UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Optimização de Investimentos Aplicando o método dos Martingales

Autor: Leonel Armando Sumbana.

Maputo, Setembro de 2024

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Optimização de Investimentos Aplicando o método dos Martingales

Autor: Leonel Armando Sumbana.

Supervisor: Prof. Doutor Calisto Guambe.

Maputo, Agosto de 2025

Conteúdo

Abreviaturas

- $\mu(S_t, t)$ representa o drift e $\sigma(S_t, t)$ representa o coeficiente de difusão/volatilidade;
- $L^1[0, T]$ denota o espaço de todos os processos adaptados de valor real X_t tal que:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t |X_s| ds \right) < \infty;$$

- $N(\mu, \sigma^2)$ denota a distibuição normal com média μ e variância σ^2;
- $q.c$ denota quase certamente;
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ denota espaço de probabilidades;

Declaração Sob Compromisso De Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação e que o mesmo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

____

(Leonel Armando Sumbana)

Dedicatória

Quero dedicar este trabalho aos meus pais Ezequiél Chilaule e Admira Alexandre Moiana

Não só luto por mim, luto também pelas pessoas que me rodeiam, um dia entenderão o motivo da minha luta

---

Jub Léo (2020)

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer à Deus, todo poderoso pelo dom da Vida!

À Universidade Eduardo Mondlane pela oportunidade para a realização da Licenciatura. Ao meu supervisor, Prof. Doutor Calisto Justino Guambe, o meu profundo agradecimento por toda a atenção, compreensão, amizade e todo o saber que colocou ao meu alcance.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática e Informática (DMI), pelos ensinamentos, em especial: Profa. Doutora Iara Gonçalves e Prof Doutor Betuel Canhanga.

Aos meu colegas do Curso, Gelar Marime, Cassimo Píres e Timóteo Tsinine.

Aos meus pais, Admira Alexandre Moiana e Ezequiél Chilaule. O meu obrigado por tudo que fizeram e ainda tem feito por mim.

À Fátima Sérgio Nguenha por tudo que fez por mim até os dias de hoje, pelo companherismo acima de tudo. Celeste Alexandre Moiana, Isabel Alexandre Moiana, Daniel Madjitha e ao Prof. Wang Jorge pelo apoio incondicional.

Resumo

Neste trabalho, discutimos um problema de optimização de Investimento usando o Método dos Martingales. O objectivo primordial é encontrar a riqueza terminal óptima assim como a estratégia ideial de investimento com base na riqueza inicial do investidor. Para a resolução do problema utilizamos o método de relaxamento de lagrange. Para a escolha da função utilidade, consideramos um investidor avesso ao risco/conservador e por fim utilizamos o Teorema de Girsanov para a mudança de probabilidade. Após encontrarmos a riqueza ideial, nos focalizamos em como achar a estratégia de portfólio ideal utilizando a dinâmica do portfólio com proporção, onde assumimos a existência de custo. Com o auxilio da fórmula de Itô, achamos a estratégia do portfólio ideal ou simplesmente estrategia óptima.

Palavras-Chave: Dinâmica de Portfólio, Teorema de Girsanov, Martingale, Riqueza terminal óptima e Portfólio ideal

Abstract

In this work, we discuss an investment optimization problem using the Martingales Method. The primary goal is to find the optimal terminal wealth as well as the optimal investment strategy based on the investor's initial wealth. To solve the problem, we use the Lagrange relaxation method. To choose the utility function, we consider a risk-averse/conservative investor and finally we use Girsanov's Theorem for the change in probability. After finding the optimal wealth, we focus on how to find the optimal portfolio strategy using the portfolio dynamics with proportion, where we assume the existence of costs. With the help of Itô's formula, we find the optimal portfolio strategy or simply the optimal strategy.

Keywords: Portfolio Dynamics, Girsanov Theorem, Martingale, Optimal Terminal Wealth and Ideal Portfolio

Capítulo 1

Introdução

Segundo Emil Karlsson (2016) [7], o problema de portfólio óptimo é o estudo de como um investidor deve distribuir sua riqueza ao longo do tempo quando se depara com diferentes oportunidades de investimento que fornecem um ganho de valor estocástico ou uma dotação no futuro para maximizar sua utilidade futura esperada.

De acordo com Tomas Bjork (2009) [4], esta área de estudo começou com Merton onde resolveu o problema de optimização usando a programaçao dinâmica. Essa abordagem transforma o problema de controle óptimo estocástico numa equação diferencial determinística não linear, ou seja, a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), de modo que a natureza probabilística do problema desapareça assim que formulamos a equação HJB. A grande desvantagem deste método é que a equação diferencial resultante geralmente se torna uma não linear para a qual a solução analítica muitas vezes não pode ser obtida e tem que ser resolvida numericamente, fora ao facto de que é limitado aos sistemas Markovianos. Em jeito de resposta a esta limitação foi desenvolvido um outro método, chamado Método dos Martingales.

Emil Karlsson (2016) [7], defende que este método não se limita necessariamente nos sistemas Markovianos, ele interpreta os processos como um problema de cálculo de Esperança. Para além de ser probabilístico, o valor do portfólio é tratado como uma variável e não como uma consequência da alocação, como acontece na abordagem HJB.

Este trabalho visa trazer um modelo que auxilia os investidores no alcance dos seus objectivos onde para tal resolução será utilizado o Método dos Martingales. Face a este caso levantamos a seguinte pergunta: **Que estratégia de investimento deve ser adoptada**

por um investidor de modo a maximizar o seu retorno?

Após a resolução do problema deixaremos algumas recomendações assim como propostas para trabalhos futuros. Este trabalho esta organizado do seguinte modo:

No **Capitulo 2**, começamos com alguns conceitos teóricos, nomeadamente, Probabilidade, Processos Estocásticos, Integral Estocástica, Calculo Estocástico. Ferramentas estas que irão sustentar a parte teórica do nosso trabalho. Apresentamos também dois conceitos fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho, o Movimento Browniano e Martingale.

No **Capitulo 3**, introduzimos a dinâmica de portfólio onde o nosso objectivo primordial é formular a dinâmica do valor de um portfólio auto-financiado para dois activos, um com risco e outro sem risco;

No **Capitulo 4**, abordamos o Teorema de Girsanov responsável pela mudança de medida de probabilidade visto que estaremos assumindo um investidor avesso ao risco. Após encontrarmos a riqueza terminal óptima do portifólio assim como o processo de riqueza ideial simulamos o investimento;

Finalmente, apresentamos a conclusão onde serão detalhados todos os resultados obtidos no nosso trabalho.

1.1 Objectivos

1.1.1 Objectivo geral

- Analizar um problema de optimização de investimeto usando o Método dos Martingales.

1.1.2 Objectivos específicos

- Determinar a dinâmica do valor do portfólio de auto-financiamento;
- Determinar a riqueza terminal óptima do portfólio;
- Determinar o processo de riqueza ideal do Investimento;
- Simular numericamente os resultados obtidos.

Glosário

(i) **Investidor** - é uma pessoa que aplica os seus recursos na compra de ativos financeiros negociados no mercado de capitais, em busca de rentabilidade.

(ii) **Activos e passivos** - Activos são valores patrimoniais positivos, representativos de créditos, direitos ou bens que o agente económico seu titular possuiu ou tem a haver. Passivos são valores patrimoniais negativos, representativos de dívidas, obrigações, compromissos ou responsabilidades do agente económico.

(iii) **Capital** - é qualquer tipo de activo que gere algum fluxo de rendimento ao longo do tempo através da sua aplicação na produção.

(iv) **Opção** - Direito de comprar ou vender (consoante a natureza da opção) um activo subjacente em determinadas condições.

(v) **Activo financeiro** - Os activos financeiros são activos intangíveis (isto é, que não têm existência física) que conferem ao respectivo detentor — o investidor — o direito ao recebimento de benefícios em data futura, sendo a responsabilidade pelo seu pagamento da entidade que procedeu à sua emissão — entidade emitente.

(vi) **Ações** - Parte do capital de uma empresa que pode ser adquirido e gerar rendimentos por meio de seus dividendos ou pela sua venda.

(vii) **Dinheiro** - carrega em si um valor de troca. Quando trocado com outros países pode gerar um rendimento através do câmbio.

(viii) **Fundos de investimento** - aplicação financeira que junta o dinheiro de diversos participantes e é administrado no mercado de capitais com o objetivo de gerar rendimentos.

(ix) **Derivactivos** - são activos cujo valor depende ou é derivado do valor de um outro activo designado por activo subjacente.

(x) **Investimento** - consiste essencialmente numa alocação de dinheiro ou de outros recursos num determinado momento, na expectativa de obter benefícios mais tarde, como compensação do sacrifício suportado.

(xi) **Portfólio ou Carteira** - é a coleção de N activos diferentes mantidos por uma entidade.

(xii) **Portfólio de Investimentos** - é o conjunto de diversos instrumentos financeiros selecionados e geridos com bases sólidas, procurando obter retornos adequados para cada perfil de risco e/ou horizonte de investimento.

(xiii) **Risco** - é definido como a possibilidade de perda financeira e está associada a incerteza dos resultados dos activos. O risco é medido pela variância ou pelo desvio-padrão da distribuição de probabilidades dessa mesma taxa de rentabilidade, sendo que o investidor racional procurará maximizar a rentabilidade dos investimentos e, ao mesmo tempo, minimizar o risco dos mesmos.

(xiv) **Risco sistemático** - é atribuído a factores do mercado que afetam todas as empresas e não podem ser eliminados por meio de diversificação, por isso, também é chamado de risco não-diversificável.

(xv) **Risco Não Sistemático ou diversificável** - é referente a variabilidade dos retornos associados a cada um dos activos individualmente.

(xvi) **Retorno** - é entendido como o valor esperado da distribuição de probabilidades da taxa de rentabilidade de um título ou carteira de investimentos.

(xvii) **Diversificação de investimentos** - é uma técnica de diluição de risco e maximização de ganhos.

(xviii) **Dividendo** - são uma parte dos lucros de uma empresa que são distribuídos aos seus acionistas como forma de remuneração.

