

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em
Ciências de Informação Geográfica

**Calibração Geométrica de Câmaras Fotogramétricas pelo
Método dos Mínimos Quadrados**

Autor: Enoque Zacarias Machava Júnior

Maputo, Julho de 2025



UNIVERSIDADE
EDUARDO
MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em
Ciências de Informação Geográfica

**Calibração Geométrica de Câmaras Fotogramétricas pelo
Método dos Mínimos Quadrados**

Autor: Enoque Zacarias Machava Júnior

Supervisor: Lic. Francesse Mauro Bacião, UEM

Maputo, Julho de 2025

Dedicatória

Dedico este trabalho, primeiramente à minha Mãe Maura Macuácuá pelos sacrifícios que tem feito para me ver bem em todos os estágios da minha vida. Aos meus amigos, minha família e meus colegas, pelo apoio incondicional, pelas palavras de incentivo e pela paciência nos momentos difíceis.

Declaração de Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Ciências de Informação Geográfica, na faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, Julho de 25

(Enoque Zacarias Machava Júnior)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Deus, pela vida, saúde e força que me sustentaram ao longo de toda esta jornada.

À Universidade Eduardo Mondlane, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática e Informática, pela oportunidade de frequentar o curso de Ciências de Informação Geográfica e pelos recursos disponibilizados ao longo do curso.

Ao meu Supervisor Lic.Francesse Mauro Bacião pela orientação paciente, pelas contribuições valiosas e pelo comprometimento durante todas as fases deste trabalho.

Aos docentes do curso, pela partilha do conhecimento e pelas experiências que enriqueceram minha formação.

À minha família, em especial meus irmãos Kelvin e Júlio Machava que sempre me motivaram especialmente nos momentos em que pensei em desistir, aos meus tios Elvira e José Orlando Cossa por me acolherem e me darem conforto, aos meus Pais Maura Macuácuá e Inoque Matangalane por todo o amor, compreensão e incentivo constante.

Aos meus colegas de curso, em especial ao Fernando Gomes, Pedro Cune, Valter Macucule, Pedro Mbata e Lino Duarte e amigos em especial ao Dercílio Mazivila, Melvis Ussene, Gil Cumaio e Maibel Uamusse que, com palavras de apoio, trocas de ideias e momentos de descontração, tornaram este percurso mais leve e significativo.

Aos meus irmãos da Igreja Envagéllica Assembleia de Deus pelas orações e pelo suporte espiritual.

E a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

A Fotogrametria aérea exige elevada precisão para garantir a qualidade dos produtos derivados, como ortomosaicos e modelos digitais. Neste contexto, este trabalho teve como objectivo aplicar o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) na calibração geométrica de câmaras fotogramétricas, avaliando a consistência dos parâmetros envolvidos no processo. O estudo baseou-se em dados fornecidos pelo CENACARTA, correspondentes a pontos de controlo e parâmetros intrínsecos da câmara. Os resultados evidenciam que a aplicação do MMQ contribui para a melhoria da precisão e da confiabilidade das análises, reforçando sua relevância como ferramenta de calibração geométrica.

Palavras-chave: Câmaras fotogramétricas, Calibração geométrica, Método dos Mínimos Quadrados.

Abreviaturas

MMQ	Método dos mínimos Quadrados
ASP	Nasa Ames Stereo Pipeline
MDT	Modelo Digital do Terreno
DEM	Modelo Digital de elevação
3D	Tridimensional
2D	Bidimensional
PK	Pontos de controle
R	Matriz de Rotação
TR	Matriz de Translação
IK*	Coordenadas homogêneas antes da conversão para o plano Imagem
IK	Coordenadas normalizadas no plano da imagem
CENACARTA	Centro Nacional de Cartografia e Teledetecção
TIFF	Formato de Arquivo de Imagem Marcado
CSV	Valores Separados por Vírgula
TXT	Texto Simples

Índice

Dedicatória	i
Declaração de Honra	ii
Agradecimentos	iii
Abreviaturas	v
Lista de Tabelas	ix
Lista de Figuras	x
Lista de Gráficos.....	xi
Introdução.....	1
1.1. Contextualização	1
1.2. Definição do problema	2
1.3. Justificativa.....	3
1.4. Relevância	4
1.5. Objectivos	4
1.5.1. Objectivo Geral	4
1.5.2. Objectivos Específicos	4
1.6. Área de Estudo.....	5
Revisão de Literatura	6
2.1. Fotogrametria	6
2.1.1. Classificação da Fotogrametria.....	6
2.2. Restituição Aerofotogramétrica.....	8
2.3. Captação da Imagem	8
2.4. Pontos de apoio aerofotogramétricos.....	9
2.5. Orientação Fotogramétrica	10
2.6. Ângulos de Euler	14
2.7. Estereoscopia	15
2.8. Escala Vertical de uma Fotografia.....	15

2.9.	Plano de Voo.....	17
2.11.	Ajustamento de observações aplicado na Fotogrametria	19
2.12.	Método paramétrico para funções não lineares.....	19
2.13.	Calibração geométrica de Câmaras, aplicando o MMQ.....	20
2.13.2.	Sistemas de coordenadas com deslocamento rígido	24
2.13.3.	Cálculo da matriz de transformação perspectiva.....	25
2.14.	A aplicação do método dos mínimos quadrados.....	27
	Material e Métodos	28
3.1.	Material.....	28
3.1.1.	Dados	28
3.2.	Determinação os parâmetros extrínsecos da câmara.....	29
3.3.	Determinação a Matriz de transformação perspectiva.....	30
3.4.	Calibração geométrica de Câmaras.....	31
3.5.	Teste de Qualidade	32
3.6.	Aplicação do MMQ.....	33
3.7.	Equipamentos	33
3.8.	Método	34
	Resultados e Discussão	35
6.1.	Parâmetros Extrínsecos da Câmara	35
6.1.1.	Matriz de Rotação.....	35
6.1.2.	Matriz de Translação	36
6.2.	Matriz de transformação perspectiva.....	37
6.3.	Calibração geométrica de câmaras.....	39
	Conclusões e Recomendações	51
5.1.	Conclusões	51
5.2.	Limitações	51
5.3.	Recomendações.....	51
	Anexos.....	54

Anexo 1: Autorização para Colecta e Validação de Dados no CENACARTA	54
Anexo 2: Certificado de calibração	55
Anexo 3: Aplicação do MMQ	55

Lista de Tabelas

Tabela 1. Parâmetros intrínsecos da câmara	28
Tabela 2. Pontos de controle.....	29
Tabela 3. Equipamentos	34
Tabela 4. Matriz de Translação	36
Tabela 5. Projecção do ponto 3D.....	37
Tabela 6. Coordenadas discretas do plano 2D	38
Tabela 7. Matriz de transformação de Perspectiva	38
Tabela 8. Coordenadas do plano da Imagem.....	39
Tabela 9. Coordenadas homogêneas antes da conversão para o plano Imagem.....	43
Tabela 10. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK1	45
Tabela 11. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK2	45
Tabela 12. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK3.....	45
Tabela 13. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK4.....	46
Tabela 14. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK5.....	46
Tabela 15. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK6.....	46
Tabela 16. Dados e resultados produzidos no experimento	48
Tabela 17. Cálculo de desvio relativo.....	49
Tabela 18. Teste do qui-quadrado aplicado aos resíduos da calibração.....	49

Lista de Figuras

Figura 2. Ponto Natural	9
Figura 3. Pontos Artificiais	10
Figura 4. Orientação Interior	10
Figura 5. Geometria Interna e variáveis associadas a uma imagem.....	11
Figura 6. Elementos da orientação exterior	12
Figura 7. Orientação Exterior e imageamento Projectivo	13
Figura 8. Etapas para obtenção da orientação absoluta	14
Figura 9. Orientação dos ângulos roll, pitch e yaw em aviação.....	15
Figura 10. Escala de uma fotografia vertical	16
Figura 11. Movimentos da aeronave durante o voo – Ângulos de atitude	17
Figura 12. Sobreposição lateral	18
Figura 13. Sobreposição longitudinal.....	18
Figura 14. Ilustração dos aspectos geométricos gerais envolvidos na calibração de uma câmara	20
Figura 15. Modelo geométrico de uma câmara	21
Figura 16. Reticulado do plano imagem da câmara	22
Figura 17. O referencial do mundo e os sistemas de coordenadas da câmara.....	24
Figura 18. Projecção do ponto P_k sobre o plano imagem I_k	26
Figura 19. Fluxograma Simplificado dos Procedimentos.	34

Lista de Gráficos

Gráfico 1 - Distribuição dos PK.....	5
Gráfico 2. Visualização da Matriz de R em 3D.....	35
Gráfico 3. Visualização da Matriz de TR em 3D	36
Gráfico 4. Representação da $T3 \times 2$, em relação aos vectores de transformação de perspectiva T.....	38
Gráfico 5. Variação do vector UKn	40
Gráfico 6. Variação do vector VKn	40
Gráfico 7. Variação do vector SKn	41
Gráfico 8. Variação dos vectores UKn nos $IK * n$	43
Gráfico 9. Variação dos vectores VKn nos $IK * n$	44
Gráfico 10. Variação dos vectores SKn nos $IK * n$	44
Gráfico 11. Comparação dos Valores da Coluna 1 entre as Matrizes IKn	46
Gráfico 12. Comparação dos Valores da Coluna 2 entre as Matrizes IKn	47
Gráfico 13. Comparação dos Valores da Coluna 3 entre as Matrizes IKn	48

Introdução

De modo a alcançar os resultados esperados importa apresentar a contextualização, definição de problema, justificativa, relevância e objectivos do tema em estudo.

1.1. Contextualização

Segundo Tommaselli (2009), a definição de Fotogrametria até a década de 60 para a *American Society of photogrammetry* (Associação Americana de Fotogrametria) era: “Fotogrametria é a ciência ou arte de se obterem medidas confiáveis por meio de fotografias”. Com o advento de novos tipos de sensores uma definição mais abrangente de Fotogrametria foi proposta também pela NASA *Ames Stereo Pipeline* (conjunto de ferramentas automatizadas de *Software* livre da NASA para o processamento de stereo imagens capturadas de satélites) em 1979, como sendo: “Fotogrametria é a arte, ciência e tecnologia de obtenção de informação confiável sobre objectos físicos e o meio ambiente através de processos de gravação, medição e interpretação de imagens fotográficas e padrões de energia electromagnética radiante e outras fontes”.

