos geométricos que dependem do tempo e, ocasionalmente, com modelos dinâmicos (Klein, 2011).

2.5.1.2. Modelo Estocástico

Segundo Gemael (1994), o modelo estocástico é composto pelo conjunto de relações que descrevem as propriedades estatísticas dos elementos envolvidos no modelo funcional. Para Santos (2006), o modelo estocástico não oferece soluções únicas, mas apresenta uma distribuição de soluções associadas a uma probabilidade; ou seja, o modelo incorpora elementos probabilísticos onde os resultados são expressos em termos de probabilidade.

Gemael (1994) menciona que inúmeras distribuições teóricas de probabilidades de variáveis aleatórias (modelo estocástico) têm sido estudadas e que o conhecimento destas distribuições leva o investigador a escolher o modelo que melhor se adapta ao seu problema.

2.5.2. Princípio do Método dos Mínimos Quadrados

O MMQ é uma técnica de otimização de valores em relação às incógnitas, visando obter resultados matematicamente melhores (resultados ajustados) e a precisão das observações a partir das observações brutas realizadas em campo. Usualmente, é necessário haver mais observações do que incógnita para a aplicação do MMQ (Gemael *et al.*, 2015).

Neste trabalho, considera-se o MMQ na forma matricial e que foram feitas em campo m observações e que associado às observações existem parâmetros que são as n incógnitas, lembrando que $m > n$. Deve-se levar em consideração que as observações são funções dos parâmetros (incógnitas).

Amorim (2005) diz que o principio dos mínimos quadrados e minimizar a soma dos quadrados dos resíduos resultante da subtracção do valor mais provável de uma grandeza medida as n observações feitas sobre a mesma, entretanto segundo Schmidt (2016) acrescentam que o objectivo dessa minimização e resolver os valores de parâmetros e observações através da superabundância de observações, extraindo um resultado único que representa com maior confiança a grandeza medida e os parâmetros estimados. Em caso de diferenças de precisão das observações, deve-se multiplicar os resíduos com os seus respectivos pesos (Gemael,1994) citados por Maia (1999).

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad (7)$$

A equação resulta de observação de igual peso:

$$\sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2 = \min \quad (7.1)$$

Obs.: Quanto melhor a precisão do equipamento de medida, maior o valor do peso.

Segundo Maia (1999) actualmente, a linguagem matricial é mais usual devido a sua simplicidade e facilidade de cálculo.

$$\phi = V^T V = \sum_{i=1}^n (\hat{x} - l_i)^2 = \text{mínimo} \text{ ou } V^T P V = \min \quad (7.2)$$

Onde: **V**- vector coluna dos resíduos; **P**- matriz quadrada dos pesos.

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_n \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Obs.: A matriz de peso mostrada corresponde à observações independentes (observações não correlacionadas), pois apresenta elementos apenas na diagonal principal. As observacoes ajustadas serao os elementos do Vector $L_a = L_b + V$ sendo L_b o vector das observacoes brutas e V o vector dos residuos que minimizam a funcao ϕ (Fonte,1994).

2.5.3. Matriz dos Pesos

Para montar a matriz dos pesos das observações, torna-se necessário que se conheça as precisões com que as mesmas foram determinadas. Em casos que não e possível determinar as precisões, usa-se a precisão nominal do instrumento. Considerando que não existem correlações entre as observações, a

matriz será diagonal (Gomes,2014). No entanto Moraes (1997) diz que tendo as precisões para compor a matriz peso basta fazer o inverso dos quadrados das precisões. Para Klein *et al.*, (2011) os elementos da matriz peso são escolhidos de modo a ponderar a influência de observações específicas sobre a estimativa do vector dos parâmetros.

Segundo Gemael (1994) citado por Klein *et al.*, (2011) observações com maior peso terão maior importância no processo do ajustamento, ou seja maior influência na estimativa dos parâmetros.

2.5.4. Finalidade do Método dos Mínimos Quadrados

Segundo Teunissen (2006), citado por Klein *et al.*, (2011) devido à inevitável existência de erros nas observações, geralmente o Geodesta trabalha com observações redundantes, sendo duas as principais razões para isto visa melhorar a acurácia dos resultados estimados e visa detectar a possível presença de erros (não aleatórios) nas observações.

Porém, o uso de observações redundantes no modelo matemático resulta na inconsistência do mesmo (ou seja, na não existência de solução única e exacta). Adicionando um vector de resíduos ao sistema de equações, ou seja, admitindo que as observações possuem erros, este passa a ser matematicamente consistente, porém com infinitas soluções (Dalmolin, 2002). Para a solução única destes sistemas de equações redundantes e inconsistentes, o critério mais adoptado nas ciências Geodésicas é o MMQ, ou seja, aquela solução para os parâmetros incógnitas que minimiza a soma do quadrado dos resíduos, ponderados pelos respectivos pesos das observações (Ghilani e Wolf, 2012).

Quando apenas erros de natureza aleatória contaminam as observações, o método dos mínimos quadrados é dito ser um estimador imparcial. Além disso, quando a ponderação de observações é tomada em função de suas variâncias e covariâncias, correctamente determinada, o MMQ é dito o melhor estimador linear imparcial, e ainda, quando os erros aleatórios seguem distribuição normal multivariada, a solução pelo MMQ coincide com a solução de máxima verossimilhança (Gemael, 1994).Entretanto, quando as observações também estão contaminadas por erros não aleatórios, estes podem exercer influência na solução do ajustamento (ou seja, nos parâmetros estimados), e assim estas propriedades do MMQ não são satisfeitas.

2.6. Método dos Mínimos quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), desde a sua aplicação pela primeira vez de maneira independente por Gauss (1809) e Legendre (1806), tem-se transformado no principal método de ajustamento de observações (Garnes *et al.*,1997). Entretanto Segundo e Schmidt (2016), dizem que o

MMQ e usado na existência de erros randômicos e observações superabundantes, para a determinação da estimativa única dos parâmetros ajustados e avaliação da sua variância.

Segundo Gemael (1994) e Dalmolin (2002) citados por Segundo e Schmidt (2016) dizem que o princípio fundamental do MMQ é que a soma dos quadrados dos resíduos seja minimizado.

Segundo Dalmolin (2017) actualmente a tarefa de calcular um conjunto de parâmetros (variáveis) a partir das observações utilizando a técnica dos mínimos quadrados se tornou rotina, principalmente nas áreas de ciências geodésicas. Ela tem-se tornado cada vez mais importante para avaliar as observações e os resultados em termos de qualidade e uniformidade.

Segundo Antunes (1995) antes do ajustamento deve-se remover os erros grosseiros (advindos de causas humanas) e corrigir os erros sistemáticos, isto é, o ajustamento é feito nas observações contaminadas por erros aleatórios.

Segundo Machado (2014), o ajustamento por MMQ está dividido em três tipos, nomeadamente:

- Modelo Paramétrico ou Modelo das equações de observação $L_a = F(X_a)$ - Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.
- Modelo dos Correlatos ou Modelo das equações de condição $F(L_a) = 0$ - Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).
- Modelo combinado ou Modelo Generalizado $F(X_a, L_a) = 0$ - Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explicitar (não se consegue separá-los).

No presente trabalho serão abordados os três métodos dos mínimos quadrados, com a finalidade de se analisar a precisão dada por cada modelo.

2.6.1. Método Paramétrico

Para Gemael (1994), na aplicação do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), utilizando o Método paramétrico deve-se tomar como melhor estimativa para um valor x , o valor que torna mínima a soma dos quadrados dos resíduos, caso as observações não forneçam o mesmo grau de confiança devem ser homogeneizadas pelos seus respectivos pesos. No ajustamento das observações as grandezas que não são obtidas directamente (obtidas em campo) recebem o nome de parâmetros e os seus cálculos envolvem a obtenção de grandezas geométricas como ângulos e distâncias (Ghilani, 2010).

O Método paramétrico é dado pela equação:

$$L_a = L_b + V \quad (8)$$

Onde: \mathbf{L}_b = Vector (n x l) dos valores observados;

\mathbf{V} = Vector (n x l) dos resíduos;

\mathbf{L}_a = Vector (n x l) dos valores observados ajustados.

$$\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X} \quad (8.1)$$

Onde: \mathbf{X}_0 = Vector (n x l) com valores aproximados dos parâmetros;

\mathbf{X} = Vector correcção (m x l);

\mathbf{X}_a = Vector dos parâmetros ajustados (um dos objectivos).

De acordo com Gemael et al., (2015), os valores observados ajustados (7) podem ser relacionados explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados (8).

$$\mathbf{L}_a = F(\mathbf{X}_a) \quad (9)$$

Substituindo as equações (7) e (8) em (9), e linearizando com série de Taylor, tem-se:

$$\mathbf{L}_b + \mathbf{V} = F(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}) = F(\mathbf{X}_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_a} \right|_{\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_0} * \mathbf{X} \quad (9.1)$$

Denotando \mathbf{L}_0 como o vector (m x l) das observações aproximadas, e \mathbf{X}_0 , tem-se:

$$\mathbf{L}_0 = F(\mathbf{X}_0) \quad (9.2)$$

e a matriz Design ou matriz das derivadas parciais \mathbf{A} m x n, com n equações de observação e m incógnitas:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}_a} \right|_{\mathbf{X}_a = \mathbf{X}_0} \quad (10)$$

Logo, obtém-se as seguintes equações:

$$\mathbf{L}_b + \mathbf{V} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (10.1)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{L}_0 - \mathbf{L}_b \quad (10.2)$$

Fazendo-se:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 - \mathbf{L}_b \quad (10.3)$$

Obtém-se o modelo matemático linearizado do método dos parâmetros:

$${}_m\mathbf{V}_1 = {}_m\mathbf{A}_n * {}_n\mathbf{X}_1 + {}_m\mathbf{L}_1 \quad (10.4)$$

Usando a forma matricial da equação (10), tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_{a1}} & \frac{\partial f_1}{\partial X_{a2}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{an}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_{a1}} & \frac{\partial f_2}{\partial X_{a2}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{an}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_{a1}} & \frac{\partial f_n}{\partial X_{a2}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial X_{an}} \end{bmatrix}_{X_0} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

Todo o processo do modelo paramétrico resume-se pelo seguinte diagrama:

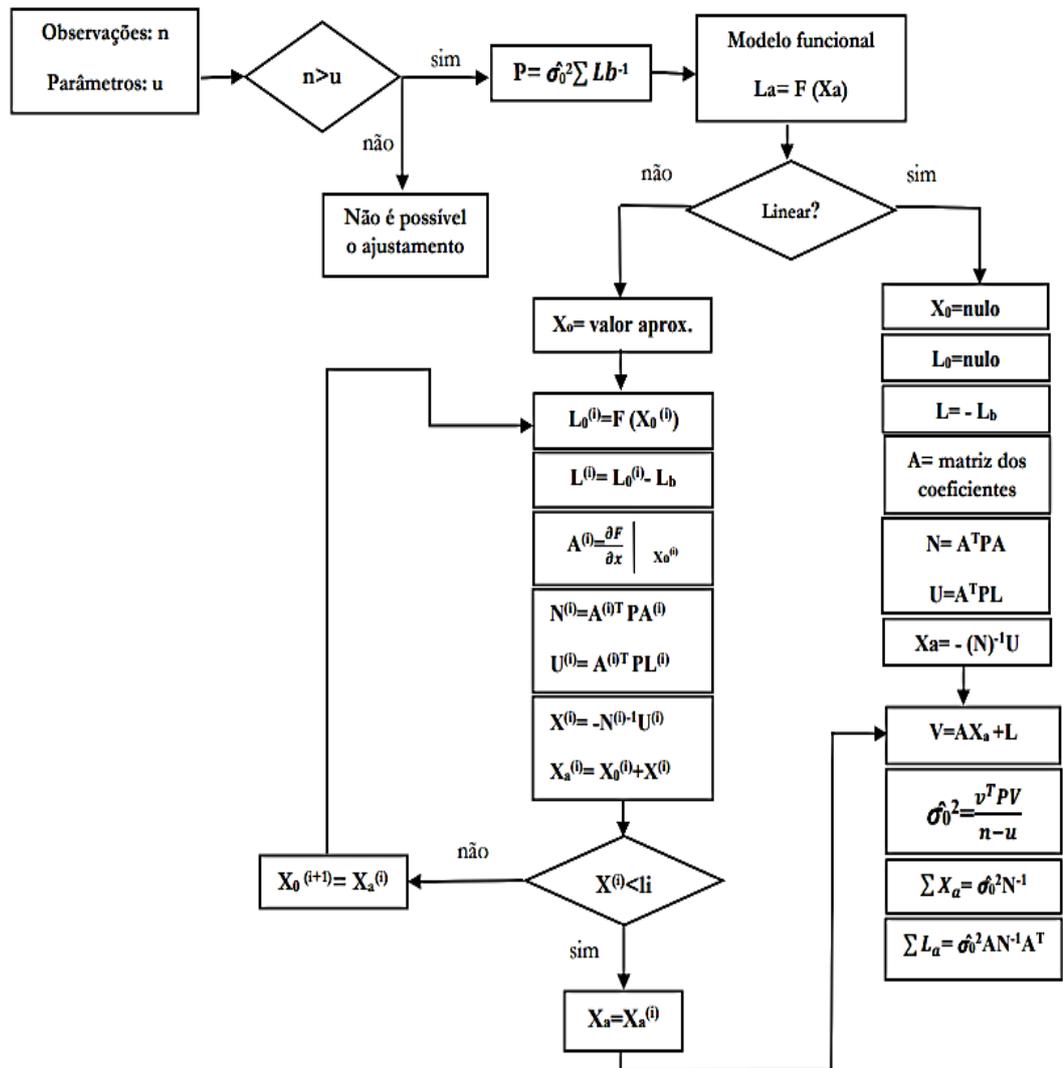


Figura 5: Diagrama do modelo Paramétrico (Adaptado pelo autor)

2.6.2. Método dos Correlatos

Segundo Gemael *et al.*, (2015);Dalmolin (1976), o método das equações de condição, como também é chamado, não depende de parâmetros, sendo apenas modelado pelos valores observados ajustados. Porém ainda é possível obter tais parâmetros ajustados por meio de equações que o relacionem com as observações ajustadas. O modelo matemático será uma função das observações ajustadas, na forma

$$F(L_a) = 0 \quad (11)$$

O vector das observações ajustadas L_a tem dimensão $m \times 1$, onde m é o número de 2 observações obtidas em campo. Ressalta-se que este é o mesmo vector utilizado no método paramétrico. Portanto, substituindo (7) em (11), tem-se:

$$F(L_b + V) = 0 \quad (12)$$

Linearizando por série de Taylor:

$$F(L_b + V) = F(L_b) + \frac{\partial F}{\partial L_a} \bigg|_{L_b} (L_a - L_b)_{L_b} = 0 \quad (12.1)$$

A função $F(L_b)$ é designada erro de fechamento, sendo representada por:

$$W = F(L_b) \quad (12.2)$$

O vector erro de fechamento W possui dimensão $m \times 1$, e em situação ideal, seu valor corresponde a zero. Porém, devido aos diversos erros presentes em um levantamento topográfico, isto não acontece, sendo necessário ajustar as observações para minimizar as propagações.