(xix) **Volatilidade** - e a medida que mede o grau de incerteza em relacao ao nvel de preco de mercado do activo subjacente

Capítulo 2

Conceitos Matemáticos Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar os conceitos matemáticos preliminares que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho. Esta secção foi escrita com o auxílio das seguintes literaturas: [2],[4], [5], [9], [8], e [7]

2.1 Teoria de Probabilidades

A Teoria de Probabilidades é uma ferramenta imprescindível para a construção e resolução do nosso problema visto que este por sua vez é o responsável em modelar problemas que envolvem a incerteza. Para melhor compreensão desta ferramente é importante definirmos alguns conceitos que irão construir a nossa base teórica.

Definição 2.1.1. *(*Modelo Deterministico)
É aquele em que ao conhecer as variáveis de entrada, ou seja, as condições do experimento, é possível determinar as variáveis de saída, isto é, existe a certeza do resultado que ocorrerá.

Definição 2.1.2. *(*Modelo Estocástico, Probabilístico ou Aleatório)
É aquele em que, mesmo conhecendo as condições iniciais do experimento, não é possível determinar o seu resultado final. Neste caso, é introduzido uma componente aleatória e só é possível determinar a chance de ocorrência de um resultado.

Definição 2.1.3. *(*Experimento Aleatório)
Experimento aleatório são fenômenos em que, quando repetidos inúmeras vezes em processos semelhantes, possuem resultados imprevisíveis.

Definição 2.1.4. (Experimento Deterministico)

São aqueles que quando repetidos em condições semelhantes conduzem resultados essencialmente idênticos.

Definição 2.1.5. (Espaço Amostral)

Denominamos espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, e o denotamos por Ω , S ou E.

Definição 2.1.6. (Evento ou Ocorrência)

Dado um experimento aleatório cujo espaço amostral é Ω. Chamamos de evento todo subconjunto de Ω. O evento pode ser: simples (formado por um único elemento do espaço amostral), composto (formado por dois ou mais elementos do espaço amostral), certo (representado pelo próprio conjunto que define o espaço amostral), impossível (não possui elementos no espaço amostral).

Definição 2.1.7. (Eventos Mutuamente Exclusivos)

Dois eventos E_1 e E_2 são mutuamente exclusivos, se eles não puderem ocorrer simultaneamente, ou seja a ocorrência de um exclui a ocorrência do outro

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset, \text{ logo } \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = 0$$

Definição 2.1.8. (Eventos Independentes)

São aqueles que podem ocorrer ao mesmo tempo, a ocorrência de um não depende da ocorrência do outro.

$$\mathbb{P}(E_1 \setminus E_2) = \mathbb{P}(E_1) \text{ e } \mathbb{P}(E_1 \setminus E_2) = \mathbb{P}(E_2) \text{ logo}$$

$$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset; \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2)$$

Definição 2.1.9. *(σ - álgebra)*

Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω tendo as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(ii) Se $A \in \mathcal{F}$ *então* $A^c \in \mathcal{F}$; *(a classe é fechada pela complementariedade)*

(iii) Se $A_n \in \mathcal{F}$ então $U_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. (a classe é fechada pela união infinita enumerável)

Então a classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω chama-se σ - álgebra.

Definição 2.1.10. (Espaço Mensurável)
Seja o conjunto $\Omega \neq \emptyset$ e seja η a σ - álgebra de subconjuntos de Ω. O par (Ω, η) chama-se espaço mensurável.

Um conjunto $A \subseteq \Omega$ chama-se conjunto mensurável, isto é, $A \in \eta$.

Definição 2.1.11. (Medida)

Uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma aplicação μ: $\mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty[$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) para toda sequência de eventos disjuntos $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, temos que

$$\mu(U_{n=1}^{\infty} A_n) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Esta propriedade é denominada de σ-aditividade.

Definição 2.1.12. (Medida de Probabilidade)
Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensuravél e $\mathbb{P}$ uma função com valores reais definidas sobre σ-álgebra $\mathcal{F}$. A função $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1\,]$ é chamada de medida de probabilidade se são válidas as seguintes propriedades:

(i) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$;

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Definição 2.1.13. (Variável Aleatória)
Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função de valores reais definida em Ω, tal que: $\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, uma função X: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.1.14. (Variável Aleatória Discreta) Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X for um conjunto de pontos finito ou infinito enumerável, denominamos X de variável aleatória Discreta.

Definição 2.1.15. (Variável Aleatória Contínua) Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X for um conjunto finito ou infinito não enumerável, denominamos X de variável aleatória contínua.

Diz-se que um conjunto X é finito se $X = \emptyset$ ou existir $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \longrightarrow X$. Neste caso, diz-se que X tem n elementos.

Definição 2.1.16. (Valor Esperado/ Valor Médio/Esperança Matemática)

Seja X uma variável aleatória discreta que pode assumir os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, com probabilidades $\mathbb{P}(x_1), \mathbb{P}(x_2), ..., \mathbb{P}(x_n)$, respectivamente. Então, a esperança de X é dada por:

$$\mathbb{E}(X) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X_i).$$

Seja X uma variável aleatória contínua. A **função de densidade de probabilidade** $f(x)$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(x) \to 0$;

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

(iii) Sejam a e b quaisquer no intervalo,$-\infty < a < b < +\infty$ temos que: $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$. O valor esperado de X será definido por:

$$\mathbb{E}(X) = \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Propriedades de Esperança Matemática

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e a uma constante, então:

(i) $\mathbb{E}(a) = a$;

(ii) $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$;

(iii) $\mathbb{E}(X \pm a) = \mathbb{E}(X) \pm a$;

(iv) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X) \pm \mathbb{E}(Y)$;

(v) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ onde X e Y são duas variáveis aleatórias independentes;

Definição 2.1.17. *(*Variância)

Seja X uma variável aleatória discreta com esperança finita. Então, a variância de X é dada por:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2, \tag{2.1}$$

onde

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbb{P}(X_i), \tag{2.2}$$

Propriedades:

(i) $Var(aX) = a^2 Var(X)$;

(ii) $Var(X \pm a) = Var(X)$;

(iii) $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$, se X e Y são variáveis aleatórias independentes;

(iv) $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X;Y)$, se X e Y são variáveis aleatórias dependentes.

Definição 2.1.18. *(*Desvio Padrão)

O desvio padrão de X é dado por $\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$.

Definição 2.1.19. *(*Probabilidade Condicional)

Dados dois eventos X e Y, a probabilidade condicional de X ocorrer, dado que ocorreu Y, é representado por $\mathbb{P}(X|Y)$ e dada por: $\mathbb{P}(X|Y)$=$\mathbb{P}(X \cap Y)/\mathbb{P}(Y)$.

Definição 2.1.20. *(*Esperança Condicional)

Sejam X e Y variáveis aleatórias integrável em $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$. A Esperança Condicional de X dado $Y = y$ é definida por:

$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int x dF_{X|Y}(x|y) = \sum_x x\mathbb{P}(X=x|Y=y)$ se X discreta

Onde $\mathbb{P}(X=x|Y=y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)/\mathbb{P}(Y=y)$ representa as Distribuições condicionais.

$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int x dF_{X|Y}(x|y) = \int x f_{X|Y}(x|y)dx$ se X contínua.

Onde $f_{X|Y}(x|y)$ representa a função de densidade de probabilidade condicional.

Teorema 2.1.1. Propriedades da esperança condicional
Sejam X e G variáveis aleatórias integráveis em (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$), e Y um sub σ- álgebra de $\mathcal{F}$. Então

(i) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$ (invariância da média);

(ii) Se X é Y - mensurável então $\mathbb{E}[X|Y] = X$(propriedade de projeção);

(iii) Se a e b são constantes então $\mathbb{E}[aX + bG|Y] = a\mathbb{E}[X|G] + b\mathbb{E}[G|Y]$ (linearidade);

(iv) Se $X \leq G$, então $\mathbb{E}[X|Y] \leq \mathbb{E}[G|Y]$ (monotocidade);

(v) Se $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ com probabilidade um, $|X_n| \leq G$, e G é integrável, então $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|Y] = \mathbb{E}[X|Y]$ (convergência dominada);

(vi) Se $X_n \geq 0$ e $X_n \to X$ com $\mathbb{E}[X] < \infty$, então $\mathbb{E}[XG|Y] = X\mathbb{E}[G|Y]$ (Y - Convergência monótona);

(vii) Se X é $Y-$ mensurável e XG é integrável então $\mathbb{E}[XG|Y] = X\mathbb{E}[G|Y]$ (Y- mensuráveis comportam-se como constantes)

(viii) Se X é independente de Y, então $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ (independência);

(ix) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ então $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y_1]|Y_2] = \mathbb{E}[X|Y_1]$ (filtração).

Demonstração. (i) Por definição, a variável aleatória $\mathbb{E}[X|Y]$ é Y - mensurável e verifica

$$\int_A \mathbb{E}[X|Y]d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P},$$

para qualquer $A \in Y$ tomando em particular $A = \Omega$ (nota-se que $\Omega \in Y$), obtemos

$$\int_\Omega \mathbb{E}[X|Y]d\mathbb{P} = \int_\Omega Xd\mathbb{P}.$$

O primeiro membro da igualdade anterior é $\mathbb{E}(\mathbb{E}[X|Y])$ e o segundo membro é $\mathbb{E}(X)$, portanto $\mathbb{E}(\mathbb{E}[X|Y]) = \mathbb{E}(X)$

(ii) Definindo $\mathbb{E}[X|Y] \equiv \mathbb{E}(X)$ temos que $\mathbb{E}[X|Y]$ é Y - mensurável, logo o resultado sai da unicidade.

(iii) Como $\mathbb{E}[aX + bG|Y]$ é Y - mensurável e seja $A \in Y$ então

$$\begin{aligned}\int_A \mathbb{E}[aX + bG|Y]d\mathbb{P} &= \int_A (aX + bG)d\mathbb{P} = \int_A aXd\mathbb{P} + \int_A bGd\mathbb{P}\\ &= a\int_A Xd\mathbb{P} + \int_A Gd\mathbb{P} = \int_A (aX + bG)d\mathbb{P},\end{aligned}$$

consequentemente

$$\mathbb{E}[aX + bG|Y] = a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[G|Y].$$

(iv)

$$\int_A \mathbb{E}[X|Y]d\mathbb{P} = \int_A Xd\mathbb{P} \leq \int_A Gd\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[G|Y]d\mathbb{P},$$

para todo $A \in Y$. Agora tomemos $A_n = \mathbb{E}[G|Y] - \mathbb{E}[X|Y] \leq \frac{1}{n}$, notamos que $\mathbb{P}(A_n) = 0$ para todo n e, consequentemente,

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y] \leq \mathbb{E}[G|Y]) = 0.$$

(v) Seja $\sup_{k \leq n} |X_k - X_n|$. Então $Z_n \to 0$ com probabilidade um e, pelas propriedades (iii) e (iv) temos

$$|\mathbb{E}[X_n|Y] - \mathbb{E}[X|Y]| \geq \mathbb{E}[Z_n|Y].$$

Portanto, é suficiente mostrar que $\mathbb{E}[Z_n|Y] \to 0$ com probabilidade um. Como

$Z_n \geq 0$ é não crescente, pela propriedade (iv), $\mathbb{E}[Z_n|Y]$ também o é, portanto tem limite Z.