De acordo com Rosalen (1997), a Fotogrametria pode ser classificada em três tipos: Fotogrametria terrestre, aérea e espacial. A Fotogrametria terrestre é realizada através de câmaras métricas terrestres acopladas ou não a teodolitos e seu eixo de visada é horizontal; a Fotogrametria aérea ou aeroFotogrametria utiliza câmaras métricas aéreas colocadas em aviões e finalmente a Fotogrametria espacial é realizada através de satélites. Entretanto, Giovane e Bisognin (2006), afirmam que, na Fotogrametria como nas outras ciências experimentais, as observações realizadas pelo Homem são caracterizadas pela inevitável presença de erros, erros estes, que decorrem de falha humana, da imperfeição do equipamento e da influência das condições ambientais nas quais se efectua a mensuração. No momento da tomada das fotografias as componentes de rotação da câmara nas direcções em X (movimento de asa da aeronave) e Y (movimento de nariz da aeronave) provocam inclinações na aeronave e por isso devem ser considerados no planeamento de voo. Quando a aeronave sofre o movimento em Y a sobreposição longitudinal será afectada e quando ocorre o movimento em X a sobreposição lateral sofrerá distorções. O movimento de deriva da aeronave é provocado pelas fortes rajadas de vento e da impossibilidade do piloto de voo manter a aeronave em linha recta, provocando

falhas no recobrimento fotogramétrico. A deriva é o ângulo formado entre a direcção de voo e o alinhamento da aeronave no momento de deriva (Santos, 2013).

Segundo Menezes (2017), o Ajustamento de Observações tem por objectivo proporcionar uma solução única para problemas onde o número de observações é redundante e o sistema de equações inconsistente, e a estimativa da precisão da solução adoptada. Um dos métodos que proporciona a solução única é o Método dos mínimos Quadrados (MMQ). O Ajustamento de Observações, além de apresentar uma solução única, torna as observações ajustadas consistentes com modelos matemáticos apropriados (Amorim, 2005).

O Ajustamento de Observações na Fotogrametria pelo Método dos Mínimos Quadrados é uma abordagem matemática fundamental para melhorar a precisão dos resultados obtidos a partir de imagens fotográficas, neste contexto o MMQ é aplicado para determinar os parâmetros desconhecidos da câmara e do terreno, levando em consideração as observações das imagens e os pontos de controle no terreno. O mesmo ajuda a ajustar as observações para reduzir erros sistemáticos e aleatórios, resultando em um modelo mais preciso (Santos, 2013).

No presente trabalho, a ênfase será o ajustamento pelo MMQ em fotografias adquiridas por meio de aeroFotogrametria.

1.2. Definição do problema

De acordo com Santos (2013), a Fotogrametria aérea enfrenta desafios como condições climáticas adversas que podem afectar a qualidade das imagens, impactando na apresentação de resultados precisos. Devido a factores como o vento ou impossibilidade do piloto de voo manter a aeronave em linha recta, durante o processo de levantamento dos dados (tomada das fotos), as componentes de rotação das câmaras nas direcções (X, Y) provocam inclinações na aeronave causando deste modo distorções que provocam falhas no recobrimento fotogramétrico.

Apesar dos avanços significativos alcançados nos últimos anos na tecnologia de obtenção de imagens aéreas, incluindo câmaras digitais de alta resolução, sistemas de navegação embarcados mais precisos e softwares de processamento automáticos, o problema da calibração geométrica das câmaras continua relevante. Isso porque, mesmo com tais avanços, subsistem erros sistemáticos e aleatórios que afectam directamente a precisão dos produtos fotogramétricos, como ortomosaicos, Modelos Digitais de Terreno (MDT) e Modelos Digitais de Elevação (MDE).

Segundo Azevedo (2008), a calibração de uma câmara de imagem é um processo que permite estimar os parâmetros que definem a projecção de um ponto tridimensional (3D) do mundo num ponto

bidimensional (2D) da imagem. Os referidos parâmetros incluem a geometria interna e óptica da câmara, assim como o seu posicionamento e orientação no espaço 3D.

Neste sentido, a calibração geométrica pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) mostra-se fundamental, pois permite ajustar matematicamente a matriz de transformação perspectiva, minimizando os resíduos entre valores observados e calculados. Essa abordagem garante maior confiabilidade e precisão nas aplicações fotogramétricas, respondendo à necessidade actual de resultados compatíveis com as exigências de mapeamento topográfico e modelagem 3D.

1.3. Justificativa

Mesmo com todos os cuidados no processo de aquisição de imagens, erros aleatórios e sistemáticos sempre estarão presentes nas medições fotogramétricas. Nesse contexto, a calibração geométrica de câmaras fotogramétricas torna-se fundamental para garantir que os parâmetros internos (intrínsecos) e externos (extrínsecos) da câmara sejam correctamente determinados. O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) permite minimizar esses erros ao ajustar matematicamente os dados obtidos, fornecendo estimativas óptimas para os parâmetros de calibração.

A Fotogrametria aérea envolve a criação de modelos 3D a partir de imagens bidimensionais. O ajustamento garante que os pontos observados nas imagens sejam consistentes em termos de posição e orientação no espaço tridimensional. O ajustamento permite ainda, quantificar e gerir a incerteza associada aos dados aerofotogramétricos. Isso é fundamental para avaliar a confiabilidade das medições e para a produção de mapas com informações sobre a precisão das medidas.

Em algumas situações, informações adicionais ou restrições podem ser aplicadas ao ajustamento. O MMQ permite incorporar essas restrições de maneira eficaz, o que é importante para garantir que os resultados sejam consistentes com o conhecimento prévio das mesmas. Para além disso, este método fornece estatísticas que ajudam a avaliar a qualidade do ajustamento, incluindo os desvios padrão dos parâmetros estimados, resíduos das observações, permitindo avaliar a confiabilidade dos resultados.

O MMQ permite que informações adicionais, como a precisão das medições e as relações geométricas entre os pontos, sejam incorporadas ao ajustamento. Isso é crucial na Fotogrametria, onde as imagens podem ser afectadas por distorções da lente da câmara, desvios na orientação da câmara, efeitos atmosféricos e erros sistemáticos. Não obstante, este método na Fotogrametria, muitas vezes é aplicado para estimar parâmetros desconhecidos, como as coordenadas de pontos de controle ou parâmetros intrínsecos da câmara com base nas observações disponíveis.

1.4. Relevância

A Fotogrametria desempenha um papel crucial na Cartografia: para o mapeamento preciso de grandes áreas de modo a criar mapas topográficos detalhados, mapas de uso da terra e mapas de elevação que são essenciais para o planeamento urbano, gestão de recursos naturais e estudos ambientais. Na Engenharia: para criar modelos 3D detalhados do terreno, planear com precisão a localização e o dimensionamento das estruturas e na monitoria de obras. Na Geologia: Geólogos usam a Fotogrametria para estudar a topografia e a morfologia do terreno. No Monitoramento de Deslizamentos de Terra: A Fotogrametria é uma ferramenta valiosa para monitorar áreas susceptíveis a deslizamentos de terra. Na Gestão de Recursos Naturais: A Fotogrametria é usada na gestão de recursos naturais, como florestas e áreas de conservação. Nos Estudos de Mudanças Climáticas: Para estudar as mudanças climáticas e seus impactos no meio ambiente, os cientistas usam imagens de satélite e técnicas fotogramétricas para analisar variações na cobertura de gelo, níveis de água e outros indicadores ambientais.

O Ajustamento de Observações na Fotogrametria é crucial para melhorar a precisão e a consistência dos dados obtidos a partir de imagens. Esse processo envolve a correcção de erros sistemáticos e aleatórios presentes nas medições, como distorções nas lentes da câmara, imprecisões na orientação das imagens e variações na altitude do terreno. Ao realizar o ajustamento, os dados observados são ponderados de acordo com a confiabilidade de cada medição, resultando em um modelo mais preciso e confiável do terreno ou objecto mapeado.

1.5. Objectivos

1.5.1. Objectivo Geral

Aplicar o Método dos Mínimos Quadrados na calibração geométrica de câmaras fotogramétricas, visando assegurar a consistência dos parâmetros bem como a confiabilidade dos produtos fotogramétricos derivados.

1.5.2. Objectivos Específicos

- Determinar os parâmetros extrínsecos da câmara (matrizes de rotação e translação);
- Determinar a matriz de transformação de perspectiva;
- Determinar os parâmetros de calibração pelo Método dos Mínimos Quadrados (Ajustamento);
- Analisar a qualidade dos resultados obtidos na calibração da câmara pelo teste de qui-quadrado.

1.6. Área de Estudo

A área de estudo seleccionada para a execução da calibração geométrica da câmara fotogramétrica localiza-se na cidade de Maputo, no distrito Municipal de KaMavota, concretamente na zona costeira da Costa do Sol, ao longo da Avenida da Marginal. Esta região situa-se entre os paralelos 25°55'52"S e 25°54'47"S e os meridianos 32°35'53"E e 32°36'39"E. Para apoiar os procedimentos de calibração, foram definidos pontos de controle distribuídos na área, representados no gráfico 1 em 3D.

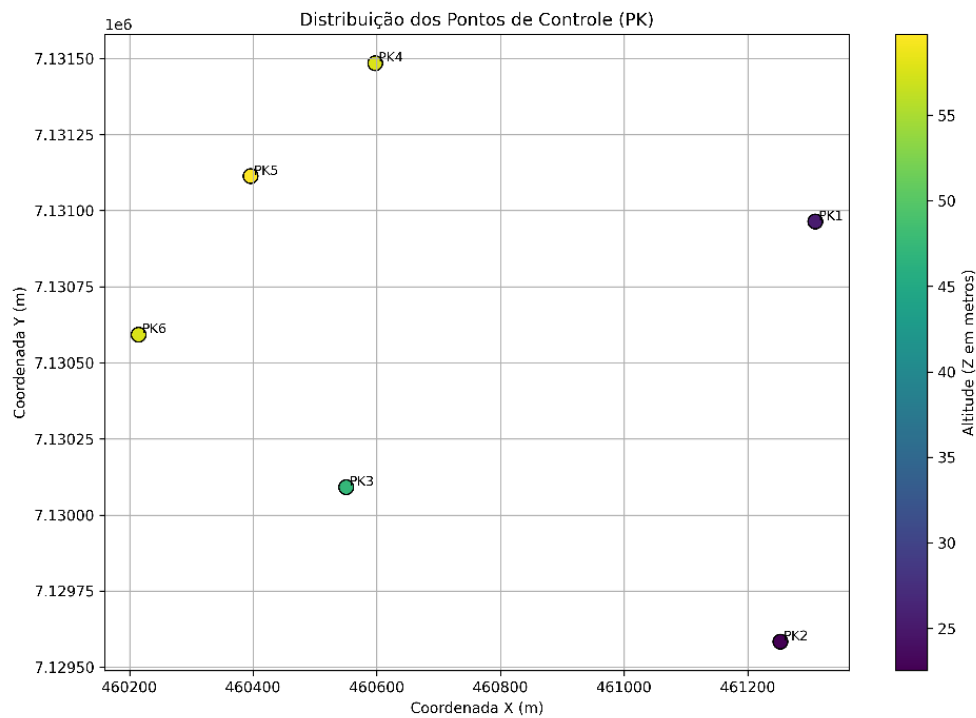


Gráfico 1 - Distribuição dos PK

Os pontos estão georreferenciados em coordenadas UTM (X, Y) e possuem variação altimétrica (Z), representada pela escala de cores. Essa distribuição homogênea é fundamental para garantir precisão no ajuste por mínimos quadrados e na geração do ortomosaico.