Neste método também há a matriz $m \times n$ das derivadas parciais, denotada por B . Seu modelo matemático é dado por:

$$B = \frac{\partial F}{\partial L_a} \bigg|_{L_b} \quad (13)$$

Assim, tem-se que:

$$BV + W = 0 \quad (13.1)$$

Todo o processo dos correlatos resume-se pelo seguinte diagrama:

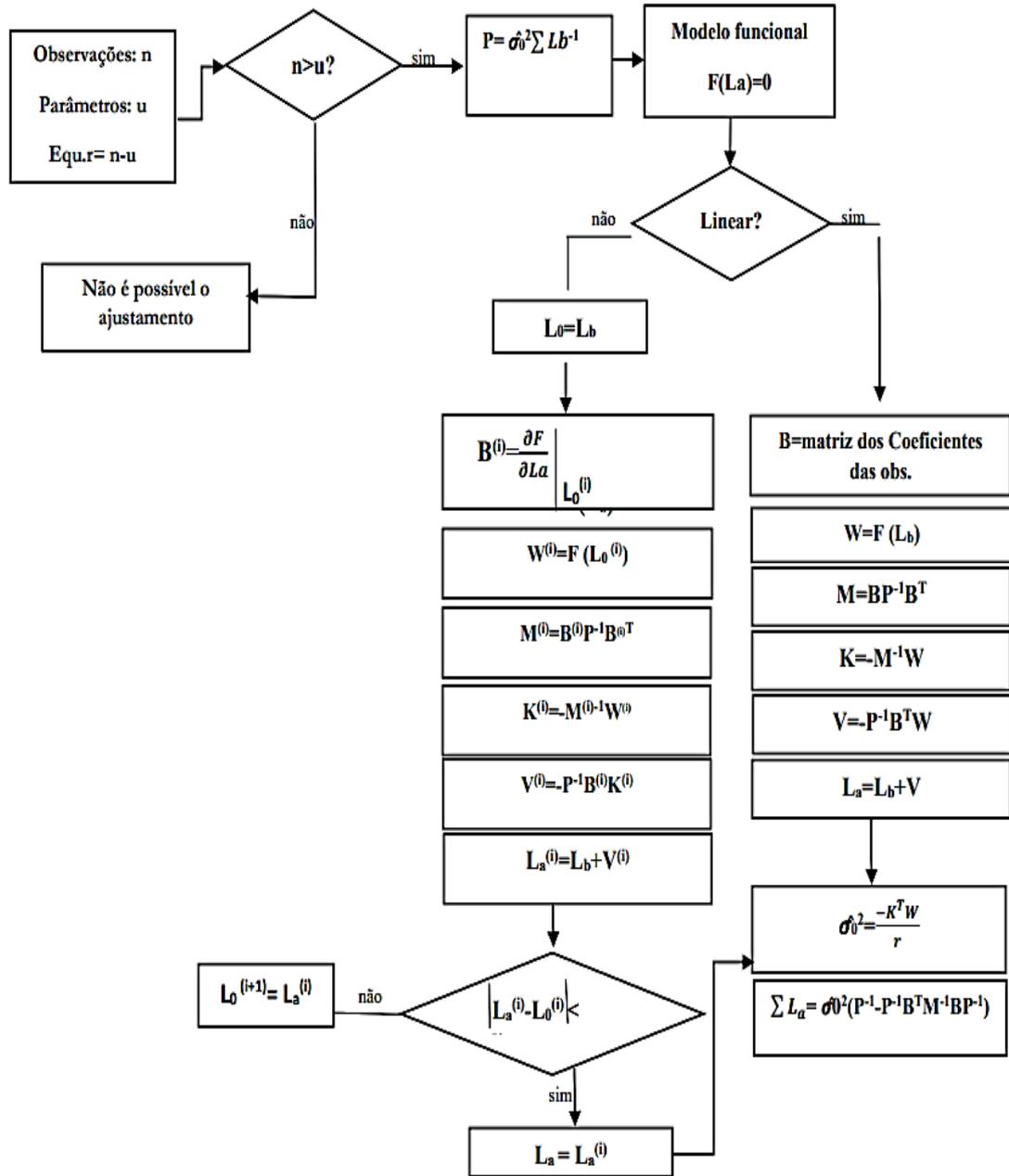


Figure 6: Diagrama do modelo dos Correlatos (Adaptado pelo autor)

2.6.3. Modelo Combinado

Dalmolin (1976) afirma que o método combinado é um caso mais geral de MMQ, onde aparecem simultaneamente parâmetros ajustados e observações ajustadas, ligados por uma função não explícita (Gemael et al., 2015).

Seu modelo matemático é expresso por:

$$F(L_a, X_a) = 0 \tag{14}$$

Linearizando por séries de Taylor a equação (14) e utilizando as equações (10) e (13):

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{X_a=X_0}; B = \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{L_a=L_b} \quad (15)$$

$$W = F(L_b, X_0) \quad (15.1)$$

Resulta em:

$$F(L_a, X_a) = F(X_0, X, L_b + V) \quad (15.2)$$

$$F(X_0, X, L_b + V) \approx F(X_0, L_b) + \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{(X_a=X_0)} (X_a - X_0) + \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{(L_a=L_b)} (L_a - L_b) = 0 \quad (15.3)$$

$$AX + BV + W = 0 \quad (15.4)$$

Admitindo que \mathbf{n} sejam os valores observados, \mathbf{u} os parâmetros e \mathbf{r} o número de equações, as dimensões para as matrizes fica:

$${}_r A_{n \times n} X_l + {}_r B_{n \times n} V_l + {}_r W_l = {}_r O_l \quad (15.5)$$

O grau de liberdade s é calculado por $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{n}$.

Todo o processo do modelo combinado resume-se pelo seguinte diagrama:

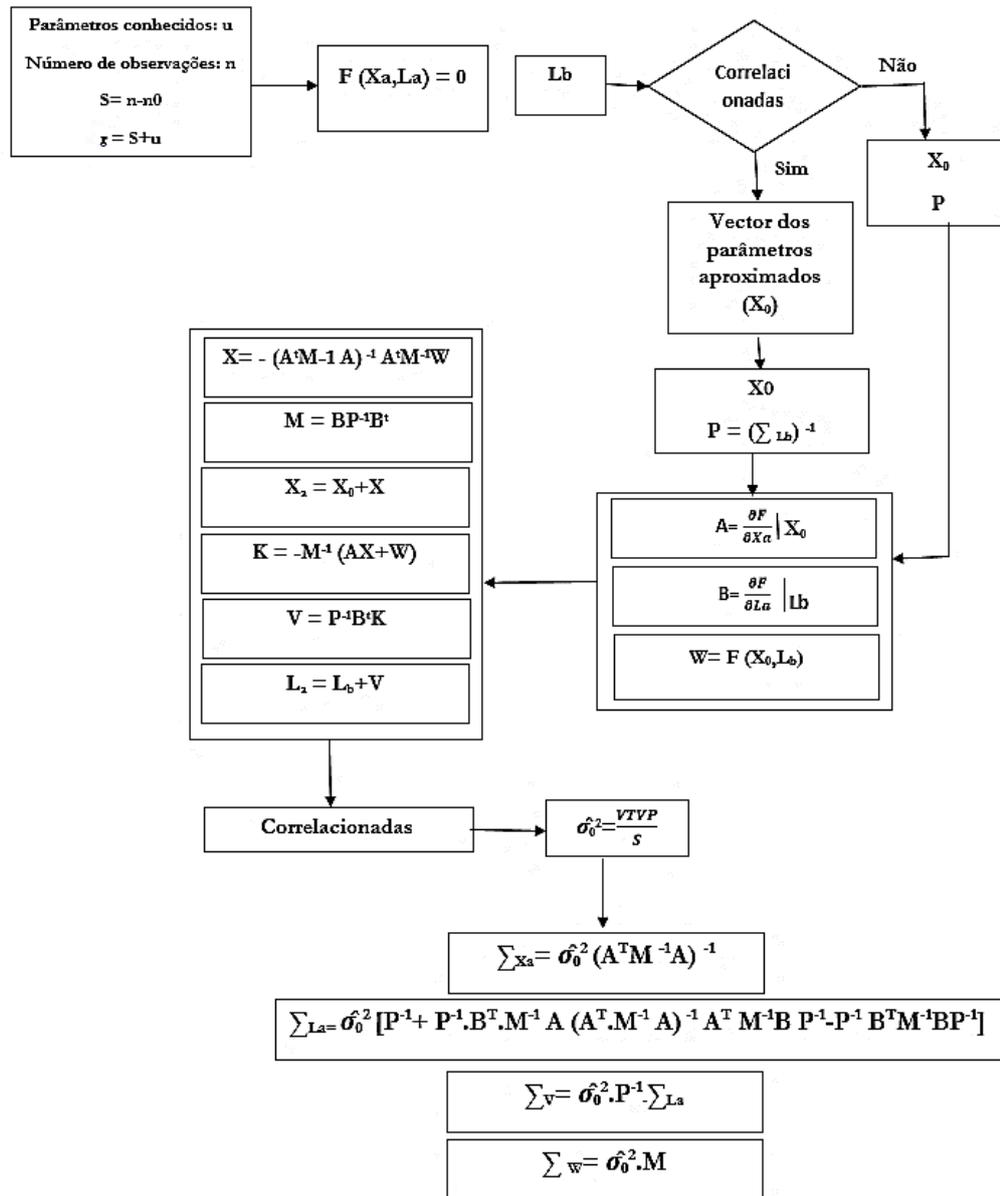


Figure 7: Diagrama do modelo Combinado (Adaptado pelo autor)

2.7. Diferenças e pontos comuns entre os modelos do MMQ

Os três modelos do Método dos Mínimos Quadrados (paramétrico, correlatos e combinado) utilizam como *input* as observações e os respectivos pesos, mas diferem na forma de ajustar e tratar os dados.

O modelo paramétrico baseia-se em observações e parâmetros explícitos (como cotas ou coordenadas planimétricas), gerando como *output* as estimativas ajustadas desses parâmetros. O modelo de correlatos considera apenas as relações entre observações, sem envolver parâmetros directamente, focando-se na verificação da consistência interna dos dados. Já o modelo combinado integra ambos, ajustando simultaneamente os parâmetros e as relações entre observações.

2.8. Controle de Qualidade do Ajustamento

O controle de qualidade de ajustamento dispõe de mecanismo de teste estatístico para detectar e remover possíveis erros grosseiros e, além disso, avaliar os efeitos dos erros grosseiros não detectáveis nos parâmetros desconhecidos. A eficiência desses testes dependerá da controlabilidade (número de redundância) das observações, ou seja, quanto mais controláveis forem as observações, maior será a probabilidade de se detectar falhas através dos testes estatísticos. Esse controle sobre as observações expressa a confiabilidade do ajustamento (Amorim, 2005).

2.8.1. Teste de Hipótese

Através dos dados amostrais, é possível atribuir um valor hipotético, chamado de hipótese nula (ou hipótese básica), designada por H_0 , sendo testada a fim de concluir sobre sua aceitação ou rejeição, enquanto qualquer outra hipótese é chamada de hipótese alternativa (ou hipótese complementar), designada por H_1 (Gemael *et al.*, 2015).

Ainda baseado em Gemael *et al.*, 2015, inicialmente, pressupõe-se que a hipótese nula H_0 seja verdadeira, analisando sua distribuição e concluir sobre sua aceitação ou rejeição.

Salienta-se que tal teste não anula a aceitação de hipótese sendo esta inverídica, ou o contrário. Portanto, é possível que haja erro em um teste, mesmo este sendo aceito. Então há quatro possibilidades:

- a) Aceitar hipótese realmente verdadeira;
- b) Rejeitar hipótese realmente verdadeira – erro tipo I;
- c) Rejeitar hipótese realmente falsa;
- d) Aceitar hipótese realmente falsa – erro tipo II.

O erro tipo I (ou erro alfa) é chamado de nível de significância α e é a probabilidade máxima admitida de rejeitar hipótese verdadeira. Usualmente, $\alpha = 0,05$ (5%) ou $\alpha = 0,1$ (10%). O erro tipo II (ou erro beta) trata-se da probabilidade de aceitar uma hipótese falsa. Tais erros são expressos, respectivamente, por:

$$\alpha = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira});$$

$$\beta = P(\text{Aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}).$$

O poder ou potência do teste é a probabilidade de aceitar hipótese verdadeira ou rejeitar hipótese falsa, e é expresso por:

$$1 - \alpha = P(\text{Aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira});$$

$$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}).$$

2.8.2. Distribuição Qui-Quadrado χ^2

De acordo com Gemael (1994), o teste de hipótese baseado na distribuição qui-quadrado χ^2 é aplicado se houver discrepância entre a variância *a priori* σ_0^2 e a variância a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ para avaliar se a mesma é significativa a um certo nível de confiança. O teste é realizado considerando duas hipóteses:

- Hipótese básica $H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$
- Hipótese alternativa $H_1 : \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Conhecidos os resíduos \mathbf{V} e o grau de liberdade s do ajustamento, é possível calcular o valor amostral do qui-quadrado χ^2 relacionando a variância *a priori* σ_0^2 e a variância a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ (variância amostral):

$$X^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \cdot S \quad (16)$$

Substituindo a fórmula (41) em (133), tem-se:

$$X^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{\sigma_0^2} \quad (16.1)$$

A hipótese básica será aceita se o valor amostral do qui-quadrado χ^2 estiver no intervalo $1-\alpha$, entre os valores tabelados de qui-quadrado χ^2 teórico de $\frac{\alpha}{2}$ e $1 - \frac{\alpha}{2}$ conforme Figura :

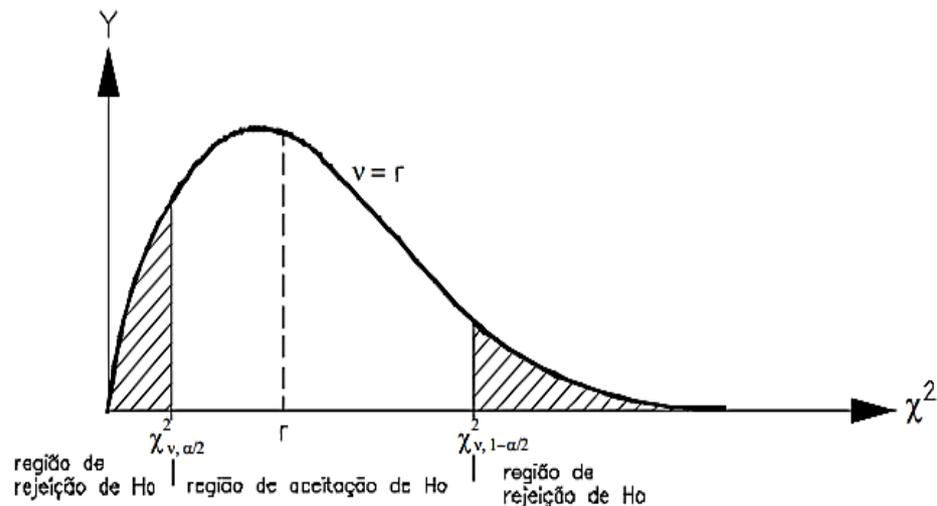


Figure 8:Gráfico de região de aceitação do valor amostral de X^2 (Amorim,2006)

Portanto, tem-se que:

$$X^2_{s, \frac{\alpha}{2}} < X^2 < X^2_{s, 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

Caso o teste rejeite os resultados, deve-se proceder a uma análise do ajustamento, podendo haver erro na MVC dos valores observados, os resíduos estarem excessivamente grandes em decorrência de erros grosseiros ou sistemáticos, o modelo matemático não ser consistente com as observações, o sistema ser mal condicionado, etc. (Gemael *et al.*, 2015).