Note que $0 \leq Z \leq \mathbb{E}[Z_n|Y]$ para todo n. Queremos mostrar que $Z = 0$ com probabilidade um. Sendo Z não negativa, é suficiente mostrar que $\mathbb{E}[Z] = 0$. Mas $0 \leq Z_n \leq 2G$, então por Convergência Dominada usual, temos que

$$\mathbb{E}[Z] = \int Z d\mathbb{P} \leq \int \mathbb{E}[Z_n|Y] d\mathbb{P} = \mathbb{E}[Z_n] \to 0.$$

(vi) Seja $G = X - X_n$. Por linearidade, é suficiente mostrar que $Z_n \equiv \mathbb{E}[Z_n|Y] \to 0$. Como $G_n \to 0$, temos pela propriedade 4, que também Z_n é não crescente, logo tem um limite Z, $0 \leq Z \leq Z_n$ para todo n. Notemos que G_n é dominada por X que é integrável portanto, pela propriedade 1 e novamente pelo Teorema da Convergência Dominada (usual),

$$\mathbb{E}[Z] \leq \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[G_n] \to 0.$$

Logo, $Z = 0$ q.c, como queríamos.

(vii) Como $X\mathbb{E}[G|Y]$ é Y - mensurável, é suficiente mostrar que

$$\int_A X\mathbb{E}[G|Y] d\mathbb{P} = \int_A XG d\mathbb{P},$$

para todo $A \in Y$.

Suponhamos que $X = I_B$ com $B \in Y$. Neste caso, se $A \in Y$, e como $A \cap B \in Y$, temos

$$\int_A I_B \mathbb{E}[G|Y] d\mathbb{P} = \int_{A\cap B} \mathbb{E}[G|Y] d\mathbb{P} = \int_{A\cap B} G d\mathbb{P} = \int_A I_B G d\mathbb{P}.$$

(viii) X ser independente de Y significa que a variável aleatória X é independente da informação dada por Y, ou ainda X é independente das variáveis aleatórias Y - mensuráveis. Como $\mathbb{E}[X]$ é uma constante, e portanto é Y - mensurável.

É suficiente mostrar que para todo $A \in Y$ vale

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X] d\mathbb{P},$$

por outro lado

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int I_A X d\mathbb{P} = \mathbb{E}[I_A X] = \mathbb{E}[I_A]\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}[X] = \int_A \mathbb{E}[X] d\mathbb{P},$$

onde usamos a independência entre X e a variável aleatória Y - mensurável I_A na terceira igualdade.

(ix) Notemos que $\mathbb{E}[X|Y_1]$ é Y_2 - mensurável, pois $Y_1 \subseteq Y_2$. Logo, pela propriedade 2 temos

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y_1]|Y_2] = \mathbb{E}[X|Y_1].$$

Para provar também que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y_1]|Y_2] = \mathbb{E}[X|Y_1]$, notemos que $\mathbb{E}[X|Y_1]$ é Y_1 - mensurável e se $A \in Y_1 \subseteq Y_2$ entao

$$\int_A \mathbb{E}[X|Y_1] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[X|Y_2] d\mathbb{P}.$$

□

2.2 Processos Estocásticos

Os processos estocásticos permitem-nos descrever as flutuações do valor de um activo, que podem ser causados por variações esperadas ou não. Para tal, consideramos as seguintes definições dos processos estocásticos.

Definição 2.2.1. *(*Processo Estocásticos)

Um Processo Estocástico no espaço de probabilidade (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$) é simplesmente uma coleção indexada $\{X_t : t \geq 0\}$ de variáveis aleatórias(C. Braumann. apud G. Sitoe).

Observação 2.2.1. Aos valores que X_t pode assumir chamam-se estados e ao seu conjunto E espaço de estados

Consideremos um processo estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$, a diferença $X_{t+s} - X_s$, é definida como incremento do processo em um intervalo de comprimento t.

Definição 2.2.2. *(*Incrementos Independentes)
Um processo estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ diz-se ter incrementos independentes se para intervalos disjuntos,

$0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < ... < t_k$, as variáveis $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, X_{t_4} - X_{t_3}, ..., X_{t_k} - X_{t_k-1}$ são independentes

2.3 Processo de Wiener ou Movimento Browniano

O movimento Browniano foi descoberto pela primeira vez por Robert Brown em 1827 após ter verificado o movimento aleatório de pequenas partículas na água. O movimento Browniano é um conceito indispensável para o cálculo estocástico, tendo aplicações na Biologia e Economia.

Definição 2.3.1. *(*Processo de Wiener ou Movimento Browiniano)
(L. Evanns apud B. Germano) Um processo estocástico $W(t)$ ou W_t é chamado de Movimento Browniano ou processo padrão de Wiener quando satifaz os seguintes axiomas:

(i) $W(t)$ inicia em zero, ou seja, $W(0) = 0$ quase certamente.

(ii) $W(t)$ tem incrementos independentes, isto é, para $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ...W(t_n) - W(t_{n-1})$ são processos aleatórios independentes.

(iii) Para $s < t$, $W(t) - W(s)$ está normalmente distribuída com média 0 e variância $(t - s)$.

(iv) Para ω fixo, W tem trajectória contínua quase certamente, isto é, possui medida de probabilidade igual a zero nos pontos em que não tem trajectória contínua .

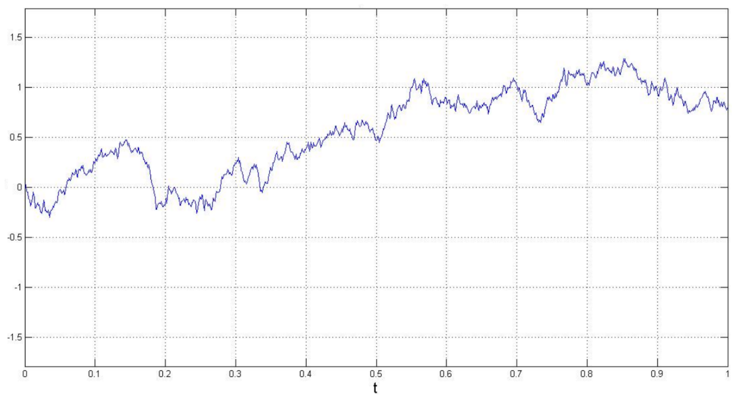

Figura 2.1: Simulação do Movimento Browniano

Observação 2.3.1. *O item (ii) significa que os "movimentos"ou deslocamentos que o processo tem nestes intervalos disjuntos do tempo são independentes um do outro. O item (iii) significa que dado $s < t$ o incremento que o processo W_t têm entre os tempos s e t só depende da diferença $t - s$ e não depende dos valores específicos s e t. No item (iv) note que a variável aleatória $W_t - W_s$ tem distribuição com média zero e variância $t - s$, isto é, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.*

Exemplo 2.3.1. Qual é a probabilidade do movimento browniano ser menor ou igual a 4 no instante $t = 6$? Sabendo que $W_6 \sim N(0, 6)$.

Antes de resolvermos este exemplo, consideremos a seguinte propriedade:

Seja Z uma variavel aleatoria $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tal que $Z = f(X)$.

Se $X : N(\mu, \sigma^2) \longrightarrow Z \sim N(0, 1)$

Seja $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Pela definição (2.1.16),

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\tfrac{X-\mu}{\sigma}) = \tfrac{1}{\sigma}\left[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mu)\right] = \tfrac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

Por outro lado, aplicando as propriedades da definição (2.1.17),

$$Var(Z) = Var(\tfrac{X-\mu}{\sigma}) = \tfrac{1}{\sigma^2}\left[Var(X) - Var(\mu)\right] = \tfrac{1}{\sigma^2}(\sigma^2 - 0) = 1$$

$$\text{Então: } Var(Z) = 1$$

Agora, vamos resolver o exemplo proposto:

$$W_6 \sim N(0,6)$$

$$Z = \tfrac{W_6-\mu}{\sigma}$$

$$Z = \tfrac{W_6-0}{\sqrt{6}}$$

$$Z = \tfrac{W_6}{\sqrt{6}}$$

$$W_6 \sim N(0,6) \longrightarrow \tfrac{W_6}{\sqrt{6}} \sim N(0,1)$$

$$P(W_6 \leq 4) = P(\tfrac{W_6}{\sqrt{6}} \leq \tfrac{4}{\sqrt{6}}) = \int_{-\infty}^{\frac{4}{\sqrt{6}}} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-s^2}{2}} ds \approx 0,948$$

Calculemos a covariância do movimento browniano W_t. Sem perda de generalidade tomemos $s < t$. Usando a linearidade da espernça e que $W_0 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} Cov[(W_t, W_s] &= \mathbb{E}[(W_t - \mathbb{E}[W_t])(W_s - \mathbb{E}[W_s])] \\ &= \mathbb{E}[W_tW_s - W_t\mathbb{E}[W_s] - W_s\mathbb{E}[W_t] + \mathbb{E}[W_t]\mathbb{E}[W_s]] \\ &= \mathbb{E}[W_tW_s - 0 - 0 + 0 * 0] \\ &= \mathbb{E}[W_tW_s] \end{aligned}$$

Ou seja, $Cov[(W_t, W_s] = \mathbb{E}[W_tW_s]$. Mas

$$
\begin{aligned}
W_t W_s &= (W_t - W_s + W_s)W_s \\
&= [W_t W_s - W_s^2 + W_s^2] \\
&= [W_s(W_t - W_s) + W_s^2] \\
&= (W_s - W_0)(W_t - W_s) + W_s^2
\end{aligned}
$$

Usando o fato que $W_s - W_0$ é independente de $W_t - W_s$ temos:

$$
\begin{aligned}
Cov[(W_t, W_s] &= \mathbb{E}[W_t W_s] \\
&= \mathbb{E}[(W_t - W_s + W_s)W_s] \\
&= \mathbb{E}[(W_s - W_0)(W_t - W_s)] + \mathbb{E}[W_s^2] \\
&= min(s, t).
\end{aligned}
$$

2.4 Integral Estocástica

Para a construção da integral estocástica, vamos considerar como dado um processo W de Wiener, e outro processo estocástico ϕ, para garantir a existência da integral estocástica temos que impor algum tipo de condições de integrabilidade em ϕ, e a classe L^2 acaba sendo natural.