O gráfico 1 ajuda a perceber que os pontos estão alinhados com a topografia local:

- Pontos com cor mais clara (Maior altitude);
- Pontos com cor mais escura (Altitude Menor); e
- Pontos mais baixos estão próximos à costa, mais altos no interior.

Revisão de Literatura

De modo a alcançar os resultados esperados, importa debruçar sobre o ajustamento de observações aplicado na Fotogrametria pelo MMQ. No presente capítulo será apresentado de forma detalhada e sentectizada os princípios teóricos sobre Fotogrametria e Ajustamento de observações, seguido da fusão entre ambos campos.

2.1. Fotogrametria

Segundo Rosalen (1997) a palavra Fotogrametria tem como origem três palavras gregas, foto (luz) + gramma (traçado) + metron (medida), o que significa literalmente: “medir por meio do traçado da luz”. Como esse “traçado luminoso” pode ser registrado num filme fotográfico, poderíamos agora obter um novo significado: “medir através de fotografias”.

A fotogrametria é a ciência que obtém informações confiáveis sobre propriedades da superfície e objectos, sem contacto físico com os objectos, bem como medir e interpretar essas informações (Schenk, 2005).

A Fotogrametria foi definida em (1966) pela Sociedade Americana de Fotogrametria e Sensoriamento Remoto como: “arte, ciência e tecnologia de obter informações confiáveis sobre objectos físicos e o meio ambiente através de processos de registro, medições e interpretações das imagens fotográficas e padrões de energia electromagnéticas radiantes registradas e outros fenômenos”.

2.1.1. Classificação da Fotogrametria

A Fotogrametria pode ser Classificada quanto à Função, quanto ao Método de Processamento e quanto à Categoria.

a) Quanto à função

Segundo (Tommaselli, 2009; Wolf et al., 2014; Rosalen, 1997; Temba, 2000) Fotogrametria pode ser dividida em duas áreas: Fotogrametria métrica e Fotogrametria interpretativa.

- ❖ Fotogrametria Interpretativa – A Fotointerpretação consiste em obter dados qualitativos a partir da análise das fotografias e de imagens de satélite, ou seja ela objectiva principalmente o reconhecimento e identificação de objectos e o julgamento do seu significado, a partir de uma análise sistemática e cuidadosa. É importante realçar que existem três métodos de fotointerpretação: Foto-leitura, Foto-análise e Foto-dedução. A Foto-leitura é feita antes de tudo, neste método faz-se o reconhecimento directo de objectos feitos pelo Homem e de características comuns do Terreno; A Foto-análise é a

técnica de examinar o objecto através da separação e distinção de suas partes correspondentes e finalmente a Foto-dedução inclui todas as características da Foto-leitura e ainda uma avaliação da estrutura geomorfológica da área, os processos responsáveis por sua formação e o estágio de seu desenvolvimento.

- ❖ Fotogrametria Métrica – A Fotogrametria métrica consiste em fazer medições precisas a partir de fotos e outras fontes de informação para determinar, em geral, as localizações relativas dos pontos, ou seja consiste em obter dados quantitativos. Ela permite determinar distâncias, ângulos, áreas, volumes, elevações e tamanhos e formas de objectos, bem como produzir cartas planimétricas e altimétricas, mosaicos, ortofotos e demais subprodutos das fotografias tomadas.

Estas definições não devem ser restritivas, uma vez que durante o processo de Fotointerpretação também são realizadas medidas; por outro lado, na prática de Fotogrametria métrica (por exemplo, durante a restituição) faz-se Fotointerpretação em conjunto com as medições de precisão.

b) Quanto ao Método de Processamento e/ou Etapas

Segundo Rosalen (1997) dada a importância e inúmeras aplicações da Fotogrametria, destacam-se os seguintes métodos de Processamento: Analógico, Analítico e Digital.

- ❖ Fotogrametria Analógica (Desde os primórdios até a década de 60) – Na Fotogrametria Analógica são utilizados equipamentos óptico-Mecânicos, estes realizam o processo de orientação fotogramétrico analogicamente.
- ❖ Fotogrametria Analítica (Na década de 70) – Com o avanço da electrónica e o surgimento de computadores mais compactos e com maior capacidade de cálculo, os processos fotogramétricos passaram a ser executados de maneira analítica. Neste processo são utilizados restituidores analíticos.
- ❖ Fotogrametria Digital (A partir década de 80) – A partir desta década a informática teve grandes avanços, tanto em nível de *softwares* como de *hardwares*, o que possibilitou o desenvolvimento de scanners mais eficientes, propiciando, dessa forma, o uso de imagens digitais em substituição às imagens fotográficas na Fotogrametria. Neste método são utilizados restituidores digitais.

c) Quanto à Categoria

- ❖ Fotogrametria Terrestre – De acordo com Tommaselli (2009), a Fotogrametria Terrestre Ocorre quando as fotografias são tomadas de uma posição fixa no Terreno (normalmente conhecida). De acordo com Rosalen (1997), a Fotogrametria Terrestre é

realizada através de câmaras métricas terrestres acopladas ou não a teodolitos e seu eixo de visada é horizontal. De acordo com Wolf et al., (2014), na Fotogrametria Terrestre são tiradas fotografias com câmaras terrestres, cuja posição e orientação podem ser medidas directamente no momento da exposição.

- ❖ Fotogrametria aérea – De acordo com Tommaselli (2009), a Fotogrametria Aérea (ou Aerofotogrametria) é uma subdivisão da Fotogrametria, na qual as fotografias do terreno são tomadas por uma câmara métrica de precisão montada em uma aeronave.
- ❖ Fotogrametria Espacial – De acordo com Tommaselli (2009), a Fotogrametria Espacial compreende todos os casos de fotografias ou imagens extraterrestres e as medições subsequentes, nas quais a câmara estiver fixada na terra, na lua, em um planeta ou num satélite artificial. De acordo com Rosalen (1997), a Fotogrametria Espacial é realizada através de satélites e/ou ônibus espacial.

No decorrer deste trabalho, serão abordados de forma detalhada a Fotogrametria Aérea pela Fotogrametria digital através da técnica de Fotogrametria Métrica.

2.2. Restituição Aerofotogramétrica

A restituição é o procedimento que pretende obter de fotografias aéreas ou terrestres as feições planimétricas e/ou altimétricas de uma determinada região (Temba, 2000).

Segundo Vettorazzi (2016), a restituição consiste nas operações de transferência de informações, dos fotogramas, para a confecção de uma carta ou planta topográfica de uma região ou trecho dela. O primeiro passo para se efetuar a restituição será o levantamento planialtimétrico (processos topográficos ou GPS) de uma rede, suficientemente densa, de pontos de controle (os chamados pontos de apoio), que sejam facilmente identificáveis nas fotografias aéreas. Estes pontos deverão estar, preferencialmente, ao nível do solo ou não muito acima dele.

2.3. Captação da Imagem

Segundo Rosalen (1997), o Processo de captação da imagem consiste em registrar, através de um sensor, o posicionamento espacial dos acidentes naturais e artificiais da superfície do terreno. Essa captação, na aerofotogrametria, é realizada através de câmaras métricas aéreas, originando as aerofotos, que são agrupadas em pares homólogos (estereopares), que possibilitam a visão estereoscópica. Actualmente, com o advento da Fotogrametria digital, o processo de captação passou a ter uma etapa a mais, que é a numerização das imagens fotográficas através de ‘scanners’.

2.4. Pontos de apoio aerofotogramétricos

Pontos de apoio são pontos com coordenadas conhecidas (X, Y, Z), localizados na área a ser fotografada; Esses pontos são utilizados para orientação absoluta do modelo estereocóscico. Os pontos da rede geodésica nacional podem ser aproveitados como pontos de apoio nos levantamentos aerofotogramétricos, no caso da inexistência ou insuficiência de pontos na região a ser levantada, há necessidade de um levantamento de campo para obtê-los. Os pontos de apoio devem ser convenientemente distribuídos sobre a área a ser fotografada, considerando evidentemente o processo da aerotriangulação para a sua densificação (Rosalen, 1997).

De acordo com Santos (2013), existem dois tipos de pontos de apoio, isto é: pontos naturais; e pontos artificiais. Os pontos naturais são aqueles pontos fotoidentificáveis cuja identificação está em cruzamentos de vias, cantos de culturas e de edificações, entre outros (círculo branco, Figura 2). Os pontos de apoio artificiais são figuras geométricas implantadas na superfície física (Figura 3), de forma que os mesmos sejam fotoidentificáveis. Esses pontos são implantados, geralmente, com diâmetros de 3 à 5 vezes o tamanho de um pixel no terreno. A partir do apoio de campo se define o sistema referencial no espaço-objecto a ser adotado no projecto fotogramétrico, assim como é fornecido subsídios para os processos de orientação fotogramétrica.

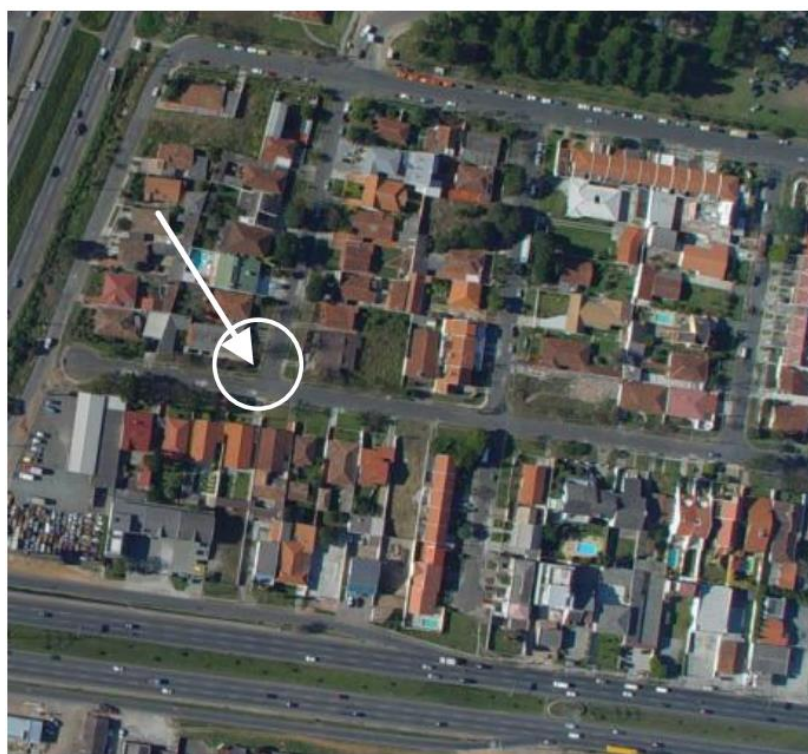


Figura 1. Ponto Natural (Fonte: Santos, 2013)



Figura 2. Pontos Artificiais (Fonte: Santos, 2013)