2.8.3. Teste Unilateral

Quando o teste global é usado para detectar “*outliers*” temos a expectativa de que a variância “*a posteriori*” seja maior que a variância “*a priori*” ($\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$). Portanto, as hipóteses a serem testadas são:

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$$

Assim o teste recomendado é:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \frac{X^2_{r, 1-\alpha}}{r} \quad \text{Ou} \quad \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < F_{r, \infty; 1-\alpha}$$

Onde: $F_{r, \infty; 1-\alpha}$: Teste “F” para os graus de liberdade do numerador igual e a r e do denominador ∞ , e nível de significância $1-\alpha$.

2.8.4. Teste Bilateral

Conforme os propósitos do teste definido pela hipótese nula, podemos aplicar um teste bilateral (duas caudas) ou unilateral (uma cauda) (Amorim, 2005).

Entretanto Santos (2006), diz que com o teste bilateral espera-se obter para a variância *a posteriori* um valor igual a variância *priori* não sendo compatíveis valores menor e nem maiores. Klein (2011) acrescenta que este tipo de teste é usado quando se pretende determinar um intervalo de confiança para o factor da variância.

Então para o nível de significância α , de acordo com o princípio do teste estatístico bilateral, a hipótese nula não será rejeitada, se (Amorim, 2006):

$$X^2_{r, \frac{\alpha}{2}} < X^2 < X^2_{r, \frac{\alpha}{2}}$$

Onde:

X^2_{r} é o valor tabelado da distribuição qui-quadrado

X^2_c é o qui-quadrado amostral calculado

Nota: Para calcular o X^2_c deve-se primeiro determinar o vector dos resíduos, usado a seguinte expressão:

$$X^2_c = \hat{\sigma}_0^2 \frac{r}{\sigma_0^2} \quad (17)$$

Material e Métodos

O terceiro capítulo destaca os materiais e métodos usados durante a realização do trabalho, apresentando de forma detalhada os procedimentos usados para a concepção do trabalho.

3.1.Procedimentos metodológicos

Esta secção descreve os métodos e procedimentos adoptados para a realização do trabalho de campo e análise de dados. É apresentado o tipo de investigação empregue, os equipamentos usados em campo, assim como os equipamentos usados no gabinete e a função de cada um deles.

3.1.1.Tipo de Investigação

A investigação será quantitativa e qualitativa devido à natureza matemática do MMQ e à necessidade de realizar ajustamentos precisos e eficientes dos dados observacionais. Este enfoque é apropriado, pois envolve a análise de dados numéricos obtidos a partir de observações altimétricas (desníveis e distâncias) numa poligonal fechada, permitindo a análise estatística dos resultados. E também será qualitativa por avaliar quais dos três modelos do MMQ oferece maior precisão no ajuste dos dados altimétricos para a poligonal levantada.

3.1.2.Equipamentos usados no campo

Para a realização do estudo, foi necessário fazer-se o levantamento de dados, o levantamento destes dados foi com recurso aos equipamentos descritos na tabela 1.

Tabela 1:Equipamentos usados no campo

Equipamento/Material	Descrição	Precisão	Função
Receptor GNSS	Receptores <i>Full-featured GPS</i> Handheld GPSMAP 66S da marca Garmin	3 Metros	Usado para determinar as coordenadas planialtimétricas dos vértices da poligonal
Nível Óptico Completo	Níveis ópticos da Marca Nikon, Autolevels 360° AX-2s	$\pm 2,5\text{mm/km}$	Usado para realizar o nivelamento
Trena	Trena de fibra da marca SHUNSHIANG com 100 m de comprimento.	-	Medir distâncias horizontais entre os piquetes da linha de nivelamento.
Caderneta de registo de dados	Tabelas de nivelamento geométrico simples	-	Usada para registo de dados

3.1.3. Equipamentos utilizados no Gabinete

Após o levantamento dos dados no campo, foi necessário processá-los no gabinete de forma a analisar, processar e validar os mesmos. Para isso utilizou-se os equipamentos descritos na tabela 2 abaixo.

Tabela 2: Equipamentos usados no Gabinete

Equipamento/Material	Função
	Organização e elaboração do relatório
Word 2013	
Excel 2013	Usado para a estimativa da solução adoptada, cálculo das MVC's e, matrizes A,B e P
Octave GNU	Usado para escrever o código que executou os modelos do MMQ
QGIS V.3.24 Tisler	Usado para a elaboração de 2 mapas, 1 com coordenadas dos vértices da poligonal e 1 com a localização geográfica da área de estudo.
Computador portátil (HP)	Foram instalados programas Computacionais para o processamento de dados
Draw. IO	Usado para o desenho do Fluxograma Metodológico
Zotero	Usado para gerir e organizar as referências bibliográficas e fazer a citação automática no formato correcto.

3.2. Métodos

Para a realização do trabalho, foram usados os seguintes métodos: Observações directas, determinação do número de observações e das equações para os 3 modelos, formulação das equações dos elementos envolvidos no problema e a Composição da Matriz dos Pesos.

3.2.1. Observações directas

De acordo com Benitez e Domeniconi (2012), a observação directa refere-se à medição ou verificação de variáveis (como altitudes, distâncias ou ângulos) directamente no terreno, utilizando instrumentos de medição sobre os pontos de interesse. Este método é fundamental em levantamentos topográficos, onde os dados são colectados empiricamente, sem a intervenção de modelos ou estimativas indirectas.

Veiga *et al.*, (2012) acrescenta que para grandezas com valores estabelecidos, a observação directa é a comparação entre este valor (verdadeiro) e o observado por meio do instrumento de medição.

No presente trabalho, as observações directas consistiram em:

- Reconhecimento da área de estudo – o reconhecimento da área consistiu num levantamento preliminar para entender as características físico-geográficas do terreno, bem como identificar eventuais dificuldades, obstáculos e oportunidades que possam impactar a execução dos trabalhos de campo. Para o presente trabalho, o reconhecimento foi realizado de forma directa (reconhecimento visual), percorrendo a área de interesse com o objectivo de identificar o melhor local para a implantação da poligonal, assegurando condições óptimas de trabalho e realizando uma inspecção visual detalhada das características do terreno. Durante esta etapa, também foi efectuado o levantamento das coordenadas planimétricas dos vértices do parque de estacionamento, com o objectivo de permitir a sua posterior representação gráfica, utilizando o software QGIS.

Durante o reconhecimento, foram observados locais com presença de vegetação rasteira, vias de acesso e comunicação – sendo algumas vias terciárias de terra abatida e uma via asfaltada. Verificou-se ainda que as infra-estruturas existentes no interior e exterior da área são maioritariamente destinadas a fins educacionais.

Além disso, foram avaliadas as condições de visibilidade entre pontos, a estabilidade do terreno para o posicionamento dos equipamentos e a existência de fontes potenciais de interferência. Com base nestas observações, decidiu-se implantar a poligonal numa zona do parque de estacionamento caracterizada por baixa circulação de veículos e pessoas. Esta escolha visou garantir maior segurança para a equipa de campo, melhores condições para a execução das medições, maior estabilidade dos equipamentos e visibilidade directa entre os vértices da poligonal.

O reconhecimento prévio mostrou-se uma etapa essencial para o planeamento eficiente do levantamento, permitindo antecipar desafios, otimizar os procedimentos de campo e garantir a qualidade e precisão dos dados recolhidos

- Implantação do Ponto de apoio - durante um levantamento topográfico, normalmente são definidos pontos de apoio, conhecidos como pontos de apoio topográfico. Estes pontos são responsáveis pela amarração do levantamento (Santos *et al.*, 2020). De acordo com Almeida (2015), a determinação desses pontos de apoio deve ser efectuada através de estações GNSS, utilizando receptores GNSS de alta precisão.

Além disso, Silva e Costa (2017) afirmam que uma base é um lado de uma poligonal onde inicialmente são implantados os pontos. Posteriormente, mede-se a distância entre os pontos, escolhendo-se um deles como ponto de partida, a partir do qual se iniciam as observações de ângulos e distâncias.

No presente trabalho, para a implantação da base, foi escolhido um local dentro da área de estudo, onde colheram-se as coordenadas em Universal Transverse Mercator (UTM) e a altitude do ponto, com recurso a um receptor GNSS.

- Medição dos desníveis e distâncias- de acordo com Maciel (2022), o desnível é a diferença de altura entre pontos do terreno ou de outras feições, como árvores, torres, edifícios ou montes de material. No terreno, essa diferença é obtida por meio de medições topográficas, como o nivelamento geométrico ou trigonométrico, que permitem determinar com precisão as altitudes relativas entre diferentes pontos.

Segundo Vasconcelos (2019), as ordens de nivelamento são quatro e elas são classificadas de acordo com a precisão exigida para cada tipo de levantamento. A 1^a ordem é a mais precisa, com erro máximo permitido de 1 a 2 mm por quilómetros, a 2^a ordem com erro de 3 a 5 mm por quilómetros, a 3^a ordem com erro máximo de 10 a 20 mm por quilómetros e a 4^a ordem com erro máximo de 20 a 30 mm por quilómetros. Neste trabalho optou-se por usar a 4^a ordem de nivelamento, conforme a classificação de Vasconcelos (2019), esta escolha foi feita devido a natureza do levantamento, que exige menor precisão, uma vez que o objectivo do trabalho é analisar a precisão dos modelos do MMQ.

A medição distâncias e desníveis foram feitos no dia 13 de Março do corrente ano, em um dia em que a temperatura era de 30°C, o levantamento iniciou as 14:00 e estendeu-se ate o período das 16:00.

Para este trabalho o método usado para a medição de desníveis foi o método de visadas iguais, no qual o desnível foi determinado pela diferença entre a leitura de ré e a de vante, e para a medição das distâncias fez-se a leitura directa (o valor é obtido imediatamente, sem a necessidade de cálculos auxiliares). Este método equilibra as distâncias entre as visadas de ré e de vante, anulando deste modo os efeitos de erros de refração atmosférica e a curvatura da terra, para além de reduzir o impacto de eventuais imperfeições, nos equipamentos e nas leituras, proporcionando dados mais confiáveis e consistentes.

Os resultados dos dados levantados em campo são apresentados na tabela 4 do capítulo 4.

- Determinação do número de observações e das equações para os 3 modelos -a qualidade do ajustamento obtido com o MMQ depende fundamentalmente da escolha do modelo e da correcta determinação de observações necessárias (Fonte, 1994). Antes do processo do ajustamento foi necessário determinar o número de observações para os três modelos do MMQ (paramétrico, correlatos e combinado).

Para o Modelo Paramétrico, uma vez que as duas poligonais têm a mesma geometria, e os dados foram levantados sob condições semelhantes, teve-se o seguinte número de equações:

- Número de observações: $n = 17$ (Desníveis)
- Número de parâmetros: $u = 10$ (Altitudes)

Desta forma, consegue-se notar que o número de observações é maior que o número de parâmetros ($n > u$), o que indica que o número de equações necessárias do modelo, para que se possa prosseguir com o ajustamento do modelo será igual a 17.

Para o Modelo dos Correlatos, torna-se necessário calcular o número do grau de liberdade, este que indica o número de observações independentes disponíveis para estimar os parâmetros do modelo, quanto maior o número de graus de liberdade, maior é a capacidade de estimar parâmetros com precisão.

Para efeito, Seber e Lee (2012) propõem a seguinte expressão para o cálculo do número de grau e liberdade:

$$r = n - u \quad (20)$$

Onde:

r- é o grau de liberdade

n- é o número de observações

u -é o número de parâmetros

Contudo, foi obtido o seguinte resultado:

- Número de observações: $n= 17$
- Número de parâmetros: $u= 7$
- Grau de liberdade: $r=10$
- Número de equações do modelo: 10

Para o Modelo Combinado, para a determinação de número de observações necessárias segue a seguinte expressão (Moraes,1997):

$$n = (2p+1) \quad (21)$$

Onde n é o número de observações (desníveis)

Para determinar o número de parâmetros desejados segue-se a seguinte expressão:

$$u = (2p-2) \quad (22)$$

Onde u é número de parâmetros pretendidos.

Para se determinar o número de equações necessários para se estabelecer o modelo funcional segue-se a seguinte expressão:

$$S = (2p+1) \quad (23)$$

Para o modelo combinado Gemael (1994), propõe a seguinte a seguinte expressão para o cálculo do número de grau de Liberdade:

$$r = S - u \quad (24)$$

Onde r é o grau de liberdade.

Segundo Moraes et al., (2008) é necessário estabelecer o número de observações necessárias para aplicabilidade do modelo, sendo necessário que se cumpra a seguinte condição: $n_0 > r - u$, isto resulta da seguinte expressão: $n_0 - r < u$.