Definição 2.4.1. *(Filtração) Uma familia de sub-σ-algebras $(\mathcal{F}_t)$ com $t \geq 0$ é chamada de filtração no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ se*

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$$

isto é, $(\mathcal{F}_t)$ com $t \geq 0$ é crescente.

Definição 2.4.2. *(Processo Adaptado)*
Um processo estocastico (X_t) com $t \geq 0$ é dito adaptado a uma filtração $(\mathcal{F}_t)$ com $t \geq 0$ se, para tempo $t \geq 0$, a variável aleatória X_t é mensural em relação a σ-álgebra $\mathcal{F}_t$

Todo processo é adaptado a sua filtração natural $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$

Definição 2.4.3. *(E*spaço de probabilidade filtrado)
Filtrações são família de σ-álgebra ordenadas e não-decrescentes. Então se F é uma filtração, então $(\Omega, A, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é dito espaço de probabilidade filtrado.

Sendo que $A = \sigma$-álgebra

Definição 2.4.4. *(*Processo Adaptado em relação a Filtração)
Uma processo estocástico X_t é dito ser adaptado em relação a filtração $\mathcal{F}_t : t \in [0, T]$, se para cada $t \in [0, T]$, a variável aleatória X_t e mensurável em $\mathcal{F}_t$, isto é, $X_t \leq \alpha \in \mathcal{F}_t$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4.5. *(Classe L^2)*

Dizemos que o processo ϕ pertence à classe L^2 $[a, b]$ se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\int_a^b \mathbb{E}[\phi^2_{(s)}]ds < \infty$;

(ii) O processo ϕ é adaptado à filtração $\mathcal{F}_t^W$

Definição 2.4.6. (Integral Estocástica)
Seja $f(W(s)) \in L^2[0,T]$ um processo de etapas. Então, define-se o integral estocástico pela fórmula

$$\int_0^T f(W(s)dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} f(W(t_k))(W(t_{k+1}) - W(t_k)). \quad (2.3)$$

Definição 2.4.7. (Processo Simples)
Um Processo Estocástico $\phi : [\alpha, \beta] \to R$ é dito simples se for constante por partes na variavel t, isto é, se existir uma partição

$$\alpha < t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$$

do intervalo $[\alpha, \beta]$ tal que

$$\phi(t) = \phi(t_i) \text{ se } t_i \leq t < t_{i+1},\ 0 \leq i \leq n-1.$$

Para um processo simples ϕ definido em $[\alpha, \beta]$, pela forma

$$\phi(t) = \Sigma_{i=0}^{n-1} \phi(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad (2.4)$$

onde $I_{[t_i,t_{i+1})}(t)$ é a função indicadora do intervalo $[t_i, t_{i+1})$.

Definição 2.4.8. Integral de Itô
Seja ϕ um processo elementar,

$$\phi(t) = \Sigma_i^{n-1} \phi(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t), \quad (2.5)$$

onde $\alpha < t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$ e uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$. Definimos a integral de Itô de ϕ no intervalo $[\alpha, \beta]$ como

$$\int_\alpha^\beta \phi(t) dW_t = \Sigma_{i=0}^{n-1} \phi(t_i)(W_{t_i+1} - W_{t_i})$$

Observação 2.4.1. Estas integrais estocásticas são chamadas também de integrais de Itô, onde o nome Itô faz referência ao matemáatico japonês Kiyoshi Itô (1915-2008) que desenvolveu grande parte da teoria básica.

2.4.1 Propriedades de Integrais Estocásticas

Sejam f e g funções mensuráveis e adaptadas a informação gerada pelo movimento browniano, α e $\beta \in \mathbb{R}$ então:

(i)
$$\int_0^t (\alpha f(W_s) + \beta g(W_s))dW_s = \int_0^t (\alpha f(W_s)dW_s + \int_0^t \beta g(W_s)dW_s; \tag{2.6}$$

(ii)
$$\mathbb{E}\bigg(\int_0^t f(W_s)dW_s\bigg) = 0; \tag{2.7}$$

(iii)
$$\mathbb{E}\bigg(|\int_0^t f(W_s)dW_s|^2\bigg) = \mathbb{E}\bigg(\int_0^t |f(W_s)dW_s|^2 ds\bigg). \tag{2.8}$$

As demonstrações das propriedades acima podemos encontrar em [1]

Definição 2.4.9. (Equação Diferencial Estocástica)
Uma equação diferencial estocástica é toda equação do tipo:

$$dS(t) = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dW(t). \tag{2.9}$$

$$S(0) = s_0. \tag{2.10}$$

A solução de (2.9) é um processo $S(t)$ satisfazendo

$$S(t) = s_0 + \int_0^t \mu(s, S(s))ds + \int_0^t \sigma(s, S(s))dW(s), \tag{2.11}$$

Teorema de Existência e Unicidade de soluções

Supondo que a condição inicial (2.10) e os coeficiente da equação (2.9) satisfaçam:

(i) **Condição de Lipschitz**: existe uma constante $K > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ e $\forall t \in [0, T]$

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x - y|\,.$$

(ii) **Restrição de crescimento**: existe uma constante $C > 0$ tal que $\forall t \in [t_0, T]$ e $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|\mu(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq C^2(1 + |x|^2).$$

Então a equação (2.9) tem única solução $S(t)$ assumindo valores reais, contínua com probabilidade 1 que satiz a condição inicial $S(0) = s_0$ e uniformamente delimitada em L^2 $[a, b]$.

As demonstrações de Existência e Unicidade de soluções podemos encontrar em [10].

2.4.2 Fórmula de Itô

Nesta secção introduzimos a fórmula de Itô para o cálculo estocástico. Esta fórmula é usada para achar o diferencial de funções de duas variáveis.

Suponhamos que $S(t)$ segue um processo estocástico da forma:

$$dS(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \tag{2.12}$$

onde $\mu(t) \in L^1[0, T]$ e $\sigma(t) \in L^2[0, T]$.

Seja $h : \mathbb{R} \times [0, T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial t}$ $\frac{\partial f}{\partial s}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ existem e são continuas. Definamos o processo estocástico $(Y(t))_{t\in[0,T]}$ $Y(t) = f(t, S(t))$.
Então o diferencial estocástico $Y(t) = f(t, S(t))$ existe e é dado por:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial t}(t, S(t))dt + \frac{\partial Y}{\partial S(t)}dS(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2(t)}(t, S(t))(dS(t))^2.$$

Observação 2.4.2. $(dS(t))^2$ é formalmente calculado através da tabela de multiplicação abaixo.

Tabela 2.1: Tabela de multiplicação de Itô

$\times$	dt	$dW(t)$
dt	0	0
$dW(t)$	0	dt

2.4.3 Movimento Browniano Geométrico

Consideremos a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\ S(t_0) = s_0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Esta equação é chamada Movimento Browniano Geométrico (MBG) e será uma ferramenta fundamental para modelar o preço de activos. Neste contexto vamos assumir duas constantes μ e σ, onde μ é chamada de drift e o coeficiente σ é chamado de volatilidade do activo.

Proposição 2.4.1. A solução da equação (2.13) é um processo satisfazendo a equação

$$S(t) = s_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \right\}. \tag{2.14}$$

Demonstração. Seja $Y(t, S(t)) = \ln S(t)$, aplicando a fórmula de Itô, temos

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial t}(t, S(t))dt + \frac{\partial Y}{\partial S(t)}dS(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2(t)}(t, S(t))(dS(t))^2.$$

Onde as derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, S(t)) = 0; \qquad \frac{\partial Y}{\partial S(t)}(t, S(t)) = \frac{1}{S(t)} \qquad e \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial S(t)^2}(t, S(t)) = -\frac{1}{S^2(t)}. \tag{2.15}$$

Então

$$\begin{aligned} dY(t, S(t) = d\ln S(t) = &\left\{ 0 + \mu S(t)\frac{1}{S(t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{1}{S(t)^2} \right\} dt \\ &+ \sigma S(t)\frac{1}{S(t)}dW(t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t).$$

Integrando no intervalo de t_0 a t, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t d\ln(s) &= \int_{t_0}^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, S(s))dW(s) \\ \ln S(t) - \ln S(0) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \end{aligned}$$

De onde resulta que

$$S(t) = s_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))\right\}.$$

□

2.5 Martingale

Definição 2.5.1. *(Martingale)* Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade é $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ uma filtração em σ-álgebra. O tempo T pode ser contínuo ou discreto. Um processo estocástico $(X_t)_{t\in T}$ a valores reais definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dito um martingale em relação a filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ (e a medida $\mathbb{P}$) se

(i) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ para todo $t \in T$

(ii) $(X_t)_{t\in T}$ é adaptado a filtração $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$

(iii) $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ q.c para todo $t \geq s$

Quando a filtração não for mencionada, subentende-se que se trata da filtração natural $\mathcal{F}_t = \Omega(X_s, 0 \leq s \leq t)$ gerada pelo próprio processo. A condição (iii) expressa a ideia de que, tendo toda informação sobre o processo até o tempo s, a melhor estimativa para o estado futuro do processo no tempo $t \geq s$ é justamente X_s, o ultimo valor observado.

Os martingales são processos estocásticos para os quais o valor para o futuro $(\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s])$ em função do que conhecemos hoje $(\mathcal{F}_s)$ está somente baseado no valor que assume o processo no presente (X_s), não importando com os valores que assumiu no passado $(X_u, u < s)$.