2.5. Orientação Fotogramétrica

Existem dois tipos de orientação: interior e exterior.vide assegurar

a) Orientação Interior

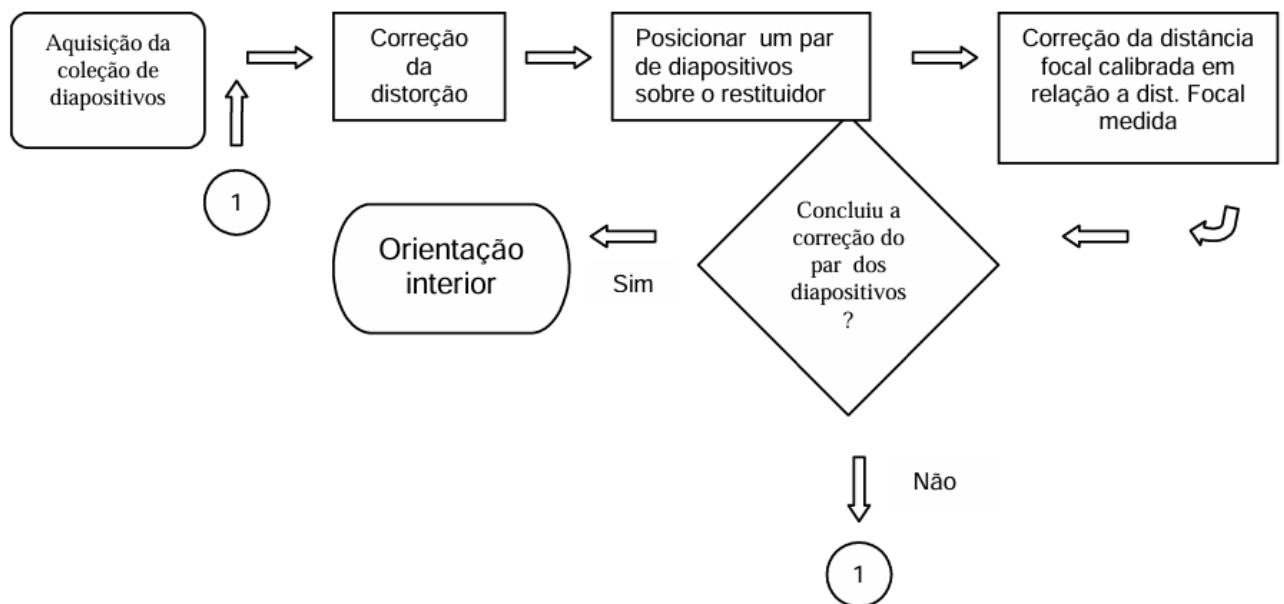


Figura 3. Orientação Interior (Fonte: Temba, 2000)

Os Diapositivos são cópias (de contacto) das fotografias que, normalmente usam Base de Vidro ou Polietileno com coeficientes mínimos de dilatação. Segundo Paredes (1987) conforme citado por Temba (2000), em decorrência do cuidado, manuseio ou mesmo o arquivamento deste material o diapositivo

pode apresentar dilatação ou contração no Formato. Logo, operador da actividade na orientação interior deverá estimar o aumento ou diminuição correspondente a distância focal em função do comportamento da diagonal do diapositivo.

Orientação Interna é a Reconstrução da geometria interior da câmara ou sensor no momento que a imagem foi obtida, ou seja é determinação dos parâmetros intrínsecos da câmara como distância focal, ponto principal, distorção radial, etc (Santana, 2006).

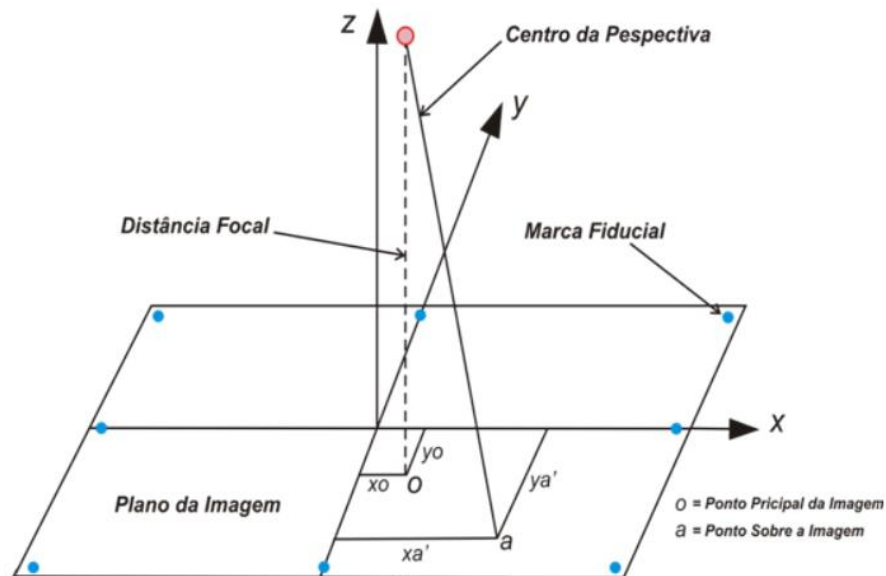


Figura 4. Geometria Interna e variáveis associadas a uma imagem (Santana, 2006)

Onde: Ponto Principal (o); Distância Focal (f); Marcas Fiduciais e Distorção da Lente (radial e tangencial -def. laboratório)

Orientação Exterior

Segundo Santana (2006), A orientação exterior define a orientação angular (atitude) associada com uma imagem (relação entre sistemas de coordenadas).

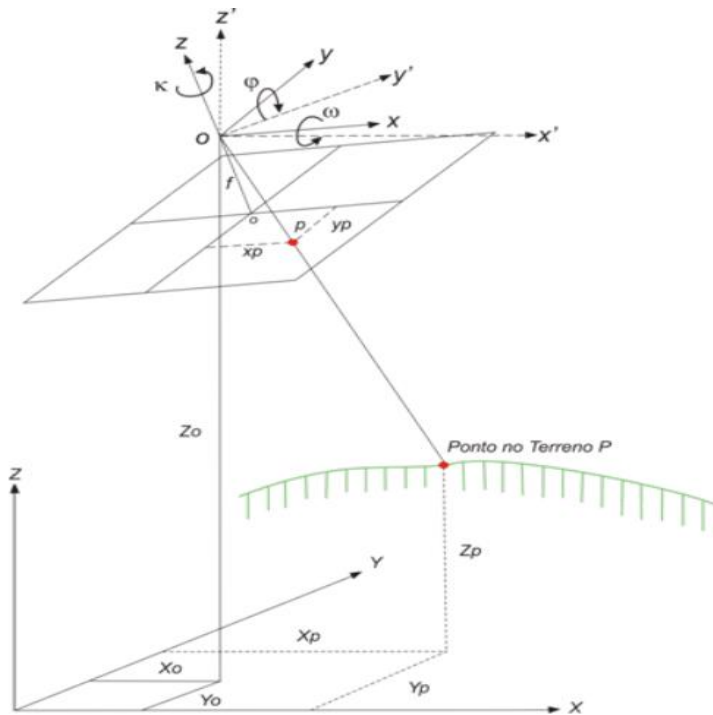


Figura 5. Elementos da orientação exterior (Santana, 2006)

Onde:

- O centro de perspectiva (O): X_0, Y_0, Z_0 (altitude);
- Os ângulos de rotação indicam a relação existente entre os sistemas de coordenadas:
 - Omega (ω) – rotação ao redor do eixo fotogramétrico x;
 - Phi (φ) – rotação ao redor do eixo fotogramétrico y;
 - Kappa (κ) – rotação ao redor do eixo fotogramétrico z.

Segundo Gonçalves (2024), a orientação externa de uma imagem é determinada por seis parâmetros os quais descrevem a orientação (ω, φ, κ) e a posição espacial do sistema de coordenadas da câmara (X_0, Y_0, Z_0) relativamente ao sistema de coordenadas objecto. O sistema de coordenadas da câmara tem a sua origem no centro de perspectiva. É também definido através de entidades de referência fixas na câmara (marcas fiduciais, sistema sensor, reseau) e pode, consequentemente, ser reconstruído a partir da imagem e ser relacionado com o dispositivo de medição das coordenadas imagem ou pixel (ex. comparador). Este procedimento é designado em fotogrametria por reconstrução da orientação interna, ou simplesmente orientação interna e constitui um passo fundamental da orientação externa. A posição espacial da câmara é definida pelo vector $\mathbf{X}_0$ definido a partir do origem dos sistema de coordenadas para o centro de perspectiva (ou exposição) O_0 .

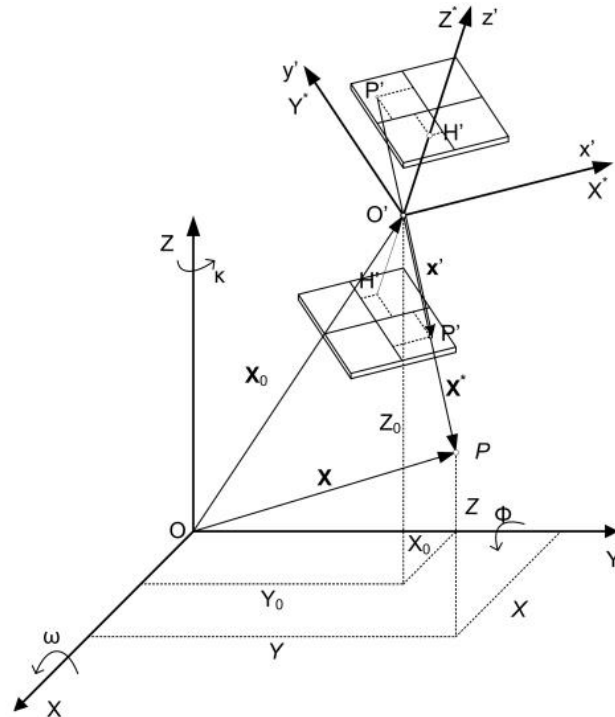


Figura 6. Orientação Exterior e imageamento Projectivo (Gonçalves, 2024)

A orientação Exterior compreende 2 etapas para a reconstrução 3D que são:

❖ Orientação Relativa:

A condição, segundo Wolf (1983) conforme citado por Temba (2000), que permite a conclusão da orientação relativa é a reconstrução espacial de um ponto-objecto (da superfície fotografada), e de outros pontos, em função das projecções dos respectivos pontos-imagem no plano da fotografia de modo que eles se interceptem.

Se as fotografias não forem colocadas nos projectores dos equipamentos de restituição na mesma posição em que forem tiradas, os raios não se interceptarão, quer dizer as fotos-imagens não estarão coincidindo. A diferença, afirma Paredes (1987) conforme citado por Temba (2000), na posição da imagem denomina-se paralaxe, que geralmente se descompõe em P_x e P_y .

O maior obstáculo é conseguir que os raios se interceptem fazendo os projectores girarem no espaço, ao redor dos eixos x , y e z . Na prática P_x e P_y são eliminados em seis pontos críticos do modelo denominados pontos de Von Gruber com os seis movimentos de translação (ou lineares) e rotação (ou angulares) no âmbito do restituidor, conhecidos como Grau de liberdade.