Assim sendo, obteve-se os seguintes resultados:

- Número de observações: $n = 17$
- Número de observações necessárias: $n_0 = 15$
- Número de parâmetros: $u = 7$
- Grau de liberdade: $r = 8$
- Número de equações do modelo: 17

A Figura 8 abaixo, apresenta a geometria da poligonal, com os vértices numerados de 1 a 7, juntamente com as ligações entre os pontos correspondentes. Cada linha representa uma medição de desnível e distância realizada entre dois vértices. As setas indicam o sentido do levantamento, sendo essenciais para organizar as observações durante o processo de ajuste dos dados e para a formulação das equações nos três modelos do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

Planta Topográfica da Poligonal

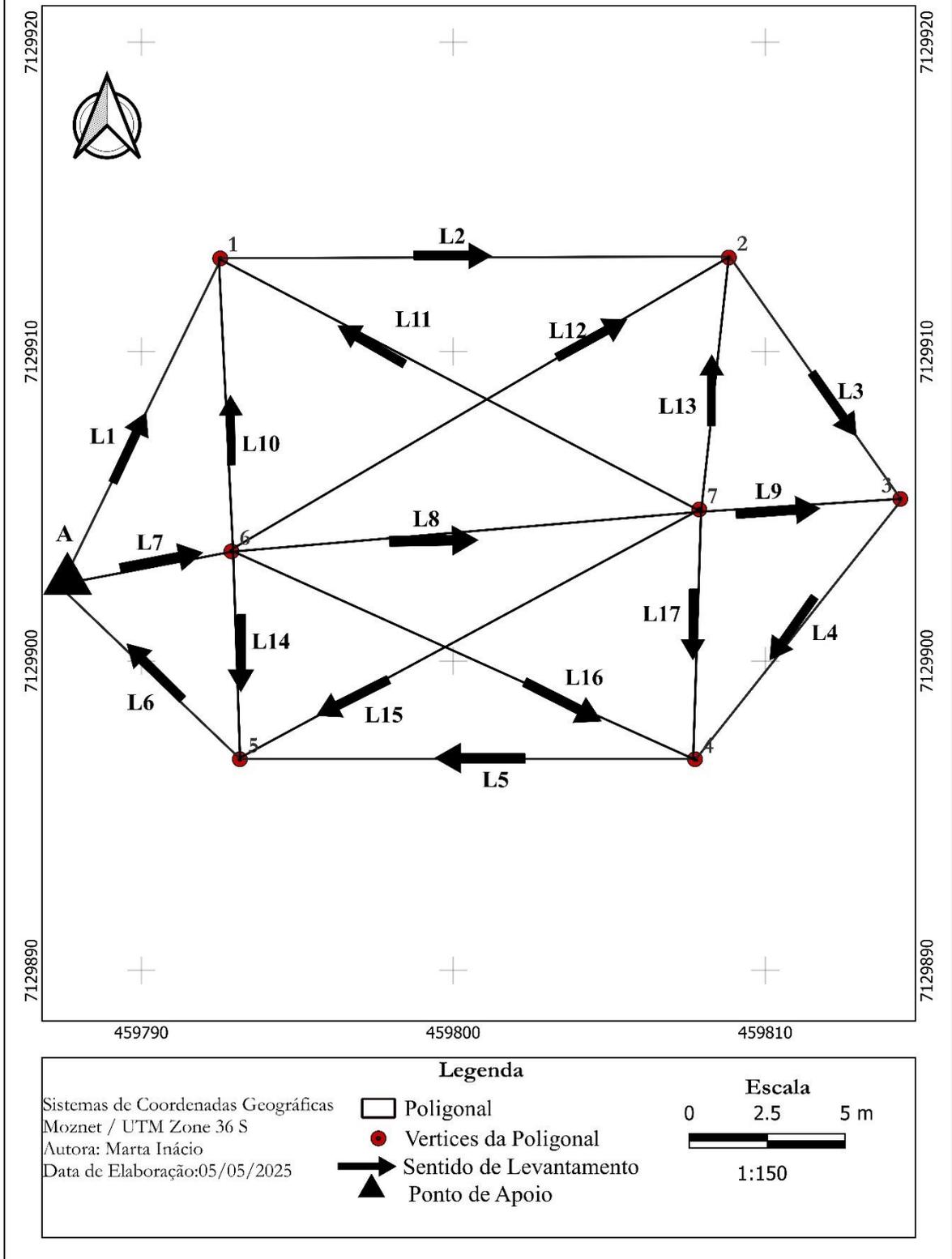


Figure 9: Planta Topográfica da Poligonal

- Formulação das equações dos elementos envolvidos no problema- no campo do ajustamento de observações Topo-geodésicas, os métodos paramétrico, dos correlatos e combinado distinguem-se pela forma como estruturam as equações de ajuste. Conforme descrito por Gemael, Machado e Wandresen (2015), o método combinado pode ser visto como uma união dos métodos paramétrico e dos correlatos, ou estes como particularidades do método combinado.

Para o modelo Paramétrico, Silva (2011), diz que as incógnitas são os parâmetros desconhecidos, como coordenadas ou altitudes dos pontos. As equações de observação relacionam directamente as medições com esses parâmetros, permitindo expressar os valores observados ajustados explicitamente como função dos parâmetros ajustados.

$$\begin{array}{llll}
 \Delta h_{L_1} = HP_1 - HP_A & \Delta h_{L_6} = HP_A - HP_5 & \Delta h_{L_{10}} = HP_1 - HP_6 & \Delta h_{L_{14}} = HP_5 - HP_6 \\
 \Delta h_{L_2} = HP_2 - HP_1 & \Delta h_{L_7} = HP_6 - HP_A & \Delta h_{L_{11}} = HP_1 - HP_7 & \Delta h_{L_{15}} = HP_7 - HP_5 \\
 \Delta h_{L_3} = HP_3 - HP_2 & \Delta h_{L_8} = HP_7 - HP_6 & \Delta h_{L_{12}} = HP_2 - HP_6 & \Delta h_{L_{16}} = HP_4 - HP_6 \\
 \Delta h_{L_4} = HP_4 - HP_3 & \Delta h_{L_9} = HP_3 - HP_7 & \Delta h_{L_{13}} = HP_2 - HP_7 & \Delta h_{L_{17}} = HP_4 - HP_7 \\
 \Delta h_{L_5} = HP_5 - HP_4 & & &
 \end{array}$$

Onde:

$\Delta h_{L_1} - \Delta h_{L_{17}}$ representa as observações (desníveis)

HP_A - representa a altitude conhecida do marco A

$HP_1 - HP_7$ - representam os parâmetros (altitudes dos vértices)

Para o modelo dos Correlatos, Silva (2011), diz que as incógnitas são as correcções nas observações. As equações de condição garantem que as observações ajustadas satisfaçam determinadas restrições, como o fechamento de polígonos. Neste método, os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições, como erro de fechamento igual a zero.

1. $L_1 - L_{10} - L_7 = 0$
2. $L_7 + L_{14} + L_6 = 0$
3. $L_3 - L_9 + L_{13} = 0$
4. $L_9 + L_4 - L_{17} = 0$
5. $L_{10} - L_2 - L_{12} = 0$
6. $L_{12} - L_{13} - L_8 = 0$
7. $L_8 + L_{15} - L_{14} = 0$
8. $-L_{15} + L_{17} + L_5 = 0$
9. $L_{17} - L_{16} + L_8 = 0$
10. $-L_{13} + L_{11} + L_2 = 0$

Onde:

L_1-L_{17} representam as observações (Desníveis)

Para o modelo Combinado, Dalmonin (2017), que integra os princípios dos métodos paramétrico e dos correlatos, ajustando simultaneamente os parâmetros e as observações. Este modelo é mais genérico que os anteriores, permitindo uma relação não explícita entre os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados.

$$\begin{array}{lll} L_{1-} (HP_1-HP_A) = 0 & L_{7-} (HP_6-HP_A) = 0 & L_{13-} (HP_2-HP_7) = 0 \\ L_{2-} (HP_2-HP_1) = 0 & L_{8-} (HP_7-HP_6) = 0 & L_{14-} (HP_5-HP_6) = 0 \\ L_{3-} (HP_3-HP_2) = 0 & L_{9-} (HP_3-HP_7) = 0 & L_{15-} (HP_7-HP_5) = 0 \\ L_{4-} (HP_4-HP_3) = 0 & L_{10-} (HP_1-HP_6) = 0 & L_{16-} (HP_4-HP_6) = 0 \\ L_{5-} (HP_5-HP_4) = 0 & L_{11-} (HP_1-HP_7) = 0 & L_{17-} (HP_4-HP_7) = 0 \\ L_{6-} (HP_A-HP_5) = 0 & L_{12-} (HP_2-HP_6) = 0 & \end{array}$$

Onde:

L_1-L_{17} representam as observações (Desníveis)

HP_A representa a altitude conhecida do marco A

HP_1-HP_7 representam os parâmetros (altitudes dos vértices)

De acordo com as equações resultantes dos três modelos, pode-se concluir que são lineares, seguindo deste modo para o cálculo das matrizes cofactoras A, B usando as formulas 10.4 (modelo paramétrico), 13.1 (modelo dos correlatos), 15.1 (modelo combinado) propostas por Gemael et al., (2015).

A seguir, são apresentadas as derivadas para o cálculo das matrizes A e B.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_7} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{17}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{17}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{17}}{\partial x_7} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial L_1} & \frac{\partial f_1}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial L_{16}} & \frac{\partial f_1}{\partial L_{17}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial L_1} & \frac{\partial f_2}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial L_{16}} & \frac{\partial f_2}{\partial L_{17}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_9}{\partial L_1} & \frac{\partial f_9}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial f_9}{\partial L_{16}} & \frac{\partial f_9}{\partial L_{17}} \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial L_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial f_{10}}{\partial L_{16}} & \frac{\partial f_{10}}{\partial L_{17}} \end{bmatrix}$$

- Composição da Matriz dos Pesos- Segundo Moraes (1997), a matriz peso é dada pelo inverso das variâncias das observações. Conhecendo a variância das observações feitas teremos que lhes atribuir pesos relativos e obteremos assim a chamada matriz dos pesos (Fonte,1994).

Uma vez que estamos perante observações independentes entre si, o resultado da matriz peso será uma matriz diagonal. Essa matriz será multiplicada pelo factor de variância *a priori* (σ_0^2) determinado no gabinete como sendo unidade (0.01), assim teremos como matriz peso para este estudo:

$$P = \sigma_0^2 * \text{diag} = \begin{bmatrix} \frac{1}{D1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{D17} \end{bmatrix}$$

Com as Matrizes A,B e P, que foram compostas no Excel, procedeu-se para o cálculo dos parâmetros das correcções e o vector dos resíduos bem como a determinação dos parâmetros ajustados e observações ajustadas usando os três modelos do MMQ, no programa Octave GNU.

De forma resumida, é apresentado abaixo o fluxograma metodológico para a elaboração do trabalho.

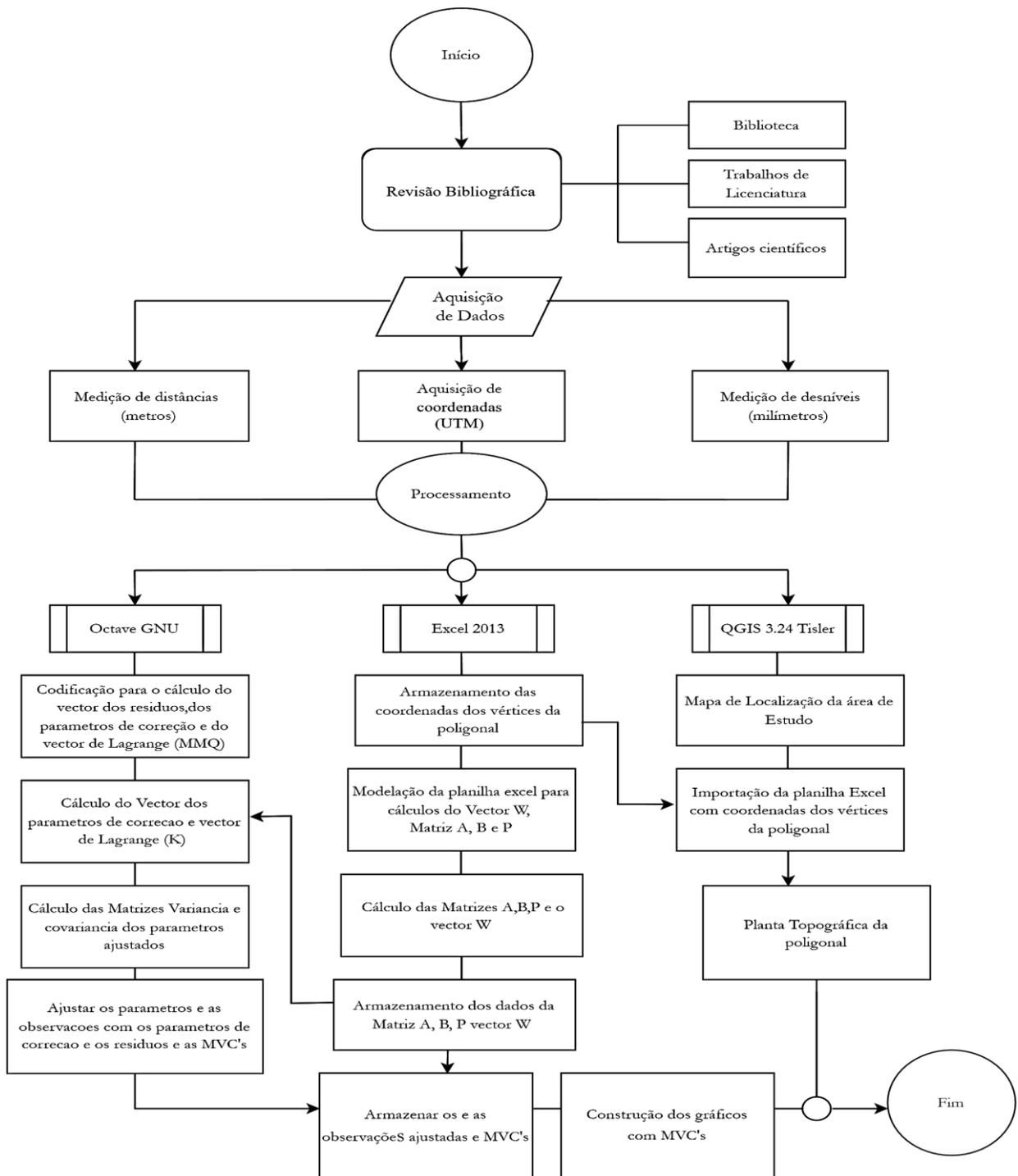


Figura 10: Fluxograma Metodológico

Os resultados da aplicação da metodologia proposta (MMQ- Modelo paramétrico, correlatos e combinado), são apresentados no capítulo 5.

Resultados e Discussão

Este capítulo é reservado para apresentação e análise dos resultados obtidos durante todo o processo de elaboração desta pesquisa.

4.1. Resultados do Pré-processamento dos Dados de Campo

Nesta etapa, foram verificados os dados brutos com o objectivo de identificar possíveis lacunas, erros ou inconsistências. Também foram realizadas a correcção e a padronização dos dados colectados em campo, a filtragem dos dados inconsistentes e a preparação dos dados para as etapas de análise subsequentes.

4.1.1. Resultados dos dados da Implantação do ponto de apoio

Tendo em conta os métodos referidos no capítulo anterior, referentes a implantação da base obtiveram-se os resultados abaixo:

Tabela 3:Coordenadas do Ponto de Apoio

Ponto A (Ponto de apoio)		
Coordenadas UTM (metros)	X: 459786.112	Y: 7129902.844 Altitude: 45.062 m

4.1.2. Resultados de Dados do Levantamento (Desníveis e Distâncias)

A tabela 4 apresenta os dados colectados em campo. Foram registrados desníveis positivos e negativos ao longo do levantamento, indicando variações naturais do relevo na área de estudo. Destacam-se os maiores valores de desníveis positivos (+0.359m e + 0.305m) nas observações 3 e 16, representando uma subida no relevo e maiores valores de desníveis negativos (-0.449m e -0.337m) nas observações 8 e 2, representando uma descida no relevo.