Exemplos de Martingales

Exemplo 2.5.1. *Seja $X_1, X_2, ...$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ e $\mathbb{E}[X_n] = 0$ para todo n. Consideremos a filtração $\mathcal{F}_n = \Omega(X_1, ..., X_n)$. Definimos o processo S_n como a soma $S_n = \Sigma_{k=1}^n X_k$. Então S_n é um martingale em relação* *a σ-álgebra $\mathcal{F}_n$.*

Vejamos:

(i) Para todos n, $\mathbb{E}[|S_n|] \leq \mathbb{E}[|X_1|] + ... + \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$

(ii) Para todo n, S_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável, pois é a soma das variaveis X_k, $k = 1, ..., n$, que são $\mathcal{F}_n$ -mensuráveis por definição de $\mathcal{F}_n$

(iii) Se $n \geq m$ então:

$$\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_m] = E[X_n + X_{n-1} + ... + X_{m+1} + S_m|\mathcal{F}_m]$$

Pela linearidade da esperança condicional, temos:

$$= \mathbb{E}[X_n + X_{n-1} + ... + X_{m+1}|\mathcal{F}_m] + \mathbb{E}[S_m|\mathcal{F}_m]$$

Note que $X_n + ... + X_{m+1}$ é independente da $\mathcal{F}_m = \Omega(X_1, ..., X_m)$,

S_m é $\mathcal{F}_m$-mensurável sendo assim ficamos com

$$\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[X_n + X_{n-1} + ... + X_{m+1}] + S_m$$

$$= 0 + S_m = S_m$$

Exemplo 2.5.2. *(Movimento Browniano)*
Denotemos por $(\mathcal{F}_t)$ com $t \geq 0$ a filtração natural do movimento browniano (W_t) com $t \geq 0$. Vamos vereficar se (W_t) com $t \geq 0$ é um martingale

(i) Para cada $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|W_t|] < \infty$, pois $W_t \sim N(0, t)$

(ii) (W_t) com $t \geq 0$ é adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t>=0}$ (filtração natural)$(\mathcal{F}_t)_{t>=0}$

(iii) Se $n \geq m$ então:

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s) + W_s| \quad pois$$

$(W_t - W_s)$ é independente da σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ e W_s é $\mathcal{F}_m$-mensurável.

Verifiquemos se $S_t = S_0 \exp(at - \frac{1}{2}a^2 t)$ é um martingale

S_t está em L^1. Observamos que como $W_s - W_t \sim N(0, s - t)$ temos que

$$\mathbb{E}[\exp(a(W_s - W_t) - \tfrac{1}{2}a^2(s-t))] = \int_{\mathbb{R}} e^{ax - \frac{1}{2}a^2(s-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(s-a(s-t))^2}{2(s-t)}} dx = 1$$

Calculemoos, para $s > t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[S_t \exp(a(W_s - W_t) - \frac{1}{2}a^2(s-t))|\mathcal{F}_t] \\
&= S_t \mathbb{E}[\exp(a(W_s - W_t) - \frac{1}{2}a^2(s-t))] \\
&= S_t \cdot 1 = S_t
\end{aligned}$$

2.6 Função Utilidade

Segundo Maxwell Vrac (2017), o princípio da Utilidade esperada, estabelecido por John Von Neuman e Oskar Morgenstern, permite valorar a distribuição da probabilidade dos possíveis resultados, estabelecer a preferência entre as decisões associadas e estas distribuições de probabilidade de resultados. A escolha da função utilidade é baseada no perfil do investidor.

Definição 2.6.1. *(Função Utilidade)* Uma função de utilidade é uma função semicontínua superior, côncava, sem decrescimento, $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisfaça:

(i) A meia linha $dom(U) = x \in \mathbb{R}^+ : U(x) > -\infty$ é um subconjunto não vazio de $[0, \infty)$

(ii) A derivada U' é contínua, positiva e decresce estritamente no interior de $dom(U)$, e

$$U'_{(0)} = lim_{n \to 0} U'(x) = -\infty$$

$$U'_{(0)} = lim_{n \to 0} U'(x) = -\infty$$

$$U'_{(\infty)} = lim_{n \to \infty} U'(x) = 0$$

Tipos de Funções Utilidades

Existem vários tipo de funções utilidades, dos quais se destaca: Logaritmica e Exponencial

Existem ao todo 3 tipos de investidores, nomeadamente:

(i) Investidor Avesso a risco/Conservador: se $-\frac{U''(x)}{U'(x)} > 0$;

(ii) Investidor Neturo a Risco: se $-\frac{U''(x)}{U'(x)} = 0$;

(iii) Inestidor Propenso a risco: se $-\frac{U''(x)}{U'(x)} < 0$;

Capítulo 3

Dinâmica do Portfólio

Este capítulo irá tratar do problema da dinâmica do portfólio autofinanciado com tempo finito no mercado financeiro que consiste de um activo com risco e um sem risco. Este capítulo foi baseado na seguinte obra: [4].

Consideremos um mercado financeiro composto por dois activos (um sem risco e um com risco), o objectivo principal é derivar a dinâmica do valor de um portfólio autofinanciado em tempo contínuo.

3.1 Portfólio autofinanciado

Um portfólio h com o valor X_t diz se autofinanciado se satisfaz a condição

$$dX(t) = \sum_{i=0}^{N} h_i(t) dS_i(t) - c(t)dt, \tag{3.1}$$

onde:

- N é o número de activos;
- h_i é o número de ações do tipo i;
- $c(t)$ representa a taxa de consumo durante o período t;
- S_i é o preço da ação i;
- $X(t)$ é o valor do portifólio no período t.

O processo $B(t)$ é o preço de um activo sem risco, se tiver a dinâmica:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt. \tag{3.2}$$

onde $r(t)$ denota a taxa de juros

A solução de (3.2) é dada por:

$$B(t) = B(0)\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right).$$

Um activo financeiro com risco é um activo cujo seu preço $S(t)$ tem a seguinte dinâmica:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \tag{3.3}$$

As funções α e σ são constantes ou funções determinísticas e $W(t)$ é um Movimento Browniano, a função σ é conhecida como volatilidade de $S(t)$.

onde α representa e σ denota A solução de (3.3) é dada pela expressão:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right).$$

Definição 3.1.1. *(***Portfólio relativo**)

Para um determinado portfólio h, o portfólio relativo é dado por:

$$u_i(t) = \frac{h_i(t)S_i(t)}{X(t)}, \tag{3.4}$$

onde:

$$\Sigma_{i=1}^{N} u_i(t) = 1$$

Consideremos dois activos, um com risco e outro sem risco, isto é, $N = 2$, então

$$X(t) = \sum_{i=1}^{2} h_i(t)S_i(t) - c(t) = h_1(t)S_1(t) + h_2(t)S_2(t) - c(t),$$

sendo que apenas o preço varia com o tempo, então a dinâmica de um portfólio é representada da seguinte forma:

$$dX(t) = h_1(t)dS_1(t) + h_2(t)dS_2(t)t - c(t)dt$$

Seja $u_i(t)$ a proporção do valor investido em $S_i(t)$, isto é,

$$u_i(t) = \frac{h_i(t)\cdot S_i(t)}{X(t)} \text{ ou } \mathrm{h}_i(t) = \frac{u_i(t)\cdot X(t)}{S_i(t)}$$

Deste modo:

$$h_1(t) = \frac{u_1(t)\cdot X(t)}{S_1(t)} \text{ e } h_2(t) = \frac{u_2(t)\cdot X(t)}{S_2(t)},$$

onde

$$u_1(t) + u_2(t) = 1$$

Subistituindo na dinâmica do portfólio (3.1) e tendo em conta que $u_2(t) = 1 - u_1(t)$, temos:

$$dX(t) = \frac{u_1(t)X(t)}{S_1(t)}dS_1(t) + \frac{(1-u_1(t))X(t)}{S_2(t)}dS_2(t) - c(t)dt$$

Subistituindo as equações (3.2) e (3.3) na dinâmica do portfólio temos:

$$\begin{aligned}
dX(t) =& \frac{u_1(t)X(t)}{S_1(t)}[\alpha S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW_t] + \frac{(1-u_1(t))X(t)}{S_2(t)}[r(t)S_2(t)dt] - c(t)dt \\
&= u_1(t)X(t)[\alpha dt + \sigma dW_t] + [1-u_1(t)]X(t)[r(t)dt] - c(t)dt \\
&= u_1(t)X(t)\alpha dt + u_1(t)X(t)\sigma dW_t + X(t)r(t)dt - u_1(t)X(t)r(t)dt - c(t)dt \\
&= u_1(t)X(t)\alpha dt + X(t)r(t)dt - u_1(t)X(t)r(t)dt + u_1(t)X(t)\sigma dW_t - c(t)dt \\
&= X(t)[u_1(t)\alpha + r(t)u_2(t)]dt + u_1(t)X(t)\sigma dW_t - c(t)dt
\end{aligned}$$

Sendo assim o portfólio terá a seguinte dinâmica

$$dX(t) = X(t)[u_2(t)r(t) + u_1(t)\alpha]dt + u_1(t)\sigma X(t)dW_t - c(t)dt, \tag{3.5}$$

Cuja solução da equação diferencial estocástica não linear acima pode ser encontrada em [10].

Capítulo 4

Colocação do Problema e Resolução

Como o foco deste trabalho está amplamente concentrado no método dos martingales, este capítulo consiste em uma introdução à metodologia que a rodeia assim como na resolução do problema proposto. Segungo Emil Karlsson (2016) [7], o método dos Martingales, foca em como o valor do portfólio evolui ao longo do tempo e é tratado como uma variável e não como uma consequência da alocação, como acontece na abordagem HJB. Se o mercado está completo, o que significa que existe uma medida única neutra ao risco que transforma todos os ativos descontados em martingales, a replicação do portfólio tem que ser único para evitar arbitragem e isso garante que uma representação única da alocação. As noções e estrutura deste capítulo foram consultadas de [4] e [3]. Neste capítulo usamos o método dos Martingales para maximizar a função utilidade. Em particular, estamos interessados em estudar a optimização de problema de portfólio.

Um Investidor tem consigo uma riqueza inicial $a > 0$ e seu grande problema é como alocar investimentos e consumos ao longo de um determinado horizonte de tempo. Seu processo de riqueza é uma carteira que consiste em $B(t)$ e $S(t)$ que ele pode negociar continuamente.