❖ Orientação Absoluta:

Para orientação Absoluta, pontos de controle, orientação relativa e orientação interior são necessários (Schenk, 2005). É necessário posicionar o conjunto de feixes perspectivos formado durante a orientação relativa, de maneira a estabelecer a posição correcta do modelo em relação ao terreno (datum), bem como no dimensionamento correcto de sua escala. É preciso, afirma Wolf (1983) conforme citado por Temba (2000), verificar o registro dos pontos de apoio de campo, quer dizer os pontos de controles vertical e horizontal do modelo.

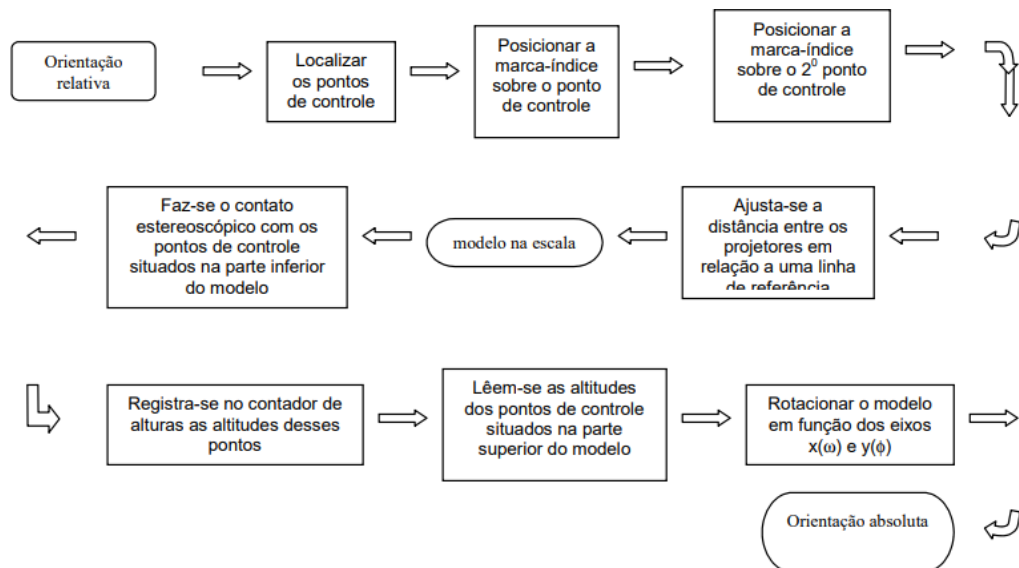


Figura 7. Etapas para obtenção da orientação absoluta (Temba, 2000)

2.6. Ângulos de Euler

Segundo LUGNANI (1987), conforme citado por Silva (2014), os ângulos de rotação ω , ϕ , κ associados aos eixos x, y e z, são chamados de ângulos de Euler. Em fotogrametria, são os parâmetros que indicam a orientação, ou também atitude, da fotografia no espaço e fazem parte dos parâmetros de orientação exterior, ao lado dos parâmetros de posição. De acordo com NASA (2008) e Figueiredo (2005), conforme citado por Silva (2014), outras nomenclaturas para esses ângulos, adoptadas em áreas como a aviação e o sensoriamento remoto, incluem roll (rolamento), pitch (arfagem) e yaw (deriva ou heading).

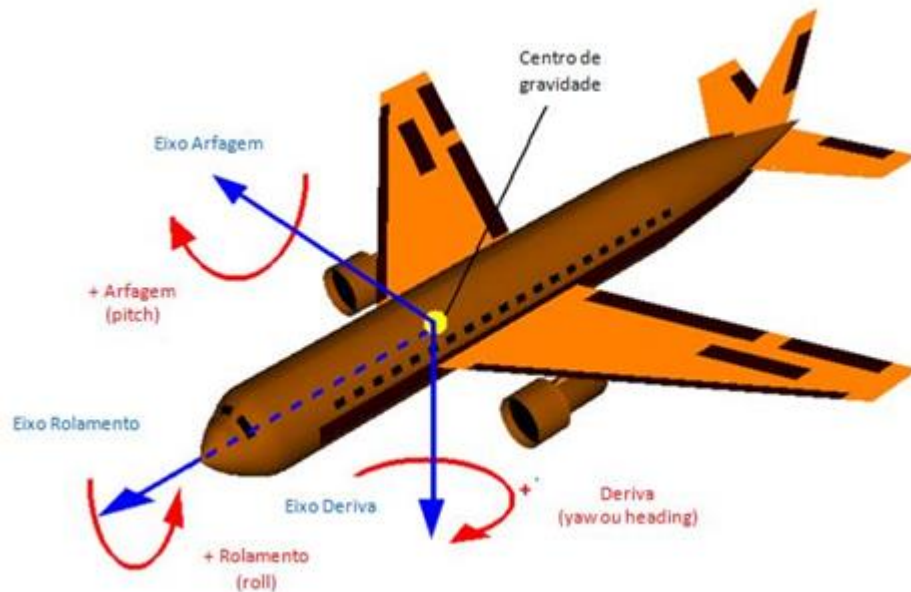


Figura 8. Orientação dos ângulos roll, pitch e yaw em aviação (Fonte: Adaptado da Nasa, 2008)

2.7. Estereoscopia

É a Propriedade que estuda os métodos e técnicas que permitem a visão em perspectiva, ou seja, a percepção de objectos com todas as modificações aparentes, ou com os diversos aspectos que a sua posição e situação determinam com relação à figura e à luz (Temba, 2000). Na Estereofotogrametria são observados e medidos, ou interpretados, pares de fotografias em instrumentos de observação estereoscópica, que proporcionam uma vista tridimensional e criam a ilusão de que o observador está vendo um modelo 3D do terreno (Tommaselli, 2009). Estereoscopia é o Fenômeno ou técnica de se obter imagens tridimensionais a partir de imagens bidimensionais (Santana, 2006).

2.8. Escala Vertical de uma Fotografia

De acordo com Santos (2013), a escala é a razão de uma distância medida em um mapa e sua correspondente no terreno. A escala de um mapa é geralmente expressa como uma fracção, com numerador e denominador na mesma unidade. Isto mostra que uma escala não possui dimensão e quanto maior seu denominador menor é a escala.

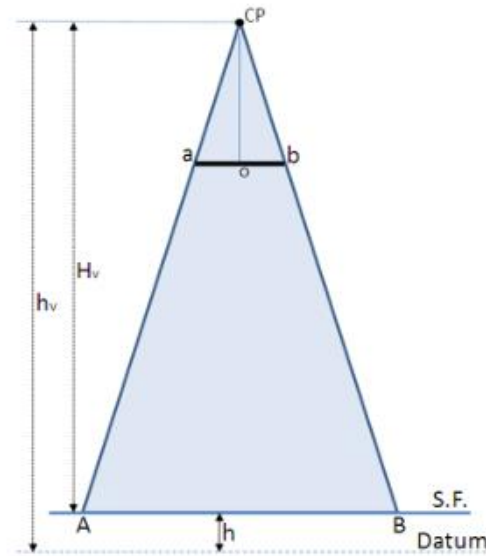


Figura 9. Escala de uma fotografia vertical (Santos, 2013)

A Figura 10 ilustra uma secção transversal tomada por meio de uma fotografia aérea vertical com a estação de exposição posicionada no Centro Perspectiva da câmara (CP). A distância entre o Datum e a estação de exposição é denominada altitude de voo (h_v) e a distância entre a superfície física (S.F.) e a estação de exposição é denominada altura de voo (H_v).

$$E = \frac{CP_o}{h_v - h} \quad (1.0)$$

Onde:

$o \rightarrow$ é o ponto principal da fotografia;

$h \rightarrow$ é altitude média da região em relação ao Datum;

Sabendo que a diferença entre a altitude de voo e altitude média da região em relação ao Datum resulta na altura do voo. A distância entre CP e o plano da fotografia $C_p o$ corresponde a distância focal. Daí surge a fórmula:

$$E = \frac{f}{H} \quad (1.1)$$

$f \rightarrow$ Distância focal.

$E \rightarrow$ Escala da Fotografia;

$H \rightarrow$ Altura de voo.

2.9. Plano de Voo

Segundo Vettorazzi (2016), o voo aerofotogramétrico é realizado de forma a cobrir o terreno, ao longo de faixas longitudinais, na direção N-S (preferencial) ou E-W.

O planeamento de voo é a primeira operação no processo fotogramétrico. O sucesso da cobertura fotográfica vai ser reflectida nos custos das operações que se seguem e na qualidade do produto final (Lourenço, 2017).

Com recursos disponíveis, como plantas ou mapas da região onde será executado o levantamento, são especificados os diversos elementos necessários para o planeamento de uma cobertura aerofotogramétrica. Normalmente, a região de interesse é coberta aerofotogrametricamente utilizando-se faixas com linhas de voos paralelas entre si (Fontes, 2005).

De acordo com Santos (2013), no momento da tomada das fotografias as componentes de rotação da câmara nas direcções em x (movimento de asa da aeronave) e y (movimento de nariz da aeronave) provocam inclinações na aeronave e por isso devem ser considerados no planeamento de voo. Quando a aeronave sofre o movimento em x a sobreposição longitudinal será afectada e quando ocorre o movimento em y a sobreposição lateral sofrerá distorções.

2.10. Região de Recobrimento

O movimento de deriva da aeronave é provocado pelas fortes rajadas de vento e da impossibilidade do piloto de voo manter a aeronave em linha reta, provocando falhas no recobrimento fotogramétrico (Santos, 2013). Região de recobrimento é a área comum entre duas ou mais imagens consecutivas capturadas durante um voo fotogramétrico.



Figura 10. Movimentos da aeronave durante o voo – Ângulos de atitude (Fonte: Universidade Católica de Pernambuco, 2018)

a) Recobrimento Lateral

É a sobreposição entre imagens capturadas em linhas de voo adjacentes. Garante continuidade entre faixas de voo, permitindo mosaicos contínuos, varia entre 10% a 30%, garante cobertura contínua entre faixas (Lourenço, 2017)

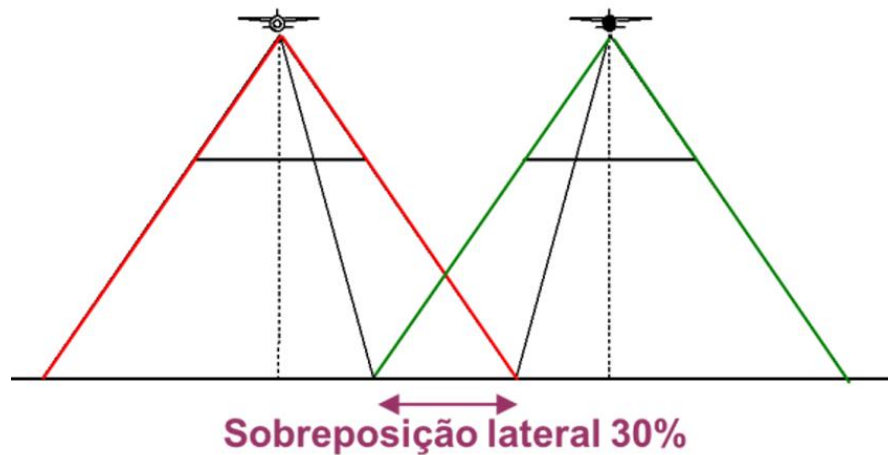


Figura 11. Sobreposição lateral (Lourenço, 2017)

b) Recobrimento Longitudinal

É a sobreposição entre imagens consecutivas na mesma linha de voo. Garante que um objecto seja capturado em mais de uma imagem ao longo do percurso da aeronave, varia entre 60% a 80%, serve para garantir a estereoscopia (Lourenço, 2017).