As distâncias percorridas variam entre 8m e 21.1m, com predominância em medições curtas. O perímetro total da poligonal foi de 250.3 m, e o erro de fechamento obtido foi de -0.008 m.

Tabela 4: Dados observados em Campo

Observações	Desníveis (m)	Distâncias (m)
L ₁	0.111	15.0
L ₂	-0.337	15.0
L ₃	0.359	15.0
L ₄	0.134	15.0
L ₅	0.198	15.0
L ₆	-0.368	15.1
L ₇	0.109	8.0
L ₈	-0.449	13.4
L ₉	0.289	8.0
L ₁₀	-0.178	13.0
L ₁₁	0.188	19.6
L ₁₂	-0.150	18.4
L ₁₃	0.196	13.0
L ₁₄	-0.350	13.0
L ₁₅	0.015	21.1
L ₁₆	0.305	19.7
L ₁₇	-0.080	13.0
-	$\Sigma\Delta h = -0.008$	$\Sigma D = 250.3$

Foram colhidas as coordenadas dos 7 vértices da poligonal, com ajuda de um receptor GNSS, tendo sido obtidos os resultados na tabela abaixo:

Tabela 5:Coordenadas dos Vértices da poligonal

Pontos	Coordenadas UTM (E)	Coordenadas UTM (N)
Mr A	459784.61 m	7129905.16 m
1	459793.38 m	7129921.8 m
2	459807.58 m	7129916.54 m
3	459813.62 m	7129905.43 m
4	459804.47 m	7129889.91 m
5	459804.32 m	7129889.9 m
6	459795.61 m	7129902.91 m
7	459808.05 m	7129900.6 m

4.2. Teste de qualidade do Ajustamento

Segundo Amorim (2005), este teste estatístico multidimensional foi proposto por Baarda (1968) para detectar a existência de inconsistência do ajustamento e é sempre o primeiro teste a ser aplicado apos o ajustamento, também conhecido como teste do modelo geral, pois testa o modelo como um todo.

Por ser muito geral, esse teste não é capaz de definir a natureza das inconsistências detectadas e muito menos localizá-las. Entretanto, uma qualidade importante deste teste é a simplicidade e a capacidade de indicar as prováveis causas da falha da suposição básica

Em trabalhos Topográficos, o nível de significância nos trabalhos topográficos deve ser fixado *a priori*, em geral $\alpha=0,05$ (5%) ou $\alpha= 0,1$ (10%) o que leva ao valor limite de 1,96 e 1,65 vezes o desvio-padrão respectivamente.

Para o presente trabalho, o valor da variância *a priori* (σ^2), foi obtido aplicando a expressão (2.15) e o valor da variância amostral foi obtido pela expressão (2.16). Portanto, tendo o valor da variância *a priori* estabelecido que segundo Cruz (1999) a variância a priori não influencia no resultado final procedeu-se com a comparação da variância a priori e variância a posteriori com um nível de significância de $(1-\alpha) =95\%$. Para este estudo foi usado o teste bilateral. Calculada a estatística do teste bilateral fez-se a consulta na tabela dos valores da distribuição qui-quadrado para o valor crítico, conforme o nível de significância que neste estudo é de $\alpha=0,05$ e avaliou-se a qualidade do ajustamento.

Tabela 6: Resultados do Teste de Qualidade Bilateral

Modelo	Variância <i>a priori</i> (σ^2)	Qui- quadrado X^2_c	Grau de Liberdade (r)	Nível de significância bilateral $\alpha=0,05$	Intervalo de confiança bilateral	Avaliação do ajustamento
Paramétrico	0.01	4.2936	10	5%	3.25<4.2936<18.13	Aceite
Correlatos	0.01	3.9499	10	5%	3.25<3.9499<18.13	Aceite
Combinado	0.01	9.6373	10	5%	3.25<9.6373<18.13	Aceite

Após verificar-se que o ajustamento passou no teste de qualidade, prosseguiu-se para o cálculo das matrizes variância-covariância das observações ajustadas, estas que encontram-se no anexo 2.

4.3. Gráficos Comparativos das precisões das MVC's das observações

Através das MVC's das observações obtidas nos três modelos do MMQ, tornou-se possível determinar as precisões do ajustamento das observações, podendo assim representar as precisões e compara-las após ser feito o ajustamento. Abaixo encontram-se as tabelas e os gráficos que mostram a precisão fornecida por cada modelo, e um gráfico que faz a comparação da precisão dos três.

- **Modelo dos Correlatos**

Tabela 7: Precisões do Modelo dos Correlatos

Número de Obs.	Obs. Brutas (m)	Obs. Ajustadas (m)	Precisão (m)
1	0.111	0.140	0.162
2	-0.337	-0.180	0.161
3	0.359	0.228	0.162
4	0.134	-0.064	0.162
5	0.198	0.005	0.162
6	-0.368	-0.130	0.163
7	0.109	0.219	0.136
8	-0.449	-0.283	0.133
9	0.289	0.253	0.136
10	-0.178	-0.078	0.143
11	0.188	0.204	0.155
12	-0.150	-0.259	0.153
13	0.196	0.024	0.143
14	-0.305	-0.089	0.143
15	0.015	0.194	0.156
16	0.305	-0.094	0.155
17	-0.080	0.188	0.143

A Tabela 8 e o Gráfico 1 apresentam as observações brutas, as observações ajustadas e as precisões fornecidas pelo modelo dos Correlatos, que variam entre 0,133 m e 0,163 m.

A maior precisão foi registrada na observação 8 (0,133 m), indicando um erro menor e maior confiabilidade, enquanto a menor precisão foi registrada na observação 6 (0,163 m), ainda considerada aceitável para trabalhos de quarta ordem. O intervalo de variação das precisões foi pequeno, evidenciando a homogeneidade das observações.

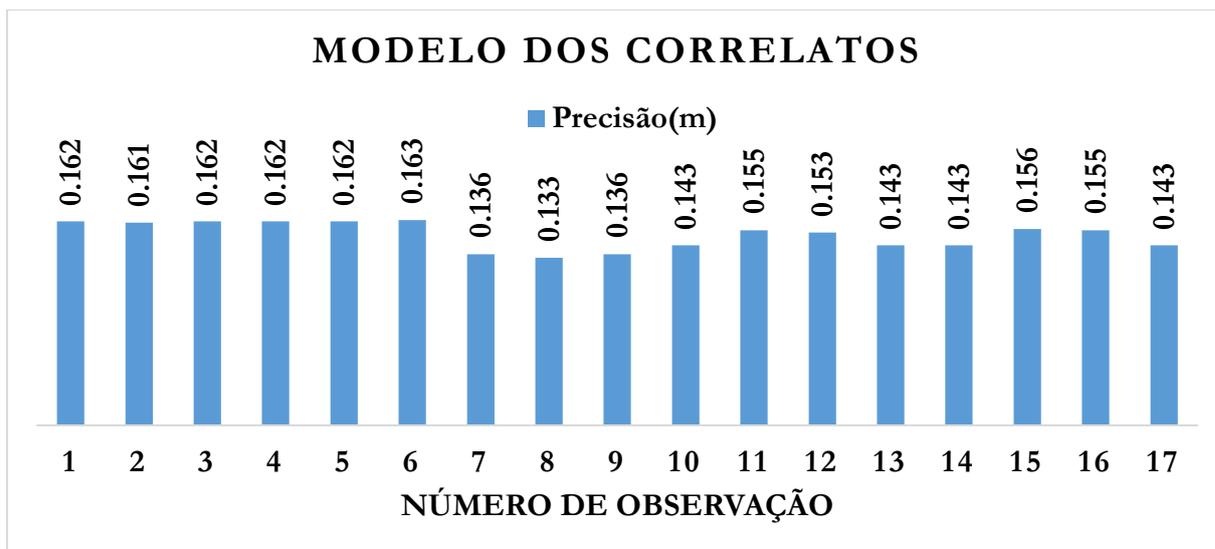


Gráfico 1: Precisões Modelo dos Correlatos

- **Modelo Paramétrico**

Tabela 8: Tabela de precisões do modelo paramétrico

Número de Obs.	Obs. Brutas (m)	Obs. Ajustadas (m)	Precisão (m)	Parâmetros	Parâmetros Ajustados (m)	Precisão (m)
1	0.111	-0.026	0.138	H₁	45.036	0.138
2	-0.337	-0.155	0.201	H₂	44.907	0.159
3	0.359	0.233	0.171	H₃	44.829	0.184
4	0.134	-0.056	0.169	H₄	45.006	0.177
5	0.198	0.019	0.168	H₅	45.042	0.158
6	-0.368	-0.068	0.158	H₆	44.994	0.123
7	0.109	0.148	0.123	H₇	44.914	0.149
8	-0.449	-0.298	0.137		-	-
9	0.289	0.254	0.143		-	-
10	-0.178	-0.174	0.159		-	-
11	0.188	0.124	0.182		-	-
12	-0.150	-0.270	0.163		-	-
13	0.196	0.020	0.155		-	-
14	-0.305	-0.080	0.149		-	-
15	0.015	-0.218	0.159		-	-
16	0.305	-0.100	0.161		-	-
17	-0.080	0.198	0.149		-	-

A Tabela 8 e o Gráfico 2 mostram as observações brutas, ajustadas e seus parâmetros, juntamente com as precisões fornecidas pelo modelo Paramétrico. As precisões das observações variam entre 0,123 m e 0,201 m. A maior precisão foi registrada na observação 7 (0,123 m), indicando uma observação com menor erro, enquanto a menor precisão foi registrada na observação 2 (0,201 m), o que significa que essa observação apresentou a maior incerteza entre todas.

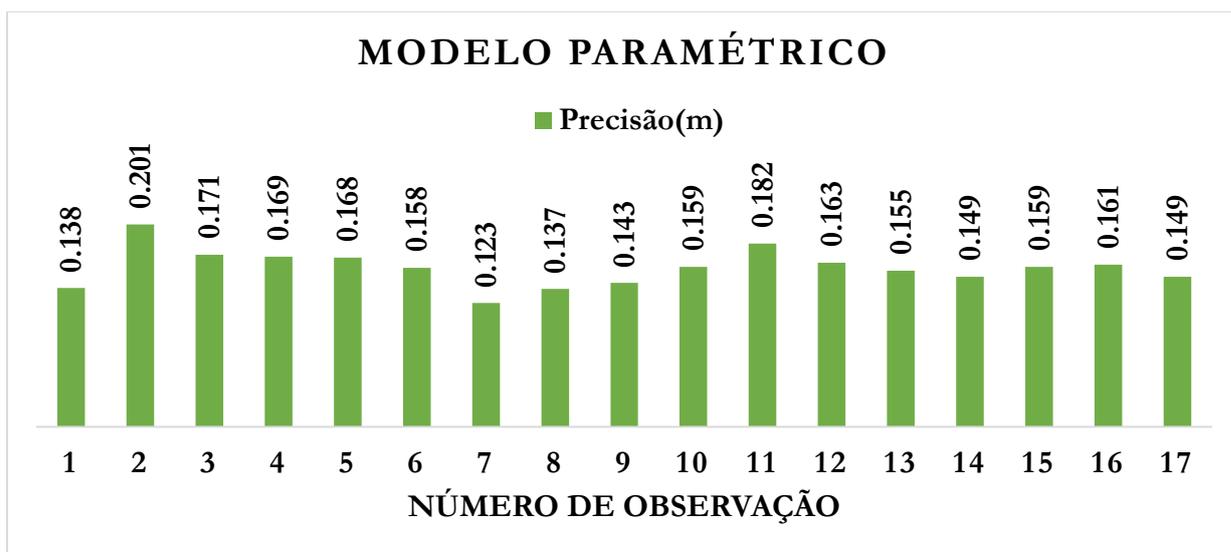


Gráfico 2: Precisões do Modelo Paramétrico

- **Modelo Combinado**

A Tabela 9 e o Gráfico 3 apresentam as observações brutas, as observações e parâmetros ajustados, bem como as precisões das observações e dos parâmetros fornecidas pelo modelo Combinado. As precisões das observações variaram entre 1,839 m e 3,006 m.

A maior precisão foi registrada na observação 7 (1,839 m), indicando menor erro e maior confiabilidade. Por outro lado, a menor precisão foi registrada na observação 2 (3,006 m), reflectindo uma maior incerteza entre as observações.

Tabela 9: Precisões do Modelo Combinado

Número de Obs.	Obs. Brutas (m)	Obs. Ajustadas (m)	Precisão (m)	Parâmetros	Parâmetros Ajustados (m)	Precisão (m)
1	0.111	1.289	2.071	H ₁	43.34	2.070
2	-0.337	-1.809	3.006	H ₂	42.747	2.389
3	0.359	2.545	2.565	H ₃	43.252	2.760
4	0.134	3.167	2.527	H ₄	43.588	2.655
5	0.198	3.074	2.516	H ₅	43.978	2.370
6	-0.368	-4.386	2.371	H ₆	43.181	1.839
7	0.109	-0.516	1.839	H ₇	42.565	2.238
8	-0.449	-2.684	2.052		-	-
9	0.289	0.529	2.138		-	-
10	-0.178	-0.480	2.377		-	-
11	0.188	1.375	2.733		-	-
12	-0.150	1.441	2.446		-	-
13	0.196	2.150	2.318		-	-
14	-0.305	-3.791	2.239		-	-
15	0.015	4.486	2.386		-	-
16	0.305	8.116	2.416		-	-
17	-0.008	-3.598	2.231		-	-

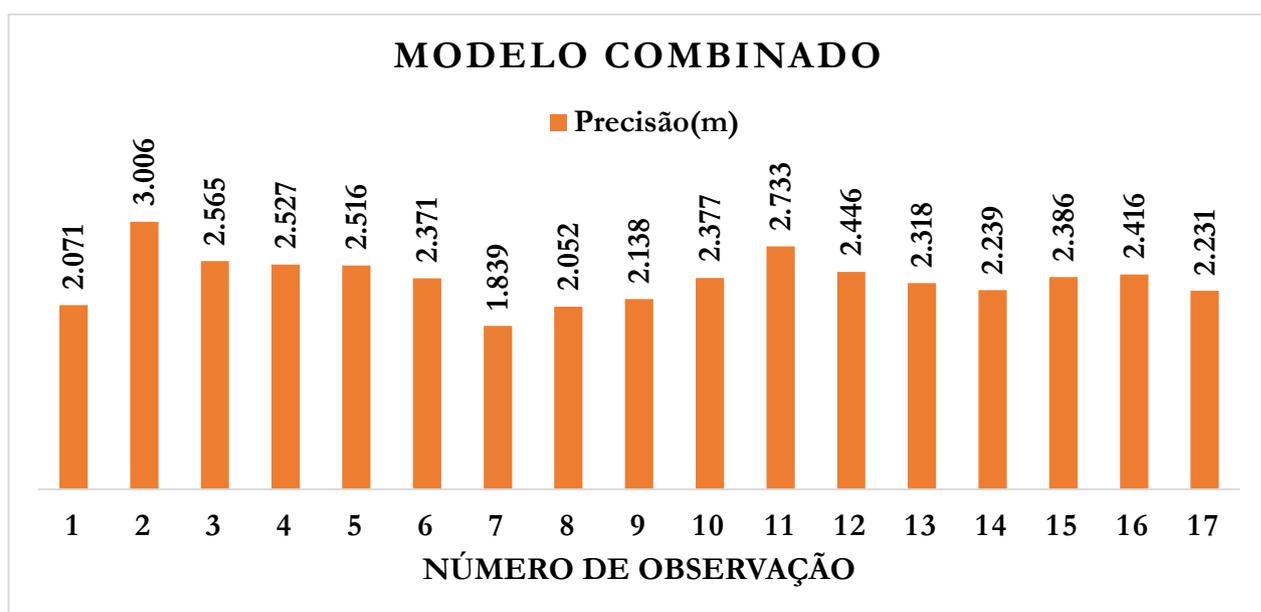


Gráfico 3: Precisões do Modelo Combinado

- **Comparação das Precisões das observações**

O Gráfico 4 compara os níveis de precisão das observações ajustadas pelos três modelos do MMQ (Paramétrico, Correlatos e Combinado). Observa-se que o modelo dos Correlatos apresentou a mais alta precisão, com valores mais homogêneos e baixa dispersão, indicando observações mais confiáveis e consistentes. O modelo Paramétrico também revelou boa precisão, embora com uma variação ligeiramente superior entre as observações, em comparação com o modelo dos Correlatos.