- O agente pode investir dinheiro no banco à taxa curta determinística de juros r, ou seja, ele tem acesso ao activo livre de risco B com a dinamica:

$$dB = rBdt$$

- O agente pode investir em um ativo de risco com processo de preço $S(t)$, onde a dinâmica do preço $S(t)$, é dada por um modelo Black-Scholes padrão

$$dS_1(t) = \alpha S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW_t$$

Denotamos os pesos relativos do portfólio do agente no tempo t por u_t (para o activo sem risco ativo) e u_t^1 (para o ativo com risco). Sua taxa de consumo em tempo t é denotado por c(t). É importante realçar que $u_1 + u_2 = 1$, $t > 0$ assim como $c(t) > 0$

Restringimos as estratégias de investimento-consumo do consumidor ao autofinanciamento e, como sempre, assumimos que vivemos em um mundo onde a contínua negociação e venda a descoberto ilimitada é possível. Se denotamos a riqueza do consumidor no tempo t por $X(t)$, pela equação (3.5), segue a dinâmica $X(t)$ é dada por

$$dX(t) = X(t)[u_2(t)r(t) + u_1(t)\alpha]dt - c(t)dt + u_1(t)\sigma X(t)dW_t.$$

O objetivo do agente é escolher uma estratégia de consumo de carteira de modo a maximizar sua utilidade total $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(X_t)]$ sobre a classe de carteiras adaptadas de autofinanciamento com a condição inicial $X_0 = a$

Visto que vamos assumir um investidor avesso a risco/Conservador é imperiosa a introdução de uma ferramenta que será responsável na mudança de probabilidade, o **Teorema de Girsanov**.

Teorema 4.0.1. (Teorema de Girsanov)
Seja $W^{\mathbb{P}}$ um processo de $\mathbb{P} - Wiener$ padrão d-dimensional em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e seja φ qualquer d-dimensional do processo de vector de coluna adaptado. Escolhemos um T fixo e definimos o processo L em $[0, T]$ por

$$dL_t = \varphi(t)L_t dW_t^{\mathbb{P}},\ L_0 = 1,$$

onde L_t é processo de verossimilhança (representa a derivada Radon-Nikodym)

Seja $Y_s = f(L_s) = \ln(L_s)$. Pela fórmula geral de Itô,

$$dY_s = f_s' ds + f_{L_s}' dLs + \tfrac{1}{2}(dL_s)^2. \text{ Uma vez que}$$

$$f_s' = 0,\ f_{Ls}' = \tfrac{(L_s)'}{L_s} = \tfrac{1}{L_s},\ f_{LsLs}'' = -\tfrac{1}{(L_s)^2}, \text{ temos:}$$

$$dY_s = 0ds + \frac{1}{L_s}(\varphi_s L_s dW_s^{\mathbb{P}}) + \frac{1}{2}(-\frac{(1}{(L_s)^2})(\varphi_s L_s dW_s^P)^2$$

$$\ln(L_T) = \int_0^t \varphi_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds$$

$$L_t = e^{\int_0^t \varphi_s dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 \cdot ds}$$

A **Condição de Novikov**: Assumimos que o núcleo de Girsanov φ_t é tal que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \varphi_t^2 dt}] < \infty, \text{ então}$$

O processo φ_t é tal que $\varphi_t = -\frac{(\mu - r)}{\sigma}$, sendo assim temos:

Verificação:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \varphi_t^2 dt}]$$

$$\text{Seja: } \varphi_t = -\frac{(\mu - r)}{\sigma}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{\frac{1}{2}\int_0^T (-\frac{(\mu - r)}{\sigma})^2 dt}]$$

$$e^{\frac{1}{2}(\frac{(\mu - r)}{\sigma})^2 T} < \infty$$

$$L_t = e^{-\frac{(\mu - r)}{\sigma} W_t^P - \frac{1}{2}(-\frac{\mu - r}{\sigma})^2 \cdot t} = e^{-\frac{(\mu - r)}{\sigma} W_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2 \cdot t}$$

Asumimos também que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T] = 1$$

e definamos a nova medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ em $\mathcal{F}_t$ por

$$L_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \text{ sobre } \mathcal{F}_t$$

Então

$$dW_t^{\mathbb{P}} = \varphi_t dt + dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$W_t^{\mathbb{P}} = \varphi_t t + W_t^{\mathbb{Q}}$$

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} - \varphi_t t,$$

Onde $W_t^{\mathbb{Q}}$ é um processo $\mathbb{Q} - Wiener$

Demonstração. O processo $W_t^{\mathbb{Q}}$ inicia com o valor zero $t = 0$ e é contínuo. Além disso

$$dW_t^{\mathbb{Q}} dW_t^{\mathbb{Q}} = (dW_t^{\mathbb{P}} - \varphi_t dt)^2 = dt$$
$$dW_t^{\mathbb{P}} dW_t^{\mathbb{P}} = (\varphi_t dt + dW_t^{\mathbb{Q}})^2 = dt$$
$$dW_t^{\mathbb{Q}} dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t^{\mathbb{P}} dW_t^{\mathbb{P}}$$

Desta forma, $W_t^{\mathbb{Q}}$ é um martingale na medida $\mathbb{Q}$. Observamos que L_t é martingale na medida $\mathbb{P}$. onde

$$X(t) = -\int_0^t \varphi_s dW_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds$$

Consideremos a função $f_{(x)} = e^x$

$$f'_{(x)} = f''_{(x)} = e^x. \text{ Temos:}$$

$$\begin{aligned}
dL_t &= df(X_t) \\
&= f'((X_t))dX_t + \frac{1}{2}f''((X_t))dX_t dX_t \\
&= e^{X_t}(-\varphi_t dW_t - \frac{1}{2}\varphi_t^2 dt) + \frac{1}{2}e^{X_t}\varphi_t^2 dt \\
&= e^{X_t}(-\varphi_t dW_t - \frac{1}{2}\varphi_t^2 dt) + \frac{1}{2}e^{X_t}\varphi_t^2 dt \\
&= e^{X_t}(-\varphi_t dW_t - \frac{1}{2}\varphi_t^2 dt) + \frac{1}{2}e^{X_t}\varphi_t^2 dt,
\end{aligned}$$

logo

$$dL_t = -\varphi_t L_t dW_t.$$

Integrando ambos os lados temos

$$L_t = L_0 - \int_0^t \varphi_s L_t dW_s.$$

Como a integral de Itô é um martingale, L_t é um martingale. Em particular: $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T] = L_0 = 1$. Como L_t é martingale, vale o seguinte

$$\mathbb{E}[L_T|\mathcal{F}_t] = L_t.$$

Resta mostrar que $L_t W_t^{\mathbb{P}}$ é martingale na medida $\mathbb{P}$. Para tal, vamos aplicar a regra do produto de Itô e observar seu valor descontado:

$$
\begin{aligned}
d((W_t^{\mathbb{Q}}L_t)) &= W_t^{\mathbb{Q}}dL_t + dW_t^{\mathbb{Q}}L_t + dW_t^{\mathbb{Q}}dL_t \\
&= -W_t^{\mathbb{Q}}\varphi_t L_t dW_t^{\mathbb{P}} + L_t dW_t^{\mathbb{P}} + L_t\varphi_t dt + (dW_t^{\mathbb{P}} + \varphi_t dt)(-\varphi_t L_t dW_t^{\mathbb{P}}) \\
&= (-W_t^{\mathbb{Q}}\varphi_t + 1)L_t dW_t^{\mathbb{P}}
\end{aligned}
$$

Como esta equação não apresenta o termo dt, o processo $L_t W_t^{\mathbb{P}}$ é um martingale na medida $\mathbb{P}$. Desta forma temos

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t^{\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s] = \tfrac{1}{L_s}\mathbb{E}^{Q}[W_t^{\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s] = \tfrac{1}{L_s}W_s^{\mathbb{P}}L_s = W_s^{\mathbb{P}},$$

O que mostra que $W_s^{\mathbb{Q}}$ é martingale na medida $\mathbb{Q}$. □

Resolução do Problema

A nossa tarefa consiste em resolver o estático problema máximo

$$\max \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(X_t)],$$

sujeito à restrição orçamentária

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T] = a$$

onde a é a riqueza inicial e $\mathbb{Q}$ é a medida martingale única.

A Riqueza Terminal Óptima

Vamos resolver o problema usando **Relaxamento de Lagrange**. Começamos reescrevendo a restrição orçamentária como

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T X_T] = a$$

onde L é o processo de verossimilhança entre $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$

Recordemos que

$$\ell_{(x,y,\lambda)} = R_{(x,y,)} - \lambda \left[O_{(x,y,)} - a\right]$$

Onde $R_{(x,y,)}$ representa a função receita, a função que queremos maximizar e $O_{(x,y,)}$ representa a restrição orçamental e a uma constante

Fazendo a devida subistituição e levando em consideração que a função receita depende de X_T temos:

$$\ell_{(X_T,\lambda)} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(X_T)] - \lambda(e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T X_T] - a)$$

Então

$$\ell_{(X_T,\lambda)}{=}\int_\Omega\{\mathbb{E}^P[U(X(\omega)]\text{-}\lambda(e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T(\omega)X_T(\omega)] - a)\}d\mathbb{P}(\omega).$$

Achemos o Gradiente de lagragiano igaualado ao vector nulo

$$U'(X_T) - \lambda e^{-rT}L_T = 0$$

$$U'(X_T) = \lambda e^{-rT}L_T$$

Então o perfil de riqueza optimo é dado por:

$$X_T^* = F(\lambda e^{-rT}L_T)$$

Onde A função F é a inversa da função de utilidade marginal U.