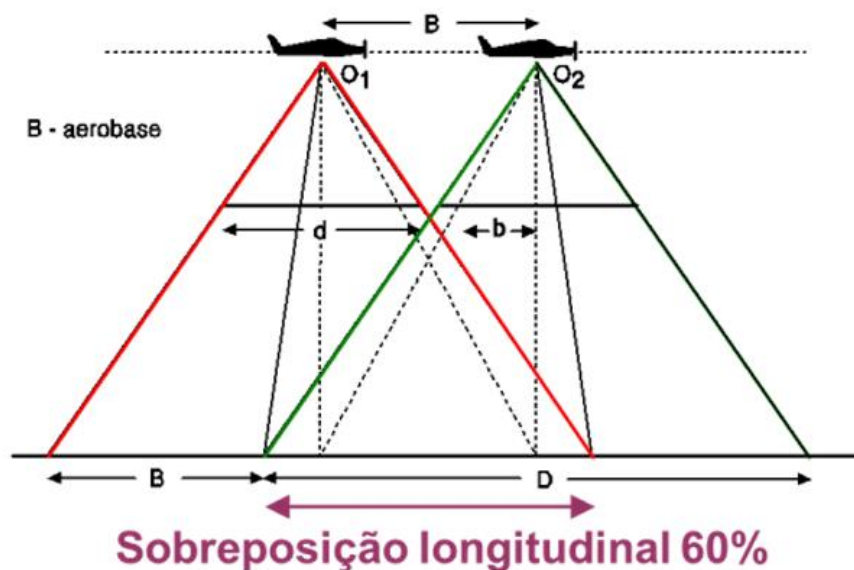


Figura 12. Sobreposição longitudinal (Lourenço, 2017)

2.11. Ajustamento de observações aplicado na Fotogrametria

De acordo com (Santos, 2013), devido às propriedades estocásticas das observações (variabilidade das observações), sua redundância não é compatível com o modelo funcional que representa a realidade física.

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) tem como objectivo encontrar solução única para os parâmetros a serem estimados através da minimização da soma dos quadrados dos resíduos:

$$\|V\|^2 \rightarrow \min \quad (1.2)$$

Dentre os métodos de ajustamento de observações, os mais usados em aplicações fotogramétricas são: o método paramétrico para funções lineares e não lineares; o método combinado; e a filtragem Kalman.. No presente trabalho, será tratado o método de ajustamento de observações: Paramétrico para funções lineares e não lineares.

De acordo com (Catarina, 2009) a partir de observações superabundantes, sujeitas a flutuações probabilísticas e de uma estimativa de sua precisão, o Ajustamento tem por objectivo:

- a) Estimar mediante a aplicação de modelos matemáticos adequados e do MMQ, um valor único para cada uma das incógnitas do problema;
- b) Estimar a precisão de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas.

O MMQ possibilita:

1. Determinar as precisões dos valores ajustados;
2. Detectar a presença de erros grosseiros e equívocos de tal forma que se possa tomar medidas para eliminá-los;
3. Planear as tarefas de campo ainda no escritório, definindo o procedimento e equipamentos mais adequados para a tomada de medidas de campo.

2.12. Método paramétrico para funções não lineares

Segundo (Dalmolin, 2002) conforme citado por (Santos, 2013), Admitindo que um conjunto de dados seja observado e suas variâncias são de qualidades diferentes; pode-se então realizar uma ponderação na Equação (1.2) associando um peso para cada um dos elementos do vector dos resíduos V . Tem-se então a seguinte expressão, a saber:

$$V^T P V \rightarrow \min \quad (1.3)$$

Onde:

$P \rightarrow$ é o peso das observações;

$V \rightarrow$ é o vector dos resíduos.

O Modelo Funcional do método paramétrico é dado por:

$$L_a = F(X_a) \quad (1.4)$$

Onde:

$L_a = L_B + V \rightarrow$ é vector das observações ajustadas;

$F \rightarrow$ é o modelo matemático funcional (linear ou não linear);

$X_a = X_0 + X \rightarrow$ é o vector dos parâmetros ajustados;

$L_B \rightarrow$ é o vector das observações;

$X_0 \rightarrow$ é o vector dos parâmetros aproximados (somente para funções não lineares);

$X \rightarrow$ é o vector das correções dos parâmetros aproximados.

Com os elementos descritos acima, pode-se reescrever a Equação (1.3) da seguinte forma:

$$L_B + V = X_0 + X \quad (1.5)$$

2.13. Calibração geométrica de Câmaras, aplicando o MMQ

Segundo (Polidório et al., 1998) Calibrar geometricamente uma câmara consiste em estabelecer um conjunto de equações que promovam a transformação pontual de todo ponto $M (X, Y, Z)$ do espaço $\mathcal{R}^3$, que tem como referencial um sistema de coordenadas do Mundo (O_w, X_w, Y_w, Z_w), para o espaço $\mathcal{R}^2$, associado a um ponto imagem $M_i (x, y)$ no plano imagem ou plano retina da câmara que está definido por um referencial específico, vide a figura assegurar:

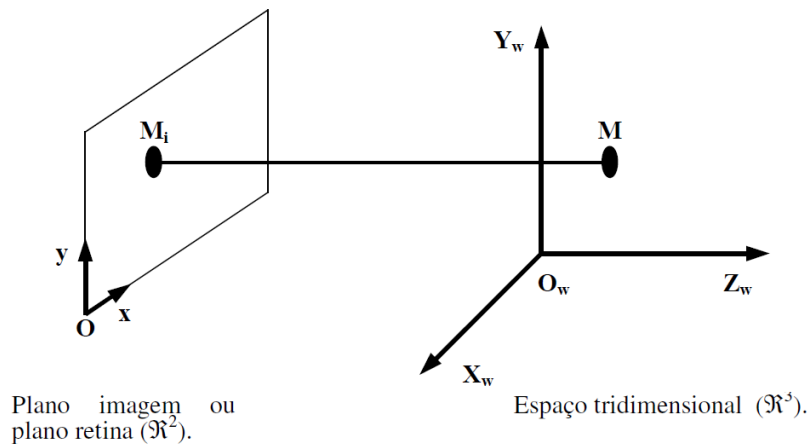


Figura 13. Ilustração dos aspectos geométricos gerais envolvidos na calibração de uma câmara (Fonte: Polidório et al., 1998)

Este conjunto de equações deve representar uma realidade física que considera os seguintes fenômenos envolvidos:

- 1) Óptico – pelo conjunto de lentes da câmara;
- 2) Electrônico – que transforma uma imagem tridimensional contínua em uma imagem analógica ;
- 3) Electrônico-numérico – que consiste em transformar a imagem analógica em uma imagem digital (discreta) passível de quantificação pontual;
- 4) Mecânicos – conversão do sistema de referência em $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$.

Dessa forma identificam-se dois tipos de parâmetros que são necessários para se calibrar uma câmara: os parâmetros extrínsecos (matrizes de rotação e translação) e os parâmetros intrínsecos (factores de escala e projecção do centro óptico).

2.13.1. Modelo de uma câmara

Na figura 15, ilustra-se um modelo de transformação óptica que ocorre em uma câmara. Considere o ponto tridimensional P_k que é projectado no plano imagem da câmara, formando o ponto (pixel) m . Pode-se considerar que o plano imagem da câmara é um reticulado discreto de pontos, o qual tem a capacidade de armazenar uma amostragem de pontos P_k (Figura 16).

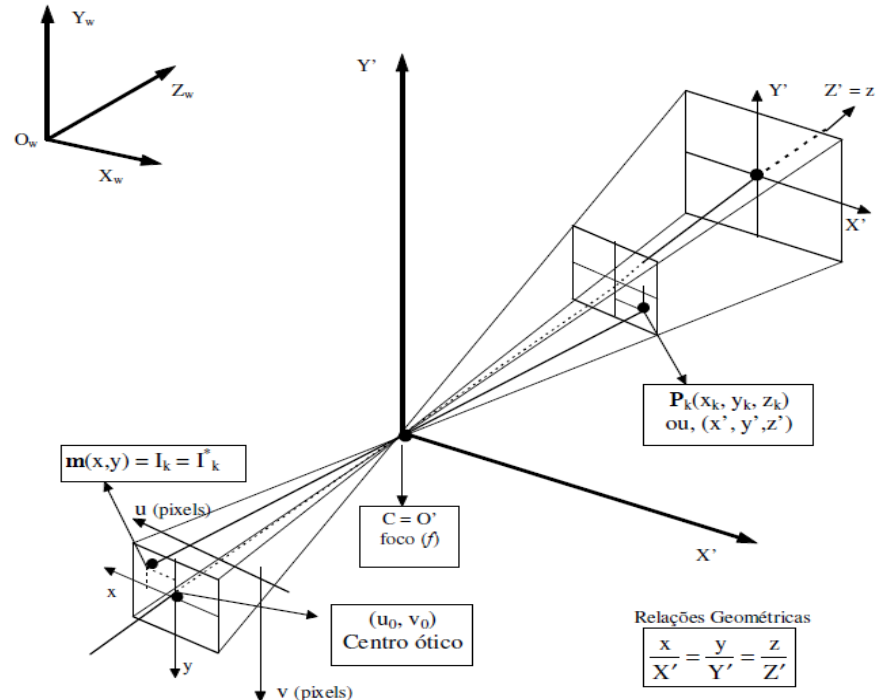


Figura 14. Modelo geométrico de uma câmara (Fonte: Polidório et al., 1998)

Observe que o sistema reticulado do plano imagem da câmara é discreto e, portanto, pode existir um erro intrínseco associado ao sistema na conversão do ponto $P_k(x, y, z)$, espaço contínuo, para o ponto $m(x, y, z)$, espaço discreto.

y), espaço discreto. Por exemplo, supondo que o ponto $P_k (0, 2, 3)$ poderia ser convertido para $m(1, 2.5)$, indicando que o ponto no plano imagem da câmara ocuparia uma célula do reticulado corresponde à linha 1 à coluna 2.5, o que é impossível, pois as células do reticulado são discretas e, portanto, só poderia ser (1, 2) ou (1, 3).

Dessa forma, para que as relações geométricas mostradas na Figura 15 sejam verdadeiras, é necessário introduzir quatro coeficientes: os factores de escala K_u e K_v e a projecção do centro óptico (u_0, v_0) sobre o plano imagem da câmara.