Já o modelo Combinado apresentou baixa precisão, com valores mais elevados de dispersão e maior variabilidade, reflectindo uma maior incerteza nas observações. Estes resultados demonstram que o modelo dos Correlatos mostrou-se mais dinâmico no ajustamento dos dados, enquanto o modelo Combinado se revelou menos dinâmico na obtenção de resultados precisos.

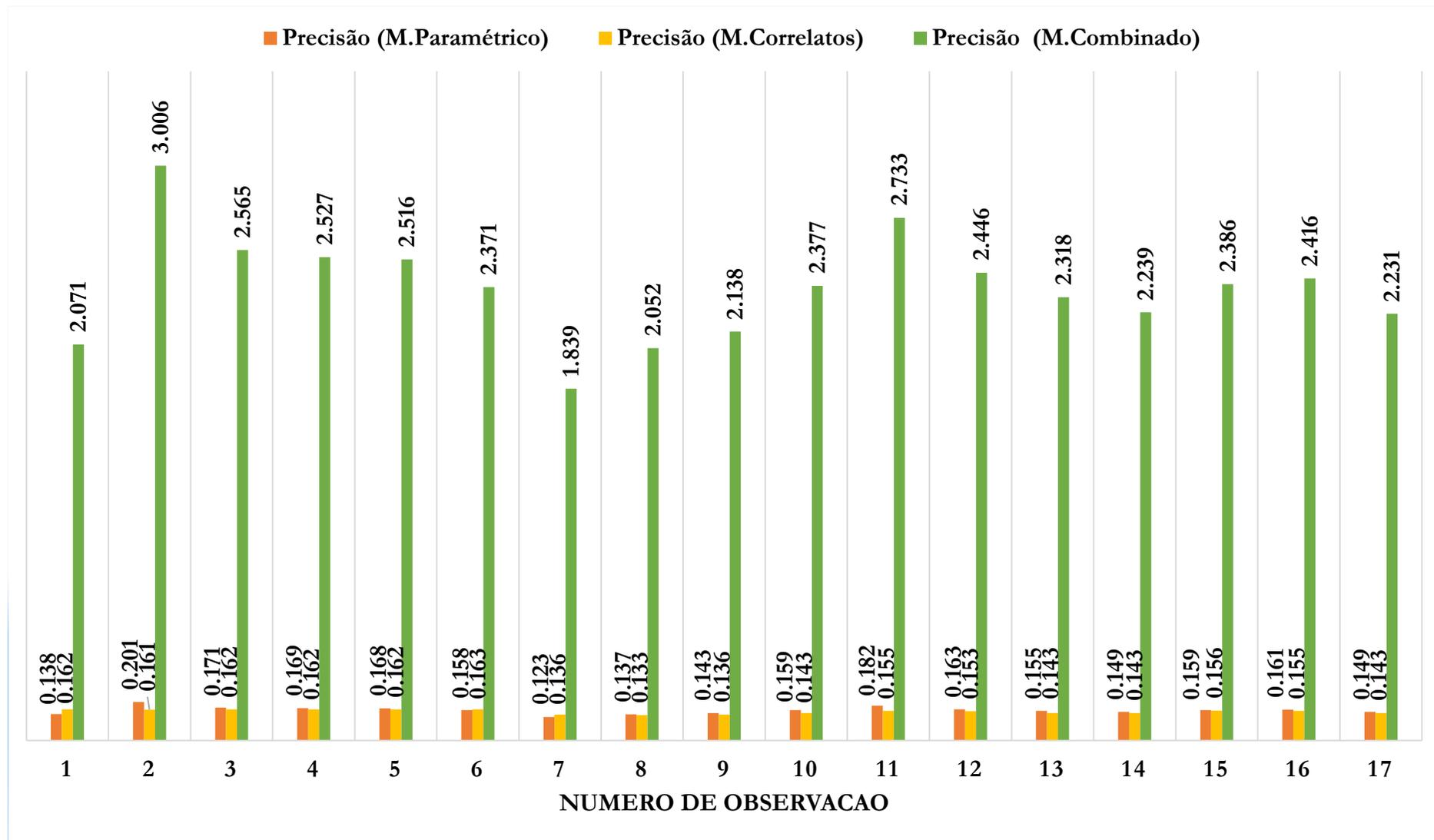


Gráfico 4: Comparação das precisões das observações

Conclusões e Recomendações

O presente Capítulo, apresenta a conclusão tirada com elaboração do trabalho, bem como recomendações para as próximas pesquisas científicas relacionados com o uso dos diferentes métodos do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

5.1. Conclusão

Este estudo teve como objectivo analisar a aplicação dos modelos do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) no ajustamento de dados altimétricos, avaliando sua precisão e eficiência em uma poligonal fechada. O MMQ minimiza a soma dos quadrados dos resíduos e só pode ser aplicado a dados que contêm erros aleatórios, assumindo que os erros sistemáticos e grosseiros foram previamente eliminados. Dessa forma, o ajustamento realizado pelos modelos do MMQ visa distribuir esses erros de maneira a obter a melhor estimativa possível dos valores verdadeiros.

Com os avanços tecnológicos, o ajustamento de dados tornou-se mais eficiente e menos trabalhoso em comparação com os métodos manuais, que dependiam de calculadoras convencionais ou mesmo do Excel. O uso de processamento computacional, com ferramentas como GNU Octave e Microsoft Excel, mostraram-se eficientes no ajustamento de dados reduzindo erros humanos e diminuição do tempo de processamento dos dados. O GNU Octave foi fundamental para os cálculos e o Excel para a elaboração de gráficos das MVC's. A análise dos gráficos das MVC's revelou que o modelo Combinado apresentou a menor precisão no ajuste de dados, com desvios-padrão variando entre 2 e 3 metros em comparação com os demais modelos do MMQ. Já o modelo dos Correlatos demonstrou a maior precisão, seguido pelo modelo Paramétrico.

A escolha do modelo do MMQ impacta directamente no resultado final do levantamento altimétrico em termos de precisão. Modelos que melhor consideram a correlação entre os dados tendem a produzir resultados mais confiáveis e com menor margem de erro. Dessa forma, o modelo dos Correlatos mostrou-se o mais adequado para o ajustamento de dados altimétricos neste estudo, pois apresentou os menores desvios e maior coerência nos resultados finais. O estudo reforça a importância da escolha criteriosa do modelo de ajustamento, considerando as características dos dados e os objectivos do levantamento, de forma a garantir maior precisão e confiabilidade nos resultados obtidos.

5.2. Recomendações

A precisão e a exactidão são fundamentais no ajustamento de dados topográficos, uma vez que impactam directamente a fiabilidade e a qualidade dos resultados obtidos. Para assegurar medições consistentes e confiáveis, é imprescindível a adopção de um rigoroso controlo de qualidade durante as actividades de campo. Esse controlo deve incluir a redundância nas observações, a calibração periódica dos instrumentos, a utilização de equipamentos de elevada precisão, bem como a sua manutenção regular, de forma a minimizar a ocorrência de erros sistemáticos.

Recomenda-se a utilização prioritária de equipamentos como receptores GNSS de alta precisão e níveis topográficos devidamente calibrados. Adicionalmente, os levantamentos devem ser realizados preferencialmente em condições ambientais e climáticas estáveis, a fim de reduzir interferências externas e garantir a clareza na recolha dos dados.

Face aos resultados obtidos, recomenda-se a realização de estudos complementares sobre a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados, empregando a mesma metodologia aqui adoptada. Tal abordagem poderá contribuir para o aprofundamento do conhecimento científico e para o aperfeiçoamento das práticas de ajustamento topográfico em diferentes contextos.

6.Referências Bibliográficas

1. Almeida, J. (2015). *Técnicas de medição em topografia: Métodos e aplicação*. Porto: Universidade do Porto.
2. Almeida, J., & Costa, M. (2015). *Geologia e solos urbanos na região de Maputo*. Editora Técnica de Moçambique.
3. Amorim, G. P. (2005). *Curso de formação continuada em georreferenciamento aplicado ao cadastro rural - ajustamento de observações*. MEC/SEMT/CEFET-ES.
4. Antunes, C. (1996) *Técnica Sequencial de Ajustamento no Problema da estimação linear Discreta. Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica*, FCUL, Lisboa.
5. Antunes, C. (2005). *Apontamentos de Topografia*. Universidade de Lisboa.
6. Associação Brasileira de Normas Técnicas. (1994). *NBR 13133: Execução de levantamento topográfico*. Rio de Janeiro: ABNT.
7. Benitez, M. e Domeniconi, C. (2012). Observação directa: características, tipos e exemplo. Acedido em 24 de Fevereiro de 2025, no Web site de: <https://maestrovirtuale.com/observacao-direta-caracteristicas-tipos-e-exemplo/>.
8. Branco Filho, M. C. (1968). *Síntese do cálculo das compensações: anexo IV emprego dos computadores electrónicos*. Ministério do Exército, Directoria do Serviço Geográfico.
9. Calado, L. G. L. P., Mendonça, F. J. B., Mendonça, R. L., & Melo, W. D. A. (2016). Cálculo de uma poligonal enquadrada no plano topográfico com software livre pelo método dos mínimos quadrados. Em *Anais do VI Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação*, Recife, PE. Recife: UFPE.
10. Camargo, P. O., Cordini, J., & Fabri, S. M. (1996). Ajustamento de poligonais topográficas pelo método paramétrico. Em *Anais do II Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico*, Florianópolis, SC.
11. Carvalho, A. S., & Leandro, D. (2007). Verificação da precisão das coordenadas ajustadas em poligonal fechada e enquadrada. Em *Anais do XXIII Congresso Brasileiro de Cartografia*, Rio de Janeiro, Brasil.
12. Carvalho, A. S., Rodrigues, D. D., & Luz, N. B. (2007). Comparação dos métodos de Bowditch e MMQ no ajuste de poligonal topográfica. Disponível em http://www.ufv.br/dec/eam/Publicacoes/2007/Comp_2007.pdf. Acesso em 10 de março de 2010.
13. Coleman, E. G. (2010). Revoluções silenciosas: o irónico surgimento do software livre e de código aberto e a constituição de uma consciência legal hacker. Em O. F. Leal & R. H. V. Souza (Orgs.), *Do regime de propriedade intelectual: estudos antropológicos* (pp. 131-147). Porto Alegre: Tomo.

14. Custodio, D, (2011). *Topografia 1*.
15. Dalmolin, Q. (1976). *Ajustamento de observações pelo processo iterativo* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
16. Dalmolin, Q. (2002). *Ajustamento por mínimos quadrados*. Curitiba: UFPR.
17. Fonte, C. M. P. C. (1994). *Ajustamento de observações utilizando o método dos mínimos quadrados* (p. 48). Universidade de Coimbra. Acesso em 22 de Maio de 2006. Disponível em <http://scholar.google.com/url?sa=U&q=http://www.mat.uc.pt/~cfonte/docencia/Topografia%2520Aplicada/MMQnovo.pdf>.
18. Gemael, C. (1974). *Aplicações do cálculo matricial em geodesia: 2ª parte: ajustamento de observações*. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba.
19. Gemael, C. (1975). *Ajustamento de observações geodésicas: noções de estatística*. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba.
20. Gemael, C. (1976). *Ajustamento: variação de coordenadas* (1ª e 2ª partes). Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba.
21. Gemael, C. (1977). *Inversas generalizadas*. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba.
22. Gemael, C. (1987). *Elipse e elipsóide dos erros*. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Curitiba.
23. Gemael, C. (1994). *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas*. Curitiba: Editora da UFPR.
24. Gonçalves, J. A., Madeira, S., & Sousa, J. J. (2010). *Topografia: Exercícios e Tratamento de Erros*. Grupo Lidel
25. Gomes, M. R. (2014). *Fundamentos de geodésia e topografia*. Editora Acadêmica.
26. Gemael, C., Machado, A. M. L., & Wandresen, R. (2015). *Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas* (2ª ed.). Curitiba: UFPR.
27. Ghilani, C. D., & Wolf, P. R. (2007). *Adjustment computations: spatial data analysis* (10ª ed.). John Wiley & Sons.
28. Ghilani, C. D., & Wolf, P. R. (2010). *Geomática* (13ª ed.). ISBN: 9788581434506.
29. Instituto Nacional de Meteorologia (INAM). (2020). *Relatório climático de Moçambique: 2019-2020*. INAM.
30. Klein, I., Matsuoka, M. T., Souza, S. F. D., & Veronez, M. R. (2011). Ajustamento de observações: Uma interpretação geométrica para o método dos mínimos quadrados. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 17(2), 272–294. <https://doi.org/10.1590/S1982-21702011000200007>

31. Maciel, R. (2022). *Altimetria: Conceitos fundamentais e obtenção de desníveis*. Acedido em 24 de Fevereiro de 2025, no Web site da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro: https://arquivos.ufrjr.br/arquivos/2022061233706d3116248bf0bb32ec12a/Altimetria_Conceitos_fundamentais_IT_501_e_IT513.pdf.
32. Maia, T. C. B.(1999). *estudo e análise de poligonais segundo nbr 13.133 e o sistema de posicionamento global*. Universidade de São Paulo
33. Mendonça, F. J. B., Garnés, S. J. A., Pereira, C. M., Barroso Neto, J. A., & Melo, W. D. A. (2010). Análise do ajustamento por mínimos quadrados de uma trilateração topográfica com injunções nos planos UTM e topocêntrico. Em *Anais do III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação*, Recife, PE. Recife: UFPE.
34. Mendes, A., Sousa, R., & Machel, P. (2018). *Análise urbana de Maputo: Relevo, infra-estruturas e desafios ambientais*. Universidade Eduardo Mondlane.
35. Mikhail, E. M. (1976). *Observations and least squares*. University Press of America, New York.
36. Mikhail, E. M., & Gracie, G. (1981). *Analysis and adjustment of survey measurements*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
37. Ministério para a Coordenação da Acção Ambiental (MICOA). (2016). *Maputo e a biodiversidade costeira: Estudo sobre a conservação ambiental*. MICOA.
38. Monico, J. F. G. (1989). Ajustamento de poligonais geodésicas pelos métodos paramétrico e correlatos: análise da MVC dos parâmetros. Em *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Cartografia* (Vol. 1, pp. 21-26), Gramado, RS.
39. Monico, J. F. G. (2007). *Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações* (2ª ed.). Presidente Prudente: Editora UNESP.
40. Moraes, C. V. de. (1997). *Aplicação do ajustamento às poligonais* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
41. Nazareno, N.R.X.(2012). *Ajustamento de observações*.95
42. Pastana, Carlos E.T.(2010).*TOPOGRAFIA I e II*.
43. Santos, A. J. (2006). *Proposta de Ajustamento para Melhoria da Confiabilidade e Precisão dos pontos de Redes Geodésicas para Fins Topográficos Locais*. São Carlos.
44. Santos, M., Pinto, F., & Silva, L. (2020). *Levantamentos topográficos e sua aplicação na Engenharia Civil*. Lisboa: Edições Técnicas.
45. Seber, G. A. F., & Lee, A. J. (2012). *Linear regression analysis* (2nd ed.). Wiley.
46. Silva, R., & Costa, A. (2017). *Introdução à topografia: Métodos e práticas de campo*. Coimbra: Editora Académica.