Vamos assunmir que o nosso investido é **avesso a risco/Conservador**. Sendo assim a função utilidade assumida é a Exponencial.

$$U(x) = -\tfrac{1}{\theta}e^{-\theta x}.$$

Verificação das condições:

$$U'(x) = e^{-\theta x}$$

$$U''(x) = -\theta e^{-\theta x}$$

Investidor Avesso a risco/Conservador: se $-\frac{U''(x)}{U'(x)} > 0$

$$-\tfrac{(-\theta e^{-\theta x})}{e^{-\theta x}} = \theta > 0$$

Neste caso $F(y) = -\frac{1}{\theta}\ln y$

Lembremos que $X_T^* = F(\lambda e^{-rT} L_T)$,

sendo assim

$$F(\lambda e^{-rT} L_T) = -\tfrac{1}{\theta}\ln(\lambda e^{-rT} L_T)$$

e passamos a ter:

$$\begin{aligned} X_T^* &= -\frac{1}{\theta}\ln(\lambda e^{-rT} L_T) \\ &= -\frac{1}{\theta}[\ln(\lambda) - rT + \ln(L_T)] \end{aligned}$$

O perfil de riqueza terminal óptima é dado por

$$X_T^* = -\frac{1}{\theta}\ln(\lambda) + \frac{1}{\theta}rT - \frac{1}{\theta}\ln(L_T). \tag{4.1}$$

Agora achemos o multiplicador de Lagrange a partir da restrição orçamentária

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-\tfrac{1}{\theta}\ln(\lambda) + \tfrac{1}{\theta}rT - \tfrac{1}{\theta}\ln(L_T)] = a$$

$$e^{-rT}(-\tfrac{1}{\theta}\ln(\lambda) + \tfrac{1}{\theta}rT - \tfrac{1}{\theta}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\ln[(L_T)] = a.$$

Seja $H_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\ln[(L_T)]$, sendo assim temos:

$$e^{-rT}[-\tfrac{1}{\theta}\ln(\lambda) + \tfrac{1}{\theta}rT - \tfrac{1}{\theta}H_0] = a$$

$$\ln(\lambda) = -\tfrac{\theta a}{e^{-rT}} + rT - H_0.$$

subistituindo na equção (4.1) temos:

$$
\begin{aligned}
X_T^* &= -\frac{1}{\theta}[-\frac{\theta a}{e^{-rT}} + rT - H_0] + \frac{1}{\theta} rT - \frac{1}{\theta}\ln(L_T) \\
&= ae^{rT} + \frac{H_0}{\theta} - \frac{1}{\theta}\ln(L_T)
\end{aligned}
$$

O processo de riqueza ideal

O processo de riqueza óptima X_T^* é sempre determinado pela relação

$$
\begin{aligned}
e^{-rt} X_T^* &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} X_T^* | F_t] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(ae^{rT} + \frac{H_0}{\theta} - \frac{1}{\theta}\ln(L_T))|F_t] \\
&= a + e^{-rT}\frac{H_0}{\theta} - e^{-rT}\frac{1}{\theta}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)|F_t] \\
&= a + e^{-rT}\frac{H_0}{\theta} - e^{-rT}\frac{1}{\theta}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)|F_t]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_T^* &= ae^{rt} + \frac{1}{\theta} e^{-rT} e^{rt} (H_0 - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)|F_t]) \\
&= ae^{rt} + \frac{1}{\theta} e^{-r(T-t)} (H_0 - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)|F_t])
\end{aligned}
$$

Pela suposição $H_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)]$, temos:

$$
X_T^* = ae^{rt} + \frac{1}{\theta} e^{-r(T-t)} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)|F_t]) \tag{4.2}
$$

Segundo o teorema de Girsanov temos:

$$
\ln(L_T) = \int_0^t \varphi_s dW_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds
$$

onde:

$$
\varphi_t = -\tfrac{(\mu - r)}{\sigma},
$$

com:

$$
dW_t^{\mathbb{P}} = \varphi_t dt + dW_t^{\mathbb{Q}}
$$

$$
dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t^{\mathbb{P}} - \varphi_t dt
$$

onde $W_t^{\mathbb{Q}}$ é $\mathbb{Q}-Wiener$.

Sendo assim

$$\ln(L_T) = \int_0^t \varphi_s dW_s^{\mathbb{Q}} + \tfrac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_0^t \varphi_s dW_t^Q + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_0^t \varphi_s^2 ds]
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_0^t \varphi_s^2 d_s] = H_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)|F_t] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\ln(L_t) + \int_0^t \varphi_s dW_s^{\mathbb{Q}} + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds)|F_t] \\
&= \ln(L_t) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\int_0^t \varphi_s dW_s^{\mathbb{Q}} + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds)|F_t] \\
&= \ln(L_t) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds)|F_t]
\end{aligned}$$

Seja $H_T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds)|F_t]$, então

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\ln(L_T)|F_t] = \ln(L_t) + H_T \tag{4.3}$$

Sendo assim, subistituindo a equação (4.2) e (4.3) na equação (4.1), o processo óptimo de riqueza é dado por

$$X_T^* = ae^{rt} + \frac{1}{\theta}e^{-r(T-t)}(H_0 - \ln(L_t) - H_T) \tag{4.4}$$

4.1 O Portfólio ideal

Desta vez o objectivo é determinar a estratégia de portfólio ideal para tal chamemos primeiramente agora a equação (3.5).

$$dX(t) = X(t)[u_2(t)r(t) + u_1(t)\alpha]dt - c(t)dt + u_1(t)\sigma_t X(t)dW_t$$

Seja Z_t o processo de riqueza descontada, onde:

$$Z_t = \tfrac{X_t}{B_t}$$

Onde X_t representa o activo com risco e B_t representa o activo sem risco. Já sabemos de antemão que a dinamica do activo sem risco e representado da seguinte maneira $dB_t = rB_tdt$, sendo assim $B_t = e^{rt}$ onde assumimos que $B_0 = 1$.

$$Z_t = \frac{X_t}{B_t} = \frac{X_t}{e^{rt}} = e^{-rt}X_t \tag{4.5}$$

Vamos mostrar que $Z_t = e^{-rt}X_t$ é um $\mathbb{Q} - martingale$.

pela fórmula de Itó temos

$$\begin{aligned}
dZ_t &= (e^{-rt})' X_tdt + e^{-rt}dX_t \\
&= -re^{-rt}X_tdt + e^{-rt}dX_t \\
&= -re^{-rt}X_tdt + e^{-rt}[X(t)[u_2(t)r(t) + u_1(t)\alpha]dt - c(t)dt + u_1(t)\sigma_tX(t)dW_t] \\
&= -rZ_tdt + e^{-rt}X(t)[u_2(t)r(t) + u_1(t)\alpha]dt + e^{-rt}X(t)u_1(t)\sigma_tdW_t \\
&= -rZ_tdt + Z_t[u_2(t)r(t) + u_1(t)\alpha]dt + Z_tu_1(t)\sigma_tdW_t \\
&= Z_t[u_2(t)r(t) - r(t) + u_1(t)\alpha]dt + Z_tu_1(t)\sigma_tdW_t \\
&= dZ_t = Z_t[u_2(t)r(t) - r(t) + u_1(t)\alpha]t + Z_tu_1(t)\sigma_tdW_t
\end{aligned}$$

como sabemos que a parte da difusão permanece inalterada sob uma transformação de Girsanov, a dinâmica $\mathbb{Q}$ de Z é

$$dZ_t = Z_tu_1(t)\sigma_tdW_t^{\mathbb{Q}}, \tag{4.6}$$

Com base na equação (4.4) temos

$$e^{-rt}X_T^* = a + \tfrac{1}{\theta}e^{-rT}(H_0 - \ln(L_t) - H_T)$$

Da equação (4.5) temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
Z_t &= a + \frac{1}{\theta}e^{-rT}(H_0 - \ln(L_t) - H_T) \\
&= a + \frac{1}{\theta}e^{-rT}H_0 - e^{-rT}\frac{1}{\theta}[\ln(L_t) + H_T]
\end{aligned}$$

Seja $D = a + \frac{1}{\theta}e^{-rT}H_0$ e $N = -e^{-rT}\frac{1}{\theta}$, então

$$Z_t = D + N[\ln(L_t) + H_T]$$

$$dZ_t = N[d\ln(L_t) + dH_T]$$

$$H_T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tfrac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds)|F_t],$$

é possivel constatar que H_T trata-se de um processo Ito com dinâmica da forma

$$dH_T = \mu_H(t)dt + \sigma_H(t)dW_t$$

$$\ln(L_T) = \int_0^t \varphi_s dW_s^Q + \tfrac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds$$

$$d\ln(L_T) = \varphi_t W_t^Q + \tfrac{1}{2}\varphi_t^2,$$

$$\begin{aligned}
dZ_t &= N[\varphi_t dW_t + \frac{1}{2}\varphi_d^2 t + \mu_H(t)dt + \sigma_H(t)dW_t] \\
&= N[\varphi_t dW_t + \frac{1}{2}\varphi_d^2 t + \mu_H(t)dt + \sigma_H(t)dW_t] \\
&= N[\frac{1}{2}\varphi_d^2 t + \mu_H(t)dt + \varphi_t dW_t + \sigma_H(t)dW_t]
\end{aligned}$$

Sendo assim temos

$$dZ_t = N(\frac{1}{2}\varphi^2 + \mu_H(t))dt + N(\varphi_t + \sigma_H(t))dW_t. \tag{4.7}$$

a parte da difusão permanece inalterada sob uma transformação de Girsanov, a dinâmica $\mathbb{Q}$ de Z é

$$dZ_t = N(\varphi_t + \sigma_H(t))dW_t \tag{4.8}$$

Pela equação (4.7) e (4.8) temos a seguinte igualdade:

$$N[\varphi_t + \sigma_H(t)] = Z_t u_1(t)\sigma_t$$

$$u_1(t) = \tfrac{N(\varphi_t + \sigma_H(t))}{Z_t u_1(t)\sigma_t}.$$

O **portfólio óptimo**, em termos dos pesos óptimos sobre o activo com risco, é dado por:

$$u_1(t) = \frac{-e^{-r(T-t)}\frac{1}{\theta}[-\frac{(\mu-r)}{\sigma} + \sigma_H(t)]}{X_t\sigma_t}.$$

4.2 Simulação de um investimento

Um importante recurso no estudo de sistemas de controle é a simulação, para ilustrar de forma gráfica os resultados. Assim sendo, um sistema real é inicialmente modelado e o seu comportamento é estudado e analisado com recursos computacionais, analógicos ou digitais, sendo possível, muitas vezes, prever este comportamento diante de variações em parâmetros do modelo ou de distúrbios nos sinais de controle. A simulação, portanto, é uma importante ferramenta para atingir o aprimoramento dos sistemas, garantindo maior eficiência no controle.