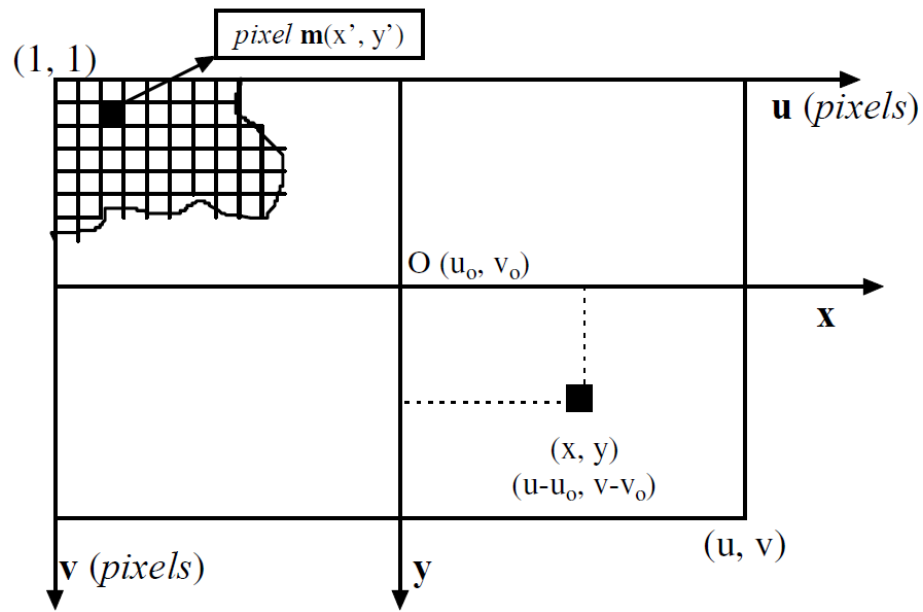


Figura 15. Reticulado do plano imagem da câmara (Fonte: Polidório et al., 1998)

Os factores de escala K_u e K_v são utilizados para se fazer a conversão de unidades entre os sistemas xy e uv que regem sobre o plano imagem da câmara. Um ponto no sistema xy é expresso em unidades métricas ou milimétricas, e no sistema uv ele é expresso em pixels. O sistema de equações (1) relaciona os parâmetros envolvidos nesta conversão.

$$\begin{cases} x = \frac{u}{K_u} \\ y = \frac{v}{K_v} \end{cases} \quad (1)$$

Entretanto, como existem erros intrínsecos à construção da câmara, sabe-se que a projecção do centro óptico sobre o plano imagem não incide exactamente no centro do plano imagem. Necessita-se, então, transladar a origem do sistema xy na direcção do ponto (u_0, v_0) que é a coordenada da projecção do centro óptico do plano imagem. Dessa forma, procedendo a translação (sistema de equações (2)), a

coordenada (u, v) do pixel do ponto m fica relacionada com a sua respectiva coordenada tridimensional (3D).

$$\begin{cases} x = \frac{u-u_0}{K_u} \\ y = \frac{v-v_0}{K_v} \end{cases} \quad \forall K_u, K_v > 0 \quad (2)$$

Na verdade a determinação dos valores de K_u, K_v, u_0 e v_0 constitui o primeiro problema a ser resolvido para se calibrar uma câmara. Para algumas câmaras, como a CCD VÍDEO, pode-se obter o campo de tomada de vista e, a partir da distância focal (f), da profundidade, da largura e da altura do campo de vista, calcular os valores de K_u e K_v . Assim, ao dividir as duas relações do sistema de equações (2) pela distância focal f e fazendo;

$$\alpha_u = K_u f \text{ e } \alpha_v = K_v f \quad (2a)$$

Obtém-se o sistema de equações (3).

$$\begin{cases} u = u_0 + \alpha_u \frac{x}{f} \\ v = v_0 + \alpha_v \frac{y}{f} \end{cases} \quad (3)$$

Rescrevendo esse sistema como um sistema de coordenadas homogêneas (Noble, 1969) e considerando $Z \neq 0$ (recta suporte do foco da câmara – Figura 15) e fazendo $S = Z$ ser a constante de homogeneização e considerar, ainda, que $U = S \cdot u$ e $V = S \cdot v$, o sistema de equações ilustrado em (3) é transformado no sistema homogêneo de equações em (4).

$$\begin{cases} U = \alpha_u \cdot X + U_0 \cdot Z \\ V = \alpha_v \cdot Y + V_0 \cdot Z \\ S = Z \end{cases} \quad (4)$$

O sistema de equações (4) pode ser escrito na forma Matricial, sistema de equações (5), tendo, portanto, a forma geral: $U = M \cdot X$, onde M é uma matriz 3×4 e é denominada: matriz de transformação perspectiva. Observe que, se $S = 0$, equivale dizer que $Z = 0$ e, portanto, o ponto no espaço tridimensional se encontra no plano focal da câmara e, dessa forma, os pixels de coordenada (u, v) contidos nesse plano não estão definidos no plano imagem da câmara.

Ainda, no sistema de equações (5), tem-se:

- Se X e M são conhecidos, calculam-se as coordenadas (2D) dos pontos imagens $m_i(x, y)$ associados com os pontos $P_k(x, y, z)$;
- Se U e M são conhecidos, podem-se reconstruir os pontos 3D, $P_k(x, y, z)$, associados com os pontos imagens $m_i(x, y)$;

➤ Se U e X são conhecidos, calcula-se a matriz de transformação perspectiva M.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U \\ V \\ S \end{pmatrix}}_U = \begin{pmatrix} S.u \\ S.v \\ S \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_o & 0 \\ 0 & \alpha_v & v_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_X \quad (5)$$

2.13.2. Sistemas de coordenadas com deslocamento rígido

Em algumas situações, para efeito de simplificações, pode-se fazer coincidir o sistema de coordenadas da câmara O' com o sistema de coordenadas do mundo (O_w). Entretanto, as grandes aplicações exigem que esses sistemas de coordenadas sejam tratados em separado, como ilustra a Figura 17.

Os sistemas de coordenadas da câmara, O' e O'', são fixos em relação a câmara e o referencial do mundo (O_w) é fixo em relação ao mundo. Como os referenciais são independentes, os sistemas de coordenadas da câmara podem se mover, fixo ao movimento da câmara (O' é fixo em relação a O''), em relação ao referencial do mundo. Nesse caso, o vector w pode fornecer a posição da câmara e dos seus sistemas de coordenadas em qualquer instante em relação ao referencial do mundo.

Ao se fazerem estas considerações, a câmara está livre para realizar movimentos de translação e de rotação em relação a O_w.

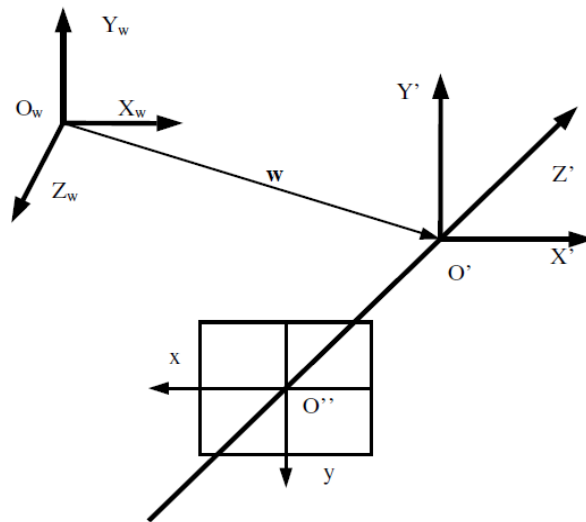


Figura 16. O referencial do mundo e os sistemas de coordenadas da câmara (Fonte: Polidório et al., 1998)

Como todo o referencial (O, X, Y, Z) pode ser calculado a partir do referencial mundo (O_w, X_w, Y_w, Z_w) pelo sistema de equações (6).

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix} + T_r \quad (6)$$

Onde:

$$R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \text{ é a matriz de rotação.}$$

$$T_r = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \text{ é a matriz de translação.}$$

Considerando a matriz de transformação perspectiva M , sistema de equações (5), que pressupõe a coincidência dos referenciais mundo e os da câmara e o sistema de equações (6), que trata o referencial mundo e os referenciais da câmara em separado, deduz-se a equação (7), que possibilita o cálculo da nova matriz de transformação perspectiva T , exigida para que se possam tratar, em separado, os referenciais mundo e os da câmara.

$$T = M \begin{pmatrix} R & T_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Onde :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } 1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo o algoritmo desse sistema, encontra-se o sistema (8).

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_u r_1 + u_0 r_3 & \alpha_u t_x + u_0 t_z \\ \alpha_v r_2 + v_0 r_3 & \alpha_v t_y + v_0 t_z \\ r_3 & t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_{14} \\ t_2 & t_{24} \\ t_3 & t_{34} \end{pmatrix} \quad (8)$$

2.13.3. Cálculo da matriz de transformação perspectiva

Calibrar uma câmara, em relação a um referencial, significa determinar a matriz de transformação perspectiva existente entre a câmara, mais precisamente o plano imagem da câmara, e o referencial 3D associado a esta câmara.

A figura 14 mostra o ponto $P_k(X_k, Y_k, Z_k)$, pertencente a $\mathfrak{R}^3$, sendo projectado no plano imagem de uma câmara, projecção esta que passa pelo foco C , centro óptico, e se define sobre o plano imagem no ponto $I_k(u_k, v_k)$.

Considerando as coordenadas homogêneas da projecção de $P_k(X_k, Y_k, Z_k)$ como sendo o ponto $I_k^*(U_k, V_k, S_k)$, então, calibrar uma câmara consiste em determinar a matriz de transformação perspectiva que permita transformar o ponto P_k no ponto I_k^* correspondente, o que é dado pela equação 11.

$$I_k^* = T. \begin{pmatrix} P_k \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Onde:

$$P_k = (X_k, Y_k, Z_k)^T$$

$$I_k^* = (U_k, V_k, S_k)^T$$

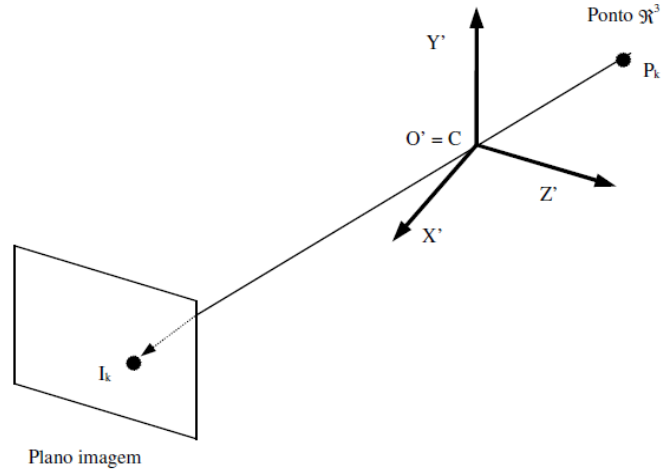


Figura 17. Projecção do ponto P_k sobre o plano imagem I_k (Fonte: Polidório et al., 1998)

Supondo o caso geral $S_K \neq 0$, as coordenadas no plano imagem I_k (em Pixels) são dadas pela Equação (12).

$$I_K = \begin{pmatrix} U_K \\ V_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_K}{S_K} \\ \frac{V_K}{S_K} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Do sistema de equações (12) conclui-se que:

$$\begin{cases} U_K - u_K \cdot S_K = 0 \\ V_K - v_K \cdot S_K = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Desenvolvendo-se a Equação (11), encontra-se:

$$\begin{cases} U_K = t_1 \cdot P_K + t_{14} \\ V_K = t_2 \cdot P_K + t_{24} \\ S_K = t_3 \cdot P_K + t_{34} \end{cases} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (13), tem-se:

$$\begin{cases} t_1 \cdot P_K + t_{14} - u_K \cdot (t_3 \cdot P_K + t_{34}) = 0 \\ t_2 \cdot P_K + t_{24} - v_K \cdot (t_3 \cdot P_K + t_{34}) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

No sistema de equações (15), no processo de calibração de câmaras, os valores P_k , u_k e v_k são conhecidos. Logo, este sistema possui 11 incógnitas:

$t_1 = (t_{11} \ t_{12} \ t_{13})$, $t_2 = (t_{21} \ t_{22} \ t_{23})$, $t_3 = (t_{31} \ t_{32} \ t_{33})$, t_{14} e t_{24} . Então, para se resolver este sistema é necessário que se tenha $k = 1, 2, 3, \dots, n$, onde n deve ser no mínimo 5, uma vez que, para cada valor de k , obtêm-se duas equações. Dessa forma, para se calcular a matriz de transformação perspectiva T , são necessários, no mínimo, 6 pontos, não coplanares, P_k e, outros 6 pontos I_k .