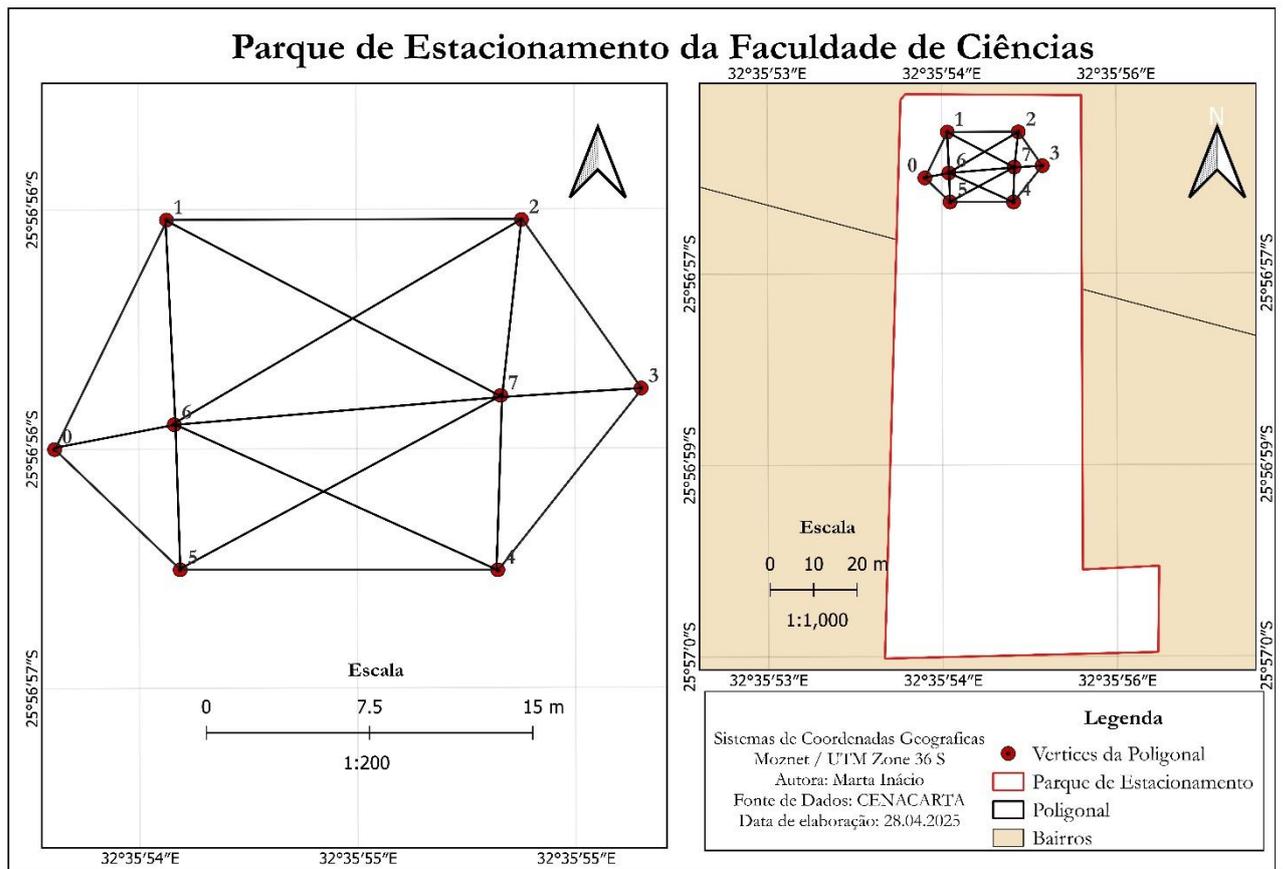
47. Silva, J.P., & Menezes, A.L. (2021). *Metodologia da pesquisa científica: Fundamentos e práticas* (2ª ed.). Rio de Janeiro, RJ: Editora Ciência Moderna
48. Silveira, S. A. (2004). *Software livre: a luta pela liberdade do conhecimento*. São Paulo: Fundação Perseu Abramo.
49. Stringhini, M. (2005). *Ajustamento e controles de qualidade aplicáveis às linhas poligonais* (Dissertação de Mestrado em Geomática). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS.
50. Stringhini, M., Moraes, C. V., & Farret, J. C. (2008). *Estimativas da qualidade de linhas poligonais topográficas*. *Ciência Rural*, 38(6), 1604-1609.
51. Teixeira, R. (2004). *Apostila de Topografia*
52. Teunissen, P. J. G. (2003). *Adjustment theory: an introduction*. Delft: Delft University Press.
53. Universidade Federal do Paraná (UFPR). (2016). *Método das equações de condição ou dos correlatos*. Recuperado em 20 de março de 2025, de <https://cartografica.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2011/10/Correlatos-1.pdf>
54. Vasconcelos, A. L. (2019). *Topografia e Geodesia: Fundamentos e aplicações*. Brasil: Editora Oficina de Textos
55. Veiga, L. A. K., et al. (2007). *Fundamentos de topografia: engenharia cartográfica e de agrimensura*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná.
56. Veiga, L., Zanetti, F., e Faggion, R. (2012). *Fundamentos de Topografia*. Acedido em 24 de Fevereiro de 2025, no Web site de: <https://www.passeidireto.com/arquivo/50053021/luis-veiga-et-al-2012-fundamentos-de-topografia-pt>.
57. Wandresen, R. (1980). *Métodos iterativos para solução de sistemas de equações normais* (Dissertação de Mestrado em Geodésia). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR

7. Anexos

Anexo 1: Tabela de Distribuição Qui-quadrada (inversa)

Grau de Liberdade	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.15	0.45	1.07	1.64	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.02	0.05	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.19	3.36	4.88	5.99	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.47	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	13.53	16.34	19.51	21.61	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.60	22.76	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	15.35	18.34	21.69	23.90	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.77	25.04	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.034	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	17.18	20.34	23.86	26.17	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.643	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	18.10	21.34	24.94	27.30	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	19.02	22.34	26.02	28.43	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	19.94	23.34	27.10	29.55	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.520	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	20.87	24.34	28.17	30.68	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.160	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	21.79	25.34	29.25	31.79	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.808	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	22.72	26.34	30.32	32.91	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.461	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	23.65	27.34	31.39	34.03	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.121	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	24.58	28.34	32.46	35.14	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.787	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	25.51	29.34	33.53	36.25	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.707	22.16	24.43	26.51	29.05	32.34	34.87	39.34	44.16	47.27	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.991	29.71	32.36	34.76	37.69	41.45	44.31	49.33	54.72	58.16	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.534	37.48	40.48	43.19	46.46	50.64	53.81	59.33	65.23	68.97	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.275	45.44	48.76	51.74	55.33	59.90	63.35	69.33	75.69	79.71	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.172	53.54	57.15	60.39	64.28	69.21	72.92	79.33	86.12	90.41	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.196	61.75	65.65	69.13	73.29	78.56	82.51	89.33	96.52	101.05	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.328	70.06	74.22	77.93	82.36	87.95	92.13	99.33	106.91	111.67	124.34	129.56	135.81	140.17

Anexo 2: Mapa de Localização da Poligonal na área de Estudo



Anexo 3: Matrizes Variância-Covariância das Observações ajustadas para os três modelos

- **Modelo Paramétrico**

MVC_{La}=

0.019092	0.016966	0.004428	0.001119	-0.00044	-0.00298	0.004491	-0.00042	-0.00176	0.014601	0.015025	-0.00662	-0.00619	-0.00151	0.001088	-0.0011	-0.00065
0.016966	0.040272	-0.00598	-0.00343	-0.00394	-0.00996	0.011416	0.004556	0.001357	0.005551	0.000995	0.01189	0.007334	-0.00146	0.006013	0.00248	-0.00208
0.004428	-0.00598	0.029323	-0.01095	-0.00419	-0.00378	0.00201	0.004037	0.012871	0.002417	-0.00162	-0.01242	-0.01645	0.001771	0.002266	0.00596	0.001924
0.001119	-0.00343	-0.01095	0.028457	-0.00961	-0.00335	0.001292	-0.00346	-0.01333	-0.00017	0.003284	-0.00584	-0.00239	0.002055	-0.00551	0.01167	0.015124
-0.00044	-0.00394	-0.00419	-0.00961	0.02822	-0.01092	-0.00135	-0.00344	-0.00289	0.000909	0.004351	-0.00214	0.001297	0.012273	-0.01572	-0.0159	-0.01251
-0.00298	-0.00996	-0.00378	-0.00335	-0.01092	0.02503	-0.00888	-0.00212	0.000232	0.005897	0.008015	0.001896	0.004014	-0.01615	0.014036	-0.0052	-0.00311
0.004491	0.011416	0.00201	0.001292	-0.00135	-0.00888	0.015074	-0.00576	-0.00038	-0.01058	-0.00483	-0.00815	-0.00239	-0.0062	0.000443	-0.0048	0.000908
-0.00042	0.004556	0.004037	-0.00346	-0.00344	-0.00212	-0.00576	0.018769	-0.004	0.005332	-0.01344	0.010735	-0.00803	0.007873	0.010896	0.01132	-0.00745
-0.00176	0.001357	0.012871	-0.01333	-0.00289	0.000232	-0.00038	-0.004	0.020373	-0.00138	0.002615	0.003505	0.007502	0.000151	-0.00415	0.00304	0.00704
0.014601	0.005551	0.002417	-0.00017	0.000909	0.005897	-0.01058	0.005332	-0.00138	0.025184	0.019853	0.001533	-0.0038	0.004686	0.000645	0.00378	-0.00155
0.015025	0.000995	-0.00162	0.003284	0.004351	0.008015	-0.00483	-0.01344	0.002615	0.019853	0.03329	-0.0092	0.004235	-0.00319	-0.01025	-0.0075	0.005899
-0.00662	0.01189	-0.01242	-0.00584	-0.00214	0.001896	-0.00815	0.010735	0.003505	0.001533	-0.0092	0.026655	0.01592	0.006253	0.004482	0.0084	-0.00234
-0.00619	0.007334	-0.01645	-0.00239	0.001297	0.004014	-0.00239	-0.00803	0.007502	-0.0038	0.004235	0.01592	0.023954	-0.00162	-0.00641	-0.0029	0.005117
-0.00151	-0.00146	0.001771	0.002055	0.012273	-0.01615	-0.0062	0.007873	0.000151	0.004686	-0.00319	0.006253	-0.00162	0.022352	-0.01448	0.01008	0.002206
0.001088	0.006013	0.002266	-0.00551	-0.01572	0.014036	0.000443	0.010896	-0.00415	0.000645	-0.01025	0.004482	-0.00641	-0.01448	0.025375	0.00124	-0.00966
-0.00107	0.002481	0.005961	0.011667	-0.01595	-0.00523	-0.00485	0.011315	0.003043	0.003777	-0.00754	0.008398	-0.00292	0.010079	0.001237	0.02603	0.01471
-0.00065	-0.00208	0.001924	0.015124	-0.01251	-0.00311	0.000908	-0.00745	0.00704	-0.00155	0.005899	-0.00234	0.005117	0.002206	-0.00966	0.01471	0.022164

- Modelo dos Correlatos

MVC_La=

0.026287	-0.00865	-0.001995	-0.002073	-0.0035	-0.01007	0.012244	0.00344	-4.18E-05	0.014043	0.0106	0.005396	0.001953	-0.00217	-0.00562	0.00133	-0.002115
-0.0086468	0.026022	-0.008462	-0.00339	-0.0021	-0.003414	0.002803	0.00341	0.0027051	-0.01145	-0.0149	0.014572	0.011167	0.000611	-0.00279	0.00272	-0.000685
-0.0019947	-0.00846	0.026183	-0.010153	-0.0035	-0.002079	-3.77E-05	0.00354	0.012221	-0.001957	-0.0055	-0.01042	-0.01396	0.002117	-0.00143	0.00561	0.002068
-0.0020731	-0.00339	-0.010153	0.026282	-0.0085	-0.002124	-1.94E-05	-0.0034	-0.012167	-0.0020536	0.00138	-0.00544	-0.00201	0.002143	0.005572	0.01069	0.014115
-0.0035021	-0.00211	-0.003494	-0.008543	0.0264	-0.00877	-0.002779	-0.0036	-0.0026928	-0.0007235	0.00291	-0.00283	0.000801	0.011548	0.015183	-0.01487	-0.011236
-0.01007	-0.00341	-0.002079	-0.002124	-0.0088	0.026457	-0.012212	-0.0033	-2.36E-05	0.0021414	0.00547	-0.00127	0.002056	-0.01425	-0.01092	-0.00548	-0.002147
0.012244	0.002803	-3.77E-05	-1.94E-05	-0.0028	-0.012212	0.018599	-0.0036	9.76E-06	-0.0063549	-0.0028	-0.00355	4.75E-05	-0.00639	-0.00279	-0.00361	-9.67E-06
0.0034428	0.003405	0.0035431	-0.003429	-0.0036	-0.003328	-0.003599	0.01771	-0.0037184	0.0070421	-0.0107	0.010447	-0.00726	0.006927	-0.01078	0.01056	-0.007147
-4.18E-05	0.002705	0.012221	-0.012167	-0.0027	-2.36E-05	9.76E-06	-0.0037	0.018593	-5.15E-05	0.00367	0.002654	0.006372	1.39E-05	0.003732	0.00271	0.006425
0.014043	-0.01145	-0.001957	-0.002054	-0.0007	0.002141	-0.006355	0.00704	-5.15E-05	0.020397	0.01336	0.008948	0.001906	0.004214	-0.00283	0.00494	-0.002105
0.0106	-0.01486	-0.0055	0.0013753	0.0029	0.005469	-0.002756	-0.0107	0.0036669	0.013355	0.02402	-0.0015	0.009167	-0.00271	0.007953	-0.00562	0.005042
0.0053958	0.014572	-0.010419	-0.005444	-0.0028	-0.001272	-0.003552	0.01045	0.0026535	0.0089476	-0.0015	0.02352	0.013073	0.004824	-0.00562	0.00766	-0.00279
0.0019529	0.011167	-0.013962	-0.002015	0.0008	0.002056	4.75E-05	-0.0073	0.006372	0.0019055	0.00917	0.013073	0.020334	-0.0021	0.005159	-0.0029	0.004357
-0.0021741	0.000611	0.0021169	0.002143	0.0115	-0.014245	-0.006388	0.00693	1.39E-05	0.0042135	-0.0027	0.004824	-0.0021	0.020633	0.013705	0.00908	0.002157
-0.0056169	-0.00279	-0.001426	0.0055719	0.0152	-0.010917	-0.002788	-0.0108	0.0037323	-0.0028287	0.00795	-0.00562	0.005159	0.013705	0.024487	-0.00148	0.009304
0.001328	0.00272	0.0056111	0.010686	-0.0149	-0.005475	-0.003609	0.01056	0.0027067	0.004937	-0.0056	0.007657	-0.0029	0.009084	-0.00148	0.02395	0.013393
-0.0021148	-0.00069	0.0020679	0.014115	-0.0112	-0.002147	-9.67E-06	-0.0071	0.0064251	-0.0021052	0.00504	-0.00279	0.004357	0.002157	0.009304	0.01339	0.02054