Simulação 1

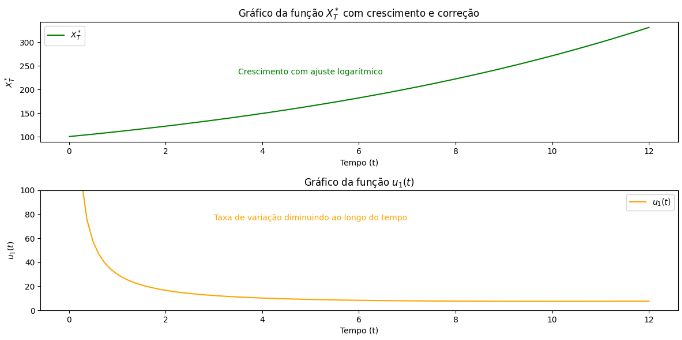

Figura 4.1: Simulação de um investimento usando Método dos Martingales

Simulação de um investimento, com um valor inicial igual a 100.000 MZN, num período de 1 ano, tendo em conta que a taxa de juros no activo sem risco é $r = 0,055$ e a taxa de juros no activo de risco é de $\mu = 0,2$, com volatilidade $\sigma = 0,25$ e tendo $\theta = 1$. O grafico da função $u_1(t)$ nos sugere a percentagem do valor que o investidor deverá propor no activo com risco e o grafico da função X_T^* representa a riqueza optima terminal onde t representa o tempo em meses.

Interpretação: No quarto mês o investidor deverá investir 10% do valor no activo com risco e 90% do valor no activo sem risco com vista a alançar um valor optimo terminal de 150 000,00MZN. Com base na função $u_1(t)$ é possível constatar que quanto mais o tempo passa, menor deverá ser a percentagem do valor a ser injectada no activo com risco expressando assim o tipo de investidor assumido

Simulação 2

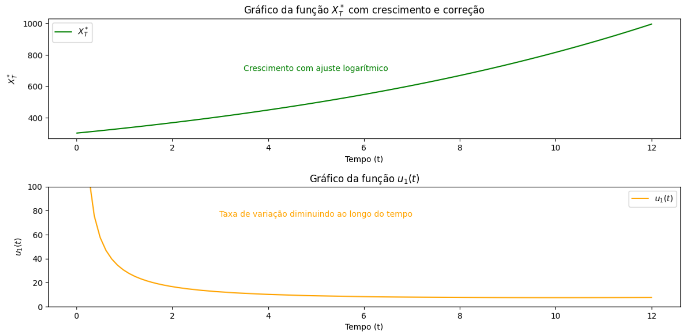

Figura 4.2: Simulação de um investimento usando Método dos Martingales

Simulação de um investimento, com um valor inicial igual a 300.000 MZN, num período de 1 ano, tendo em conta que a taxa de juros no activo sem risco é $r = 0,055$ e a taxa de juros no activo de risco é de $\mu = 0,2$, com volatilidade $\sigma = 0,25$ e tendo $\theta = 1$. O grafico da função $u_1(t)$ nos sugere a percentagem do valor que o investidor deverá propor no activo com risco e o grafico da função X_T^* representa a riqueza optima terminal onde t representa o tempo em meses.

Interpretação: No segundo mes o investidor deverá investir 20% do valor no activo com risco e 80% do valor no activo sem risco com vista a alançar um valor optimo terminal de 400 000,00MZN.Com base na função $u_1(t)$ é possivel constatar que quanto mais o tempo passa, menor deverá ser a percentagem do valor a ser injectada no activo com risco expressando assim o tipo de investidor assumido.

Capítulo 5

Conclusão e Recomendações

Este trabalho teve como objectivo resolver um problema de investimento de um investidor que dispõoe de uma riqueza inicial a. Onde deseja investir em dois tipos de activos, um com risco e um sem risco usando o método dos Martingales. Visto que a maior parte de investimento envolvem tomadas de decisões propensas ao risco, o método proposto neste trabalho vem atenuar a dúvida na tomada de decisão correcta num determinado intervalo de tempo.

Com base no grafico de X_T^* é possivel constatar que inicialmente, o valor óptimo é pequeno, mas cresce com ajuste logarítimico à medida que o tempo avança, o crescimento é evidenciado pela incluinação do gráfico ascendente à medida que o tempo aumenta. $u_1(t)$ modela uma taxa de variação em relação ao tempo, expressa como uma porcentagem correspondente ao activo com risco, a taxa de variação é alta e diminui à medida que o tempo avança, aproximando-se de zero para valores maiores de tempo.

Para trabalhos futuros propoe-se o estudo de optimização de investimento com o método martingale, assumindo um mercado incompleto e um investidor neuto ao risco que gostava de investir em n activos livres de risco e m activos com risco, onde por sua vez o investidor devera pagar devidendos aos acionistas.

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Codigo Python para "Simulação 1 e 2"

Abaixo está o código Python (Simulação 1) formatado usando o pacote `listings` no Overleaf:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Fun   o modificada X^*T baseada na f rmula completa da imagem
def X_star_T_full(t, a, r, theta, H_0, H_T, L_t):
    # Para garantir que n   o haja problemas com log de 0
    L_t = np.maximum(L_t, 1e-5)
    term1 = a * np.exp(r * t)
    term2 = (1 / theta) * np.exp(-r * (T - t)) * (H_0 - np.log(L_t) - H_T)
    return term1 + term2

# Fun   o u1(t)
def u1(t, r, T, u, sigma, X):
    return (np.exp(-r * (T - t)) * ((u - r) / sigma - sigma) / (X * sigma * t)) * 100

# Par metros
a = 100.0
r = 0.1
T = 12.0
theta = 0.5
```

```
H_0 = 2.0
H_T = 1.0
u = 2.0
sigma = 1.0
X = 1.0

# Intervalo de tempo
t_values = np.linspace(0.01, T, 100)

# Simulando L_t como uma fun  o suavemente crescente no tempo (por exemplo, linear +1)
L_t_values = 1 + 0.2 * t_values

# Calcula os valores para X^*T e u1(t)
X_star_T_values = X_star_T_full(t_values, a, r, theta, H_0, H_T, L_t_values)
u1_values = [u1(t, r, T, u, sigma, X) for t in t_values]

# Plota os gr ficos
plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_values, X_star_T_values, label=r'$X^*_T$', color='green')
plt.xlabel('Tempo (t)')
plt.ylabel(r'$X^*_T$')
plt.title('Gr fico da fun  o $X^*_T$ com crescimento e corre  o')
plt.legend()
plt.text(5, np.max(X_star_T_values)*0.7, 'Crescimento com ajuste logar tmico', fontsize=10, color='green', horizontalalignment='center')

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_values, u1_values, label=r'$u_1(t)$', color='orange')
plt.xlabel('Tempo (t)')
plt.ylabel(r'$u_1(t)$')
plt.title('Gr fico da fun  o $u_1(t)$')
plt.ylim(0, 100)  # Limite y para visualiza  o clara
plt.legend()
plt.text(5, 75, 'Taxa de varia  o diminuindo ao longo do tempo',
```

```
    fontsize=10, color='orange', horizontalalignment='center')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

A seguir, o código Python (Simulação 2) com o parâmetro `a = 300.0`:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Fun  o modificada X^*T baseada na f rmula completa da imagem
def X_star_T_full(t, a, r, theta, H_0, H_T, L_t):
    # Para garantir que n o haja problemas com log de 0
    L_t = np.maximum(L_t, 1e-5)
    term1 = a * np.exp(r * t)
    term2 = (1 / theta) * np.exp(-r * (T - t)) * (H_0 - np.log(L_t) - H_T)
    return term1 + term2

# Fun  o u1(t)
def u1(t, r, T, u, sigma, X):
    return (np.exp(-r * (T - t)) * ((u - r) / sigma - sigma) / (X * sigma * t)) * 100

# Par metros
a = 300.0
r = 0.1
T = 12.0
theta = 0.5
H_0 = 2.0
H_T = 1.0
u = 2.0
sigma = 1.0
X = 1.0

# Intervalo de tempo
t_values = np.linspace(0.01, T, 100)

# Simulando L_t como uma fun  o suavemente crescente no tempo (por exemplo, linear +1)
```

```
L_t_values = 1 + 0.2 * t_values

# Calcula os valores para X^*T e u1(t)
X_star_T_values = X_star_T_full(t_values, a, r, theta, H_0, H_T, L_t_values)
u1_values = [u1(t, r, T, u, sigma, X) for t in t_values]

# Plota os gr ficos
plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_values, X_star_T_values, label=r'$X^*_T$', color='green')
plt.xlabel('Tempo (t)')
plt.ylabel(r'$X^*_T$')
plt.title('Gr fico da fun  o $X^*_T$ com crescimento e corre  o')
plt.legend()
plt.text(5, np.max(X_star_T_values)*0.7, 'Crescimento com ajuste logar tmico', fontsize=10, color='green', horizontalalignment='center')

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_values, u1_values, label=r'$u_1(t)$', color='orange')
plt.xlabel('Tempo (t)')
plt.ylabel(r'$u_1(t)$')
plt.title('Gr fico da fun  o $u_1(t)$')
plt.ylim(0, 100)  # Limite y para visualiza  o clara
plt.legend()
plt.text(5, 75, 'Taxa de varia  o diminuindo ao longo do tempo', fontsize=10, color='orange', horizontalalignment='center')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Bibliografia

[1] ALBUQUERQUEA, Guilherme Vieira (2009). *Um estudo de problema de portfolio otimo*. USP. Brazil: São Carlos.

[2] ATUNCAR, Gregorio. (2011). *Conceitos Basicos de Processos Estocasticos*. Dep. Estatistica/UFMG. Brazil: Belo Horizonte.

[3] BAXTER, Martin. (1996). *Financial Calculus, an introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press. England: Cambridge.

[4] BJORK, Tomas. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Third edition. Oxford University Press. USA: New York.

[5] CARREIRA, Adelaide; Pinto, Gonçalo e outros. (2002). *Calculo de Probabilidades*. Instituto Peaget. Portugal: Lisboa.

[6] GERMANO, Bruno. (2020). *Processos Estocásticos*. Universidade Federal de Alfenas. Brazil: Cidade de Alfenas.

[7] KARLSSON, Emil. (2016) *Optimal portfolio allocation by the martingale method in an incomplete and partially observable market*. CSI. USA: Sweden.

[8] MINISTURINI, Ricardo. (2010). *Movimento Browniano, Integral de Ito e Introdução as Equações Diferenciais Estocasticas* . UFRGS. Brazil: Rio Grande do Sul.

[9] ØKSENDAL, Bernt. (2004) *Stochastic to Financial Valuation: Mathematics, Stochastic and Computation*. University Press. England: Cambridge.

[10] SITOE, Geraldo. (2020). *Optimização de Investimentos e Consumo Aplicando O cálculo de Malliavin*.Trabalho de Licenciatura. Universidade Eduardo Mondlane. Moçambique: Maputo