- **Modelo Combinado**

MVC_La=

4.2853	3.8082	0.99381	0.25108	-0.0991	-0.66868	1.008	-0.0951	-3.96E-01	3.2773	3.3724	-1.4851	-1.3899	-0.33931	0.24418	0.24017	-0.14504
3.8082	9.0394	-1.3416	-0.77039	-0.8838	-2.2354	2.5624	1.0226	0.30463	1.2459	0.22328	2.6688	1.6462	-0.32701	1.3496	0.55682	-0.46576
0.99381	-1.3416	6.5818	-2.4573	-0.9404	-0.84882	4.51E-01	0.90616	2.889	0.54255	-0.3636	-2.7866	-3.6928	0.39756	0.5086	1.3379	0.43176
0.25108	-0.77039	-2.4573	6.3874	-2.1576	-0.75106	2.90E-01	-0.776	-2.9927	-0.038837	0.73711	-1.3114	-0.53544	0.46114	-1.2371	2.6188	3.3947
-0.099143	-0.88383	-0.94036	-2.1576	6.3343	-2.4516	-0.30324	-0.7726	-0.64921	0.2041	0.97669	-0.48144	0.29115	2.7549	-3.5275	-3.5794	-2.8068
-0.66868	-2.2354	-0.84882	-0.75106	-2.4516	5.6182	-1.9923	-0.4753	5.21E-02	1.3236	1.799	0.42563	0.90096	-3.6259	3.1505	-1.1743	-0.69893
1.008	2.5624	4.51E-01	2.90E-01	-0.3032	-1.9923	3.3835	-1.2918	-8.60E-02	-2.3755	-1.0837	-1.8291	-5.37E-01	-1.3912	0.099373	-1.088	2.04E-01
-0.095131	1.0226	0.90616	-0.77595	-0.7726	-0.47533	-1.2918	4.2128	-0.89712	1.1967	-3.0161	2.4095	-1.8033	1.7672	2.4457	2.5398	-1.6731
-3.96E-01	0.30463	2.889	-2.9927	-0.6492	5.21E-02	-8.60E-02	-0.8971	4.573	-3.10E-01	0.58705	0.7868	1.6839	3.39E-02	-0.93103	0.68312	1.5802
3.2773	1.2459	0.54255	-0.038837	0.2041	1.3236	-2.3755	1.1967	-3.10E-01	5.6529	4.4562	0.34408	-0.85263	1.0519	0.14481	0.84779	-0.34891
3.3724	0.22328	-0.36361	0.73711	0.9767	1.799	-1.0837	-3.0161	0.58705	4.4562	7.4723	-2.0655	0.95066	-0.71527	-2.3009	-1.692	1.3242
-1.4851	2.6688	-2.7866	-1.3114	-0.4814	0.42563	-1.8291	2.4095	0.7868	0.34408	-2.0655	5.983	3.5734	1.4035	1.006	1.885	-0.52459
-1.3899	1.6462	-3.6928	-0.53544	0.2912	0.90096	-5.37E-01	-1.8033	1.6839	-0.85263	0.95066	3.5734	5.3767	-0.36365	-1.4396	-0.6548	1.1485
-0.33931	-0.32701	0.39756	0.46114	2.7549	-3.6259	-1.3912	1.7672	3.39E-02	1.0519	-0.7153	1.4035	-0.36365	5.0171	-3.2499	2.2622	0.49505
0.24418	1.3496	0.5086	-1.2371	-3.5275	3.1505	0.099373	2.4457	-0.93103	0.14481	-2.3009	1.006	-1.4396	-3.2499	5.6956	0.27754	-2.1681
-0.24017	0.55682	1.3379	2.6188	-3.5794	-1.1743	-1.088	2.5398	0.68312	0.84779	-1.692	1.885	-0.6548	2.2622	0.27754	5.8416	3.3019
-0.14504	-0.46576	0.43176	3.3947	-2.8068	-0.69893	2.04E-01	-1.6731	1.5802	-0.34891	1.3242	-0.52459	1.1485	0.49505	-2.1681	3.3019	4.975

Comandos referentes ao Ajustamento usando o Modelo Paramétrico

Anexo 5: Comando para o cálculo das equações normais (N,U)

```
% Calculo das Equacoes normais  
N = A'* P* A  
U = A'*P*L
```

Anexo 6: Comando para o cálculo dos parâmetros ajustados (Xa)

```
%Calculo dos Parametros ajustados  
Xa = -inv(N)*U
```

Anexo 7: Comando para o cálculo do vector dos resíduos (V)

```
% Calculo do vector dos residuos  
V = A*Xa+ L
```

Anexo 8: Comando que calcula o sigma- *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$)

```
%Calculo Sigma a posteriori  
sigma_post = (V'*P*V)/(n-u)
```

Anexo 9: Comando que calcula o Qui-Quadrado Amostral (X_c^2)

```
%calculo do Qui-quadrado amostral  
XC = sigma_post*(n-u)/Sigma_priori
```

Anexo 10: Comando que calcula MVC dos parâmetros ajustados (MVC_Xa)

```
%Calculo da MVC dos parametros ajustados  
MVC_Xa = sigma_post * inv(N)
```

Anexo 11: Comando que calcula MVC das observações ajustadas (MVC_La)

```
%Calculo da MVC das observacoes ajustadas  
MVC_La = sigma_post*A*inv(N)*A'
```

Comandos referentes ao Ajustamento usando o Modelo dos Correlatos

Anexo 12: Comando que calcula o erro de fechamento (W)

```
% Calculo do erro de fechamento
W = [ Lb(1) - Lb(10) - Lb(7);
      Lb(7) + Lb(14) + Lb(6);
      Lb(3) - Lb(9) + Lb(13);
      Lb(9) + Lb(4) - Lb(17);
      Lb(10) + Lb(2) - Lb(12);
      Lb(12) - Lb(13) - Lb(8);
      Lb(8) + Lb(15) - Lb(14);
      -Lb(15) + Lb(17) + Lb(5);
      Lb(17) - Lb(16) + Lb(8);
      -Lb(13) + Lb(11) + Lb(2) ];
```

Anexo 13: Comando que calcula a matriz normal (M)

```
%Calculo da Matriz Normal "M"
M = B*(inv(P))*B'
```

Anexo 14: Comando que calcula o vector dos correlatos/Lagrange (K)

```
%Calculo do Vector dos Correlatos/Lagrange
K = inv(M) * W
```

Anexo 15: Comando que calcula o vector dos resíduos (V)

```
%Calculo do Vector dos residuos
V = -inv(P)*B'*K
```

Anexo 16: Comando que calcula o vector das observações ajustadas (La)

```
%Calculo do vector das observacoes ajustadas
La = Lb + V
```

Anexo 17: Comando que calcula o sigma- *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$)

```
%Calculo Sigma aposteriori
sigma_post = (K'*W) / (n-u)
```

Anexo 18: Comando que calcula o Qui-Quadrado Amostral (X_c^2)

```
%calculo do Qui-quadrado amostral
XC = sigma_post*(n-u)/Sigma_priori
```

Anexo 19: Comando que calcula MVC das observações ajustadas (MVC_La)

```
%Calculo da Matriz VARIANCIA-COVARIANCIA das observacoes ajustadas
MVC_La = sigma_post*(inv(P) - inv(P)*B'*inv(M)*B*inv(P))
```

Comandos referentes ao Ajustamento usando o Modelo Combinado

Anexo 20: Comando que calcula o erro de fechamento (W)

```
% Cálculo do erro de fechamento
H1 = 43.261;
H2 = 42.924;
H3 = 43.283;
H4 = 43.417;
H5 = 43.615;
H6 = 43.259;
H7 = 42.81;

W = [Lb(1) - (H1-HA) ;
     Lb(2) - (H2-H1) ;
     Lb(3) - (H3-H2) ;
     Lb(4) - (H4-H3) ;
     Lb(5) - (H5-H4) ;
     Lb(6) - (HA-H5) ;
     Lb(7) - (H6-HA) ;
     Lb(8) - (H7-H6) ;
     Lb(9) - (H3-H7) ;
     Lb(10) - (H1-H6) ;
     Lb(11) - (H1-H7) ;
     Lb(12) - (H2-H6) ;
     Lb(13) - (H2-H7) ;
     Lb(14) - (H5-H6) ;
     Lb(15) - (H7-H5) ;
     Lb(16) - (H4-H6) ;
     Lb(17) - (H4-H7) ];
```

Anexo 21: Comando que calcula a matriz normal (M)

```
% Cálculo da matriz normal (M)
M3 = B * inv(P) * B';
```

Anexo 22: Comando que calcula das correções dos parâmetros (X)

```
% Cálculo das correções dos parâmetros (X)
X = -inv(A' * inv(M3) * A) * (A' * inv(M3) * W);
```

Anexo 23: Comando que calcula vector de Lagrange ou dos correlatos (K)

```
% Cálculo do vector de Lagrange ou dos correlatos (K)
K = A * X + W;
```

Anexo 24: Comando que calcula o vector dos parâmetros ajustados

```
% Cálculo do vector dos parâmetros ajustados
Xa = X0 + X;
```

Anexo 25: Comando que calcula o vector dos resíduos

```
% Cálculo do vector dos resíduos (V)
V = inv(P) * B' * K;
```

Anexo 26 Comando que calcula o vector das observações ajustadas

```
% Cálculo das observações ajustadas  
La = Lb + V;
```

Anexo 27: Comando que calcula o de valor de sigma *a posteriori*

```
% Cálculo do valor de sigma a posteriori  
Sigma_post = (V' * P * V) / (n - u);
```

Anexo 28: Comando que calcula qui-quadrado amostral

```
% Cálculo do qui-quadrado amostral  
XC = Sigma_post * (n - u) / Sigma_priori;
```

Anexo 29: Comando para o cálculo das MVC's dos parâmetros, observações, resíduos e erro de fechamento (Xa, La, V e W)

```
% Cálculo das MVC dos parâmetros, observações, resíduos e erro de fechamento  
MVC_Xa = Sigma_post * inv(A' * inv(M3) * A);  
MVC_La = Sigma_post * (inv(P) + inv(P) * B' * inv(M3) * A * inv(A' * inv(M3) * A) * A' * inv(M3) * B' * inv(P) - inv(P) * B' * inv(M3) * B * inv(P));  
MVC_V = Sigma_post * (inv(P) - MVC_La);  
MVC_W = Sigma_post * M3;
```

Anexo 30: Tabelas de Nivelamento

Tabela de Nivelamento Directo							
Estação	Pontos	Distâncias (m)		Leituras (mm)		Desnível (mm)	
		Atras	Afrente	Atras	Afrente	Positivo	Negativo
1	PA	7.5		1487		111	
				1450			
1412							
2	P1	7.5			1376		
					1339		
1301							
2	P1	7.5		1338			
				1300			
1263							
3	P2	7.5			1000	359	
					963		
925							
3	P3	7.6			642		
					604		
566							
4	P3	10		1425		134	
				1375			
1325							
4	P4	5			1266		
					1241		
1216							
5	P4	10		1291		198	
				1241			
1191							
5	P5	5			1068		
					1043		
1018							
6	P5	5		1068			
				1043			
1018							
6	PA	5			1436		-368
					1411		
1386							
7	PA	4.3			1568	109	

				1546			
				1525			
	P6	3.7			1456		
					1437		
					1419		
8	P6	6.7		1537			
				1503			
				1470			
8	P7	6.7			1088		
					1054		-449
					1021		
9	P7	3.9		1545		289	
				1525			
				1506			
9	P3	4			1256		
					1236		
					1216		
10	P7	6.4		1434			
				1402			
				1370			
10	P2	6.4			1612		
					1580		-178
					1548		
11	P7	8.8		1797		188	
				1753			
				1709			
11	P1	8.8			1609		
					1565		
					1521		
12	P6	9.5		1747			
				1699			
				1652			
12	P2	9.5			1897		
					1849		-150
					1802		
13	P6	6.4		1693		196	
				1660			
				1629			
13	P1	6.6			1498		
					1464		

					1432		
14	P6	6.9		985			
				950			
				916			
15	P5	6.1			1331		-350
					1300		
					1270		
15	P4	10.3		1494			
				1442			
				1391			
16	P6	10.8			1511		-15
					1457		
					1403		
16	P5	9.9		1311			
				1261			
				1212			
17	P7	9.8			1615		-305
					1566		
					1517		
17	P7	6.5		1503			
				1470			
				1438			
17	P4	6.5			1583		-80
					1550		
					1518		
Somatórios		Distâncias = 250.3 m		A = 23583	B = 22499	C = 1584	D = -1592
				A-B = 1084		C+D = -8	

Erro de Fecho = $\sum D_{\text{teor}} - \sum D_{\text{prat}}$	Ordem de Precisão (4 ordem)
Erro de Fecho = -8 mm - 0 mm	Erro admissível = +/- 20 mm * $\sqrt{D}(\text{km})$
Erro de Fecho = -8 mm	Erro admissível = 20 mm * $\sqrt{(0.2503)}$ = +/- 10 mm