2.14. A aplicação do método dos mínimos quadrados

O problema em se aplicar o sistema de equações (15) é que nem sempre o parâmetro t_{34} é conhecido, ao supor que existe translação no sistema, tem-se que ter $t_z \neq 0$. Assim, substituindo o sistema de equações (8) no sistema (15) e dividindo o resultado por t_z , obtém-se o sistema de equações (16).

$$\begin{cases} X_1 \cdot P_K - u_K \cdot (X_2 \cdot P_K + C_1) = u_K \\ X_3 \cdot P_K - v_K \cdot (X_2 \cdot P_K + C_2) = v_K \end{cases} \quad k = (1, \dots, n), \quad n > 5 \quad (16)$$

O sistema de equações (16) pode ser representado pela forma matricial $A.X = B$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} P_K^T & -u_K \cdot P_K^T & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -v_K \cdot P_K^T & P_K^T & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(2n \times 11)} \quad k = (1, \dots, n), \quad n > 5 \quad (16-a)$$

$$X = (X_1 \ X_2 \ X_3 \ C_1 \ C_2)^T_{(11 \times 1)} \quad (16-b)$$

$$B = \begin{pmatrix} u_K \\ v_K \end{pmatrix}_{(2n \times 1)} \quad k = (1, \dots, n), \quad n > 5 \quad (16-c)$$

$$X_1 = \frac{u_0}{t_z} \cdot r_3 + \frac{\alpha_u}{t_z} \cdot r_1 \quad (16-d)$$

$$X_2 = \frac{1}{t_z} \cdot r_3 \quad (16-e)$$

$$X_3 = \frac{v_0}{t_z} \cdot r_3 + \frac{\alpha_v}{t_z} \cdot r_2 \quad (16-f)$$

$$C_1 = u_0 + \frac{\alpha_u}{t_z} \cdot t_x \quad (16-g)$$

$$C_2 = v_0 + \frac{\alpha_v}{t_z} \cdot t_y \quad (16-h)$$

A solução de $A.X = B$, pelo método dos mínimos quadrados é dada pela Equação (17).

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot B \quad (17)$$

Material e Métodos

Neste capítulo são apresentados os materiais e a metodologia de forma detalhada bem como os procedimentos tomados para o desenvolvimento do trabalho.

3.1. Material

Para realização deste trabalho foram usados diferentes *softwares*, para manipulação de dados que permitiram alcançar os objectivos traçados.

3.1.1. Dados

Para atingir os objectivos deste trabalho, foram utilizados vários conjuntos de dados da área de estudo, fornecidos pelo CENACARTA. Esses dados foram fundamentais para a calibração geométrica de câmaras fotogramétricas pelo MMQ. Inicialmente, foram usados dados em formato CSV e um certificado de calibração em formato 'TXT', todos disponíveis no anexo 2. Esses dados foram essenciais para o processo de calibração proposto.

3.1.2. Descrição de Dados

Apartir do Certificado de Calibração foram extraídos os parâmetros intrínsecos da câmara: Centro de projecção (U_0, V_0), distância focal (f) e os factores de escala (K_u, K_v), os mesmos podem ser vistos na tabela 1

Tabela 1. Parâmetros intrínsecos da câmara (Fonte: CENACARTA)

Parâmetros Intrínsecos da Câmara		
Parâmetro	Valor Calculado	Unidade
U_0	-0.001	mm
V_0	-0.007	mm
K_u	1	mm/pixel
K_v	1	mm/pixel
f	153.692	mm

Para calibrar uma câmara pelo método aqui proposto, são necessários 6 pontos P_k (Pontos de controle) conhecidos e os seus respectivos pontos I_k (Coordenadas normalizadas no plano da imagem), os quais geram 12 equações. Entretanto, o Método dos Mínimos Quadrados permite que se criem sistemas redundantes, com mais equações do que incógnitas, e quanto maior for o número de equações no sistema, menores serão os erros extrínsecos e intrínsecos do sistema (Polidório et al., 1998).

A aplicação do MMQ para a calibração de câmaras aerofotogramétricas, dentre os elementos referenciados na tabela 1, também pressupõem a determinação dos pontos de controle, que para o presente trabalho os mesmos foram fornecidos pelo CENACARTA, e podem ser vistos na tabela 2

Tabela 2. Pontos de controle (Fonte: CENACARTA)

PK	X (m)	Y (m)	Z (m)
PK₁	461309.148	7130964.117	25.296
PK₂	461252.723	7129583.456	22.531
PK₃	460550.507	7130091.163	47.272
PK₄	460597.508	7131484.369	57.632
PK₅	460395.891	7131113.428	59.726
PK₆	460214.786	7130592.297	57.674

Para o presente trabalho os pontos de controle possibilitaram a determinação da matriz de translação (TR), das coordenadas homogêneas antes da conversão para o plano imagem (I_K^*) e a coordenada (u, v) do pixel.

3.2. Determinação os parâmetros extrínsecos da câmara

Segundo Azevedo et al., (2008) os parâmetros extrínsecos fornecem a posição e orientação da câmara, estes são definidos por intermédio de uma matriz de rotação (R) e um vector de translação (TR), em relação a um certo sistema de coordenadas 3D global (mundo).

Segundo LUGNANI (1987), conforme citado por Silva (2014) os ângulos de rotação ω , φ , κ associados aos eixos x, y e z, são chamados de ângulos de Euler. Em fotogrametria, são os parâmetros que indicam a orientação, ou também atitude, da fotografia no espaço e fazem parte dos parâmetros de orientação exterior, ao lado dos parâmetros de posição. As matrizes de rotação são exemplos de matrizes ortogonais.

De modo a calcular a matriz de Rotação no freemat foram estabelecidos os ângulos de entrada, $\omega = 70^\circ$, $\varphi = 5^\circ$ e $\kappa = 30^\circ$. A matriz de rotação (R) foi determinada pela relação seguinte:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \kappa \cos \varphi & \cos \kappa \sin \varphi \sin \omega + \sin \kappa \cos \omega & \cos \kappa \sin \varphi \cos \omega - \sin \kappa \sin \omega \\ \sin \kappa \cos \varphi & \sin \kappa \sin \varphi \sin \omega - \cos \kappa \cos \omega & \sin \kappa \sin \varphi \cos \omega + \cos \kappa \sin \omega \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \omega & \cos \varphi \cos \omega \end{bmatrix}$$

Uma vez calculada a matriz de rotação, foram extraídos os valores de r_1 , r_2 , r_3 e determinou-se as respectivas médias de modo a se ter um valor único dos parâmetros de rotação. Estes parâmetros são importantes para o cálculo da matriz de transformação de perspectiva T, bem como o vector das incógnitas X.

Para determinar a matriz de translação em relação ao centro de gravidade dos pontos, é necessário calcular a média das diferenças entre a coordenada de cada ponto em relação à coordenada do centro de gravidade (Santos, 2008). A matriz de Translação foi determinada pela seguinte fórmula:

$$TR_n = \frac{(P_n - P_0)^T}{2} \rightarrow \text{é uma matriz coluna } TR_{3 \times 1}$$

Onde: n varia de 1 até 6 que corresponde ao número dos pontos de controle.

3.3. Determinação a Matriz de transformação perspectiva

A matriz de Transformação Perspectiva M, pressupõe as coincidências dos referenciais mundo e os da câmara, conforme o ilustrado na matriz seguinte:

$$M = \begin{bmatrix} K_u & 0 & U_0 & 0 \\ 0 & K_v & V_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez calculada a matriz M e conhecendo X, foram calculadas as coordenadas (2D) dos pontos imagens $m_i(x, y)$ associados com os pontos $P_k(x, y, z)$ com base na fórmula abaixo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U \\ V \\ S \end{pmatrix}}_U = \begin{pmatrix} S \cdot u \\ S \cdot v \\ S \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_o & 0 \\ 0 & \alpha_v & v_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}}_X$$

Pode existir um erro intrínseco associado ao sistema na conversão do ponto $P_k(x, y, z)$, espaço contínuo, para o ponto $m_i(x, y)$, espaço discreto, portanto, de modo a tornar o sistema reticulado do plano imagem da câmara como discreto, foram aplicadas as fórmulas seguintes:

$$\begin{cases} u = u_0 + \alpha_u \frac{x}{f} \\ v = v_0 + \alpha_v \frac{y}{f} \end{cases}$$

Calibrar uma câmara, em relação a um referencial, significa determinar a matriz de transformação perspectiva T entre a câmara (plano imagem da câmara) e o referencial 3D (plano objecto) associado a esta câmara.

$$T_n = \begin{bmatrix} K_u \cdot r_1 + U_0 \cdot r_3 & K_u \cdot TRX_n + U_0 \cdot TRZ_n \\ K_v \cdot r_2 + V_0 \cdot r_3 & K_v \cdot TRY_n + V_0 \cdot TRZ_n \\ r_3 & TRZ_n \end{bmatrix}$$

Nesta fase foi determinado a matriz de Transformação de perspectiva $T_{3 \times 2}$ para os 6 pontos ($n = 1, 2, \dots, 6$).

3.4. Calibração geométrica de Câmaras

Calibrar uma câmara consiste em calcular a matriz de transformação de perspectiva que relaciona o plano da imagem (2D) ao sistema de coordenadas 3D de referência associado à câmara. Considerando as coordenadas homogêneas da projecção de P_K (X_K, Y_K, Z_K) como sendo o ponto I_K^* (U_K, V_K, S_K), então, calibrar uma câmara consiste em determinar a matriz de transformação perspectiva que permita transformar o ponto P_K no ponto I_K^* (Polidório et al., 1998).

$$I_{K_n}^* = [U_{K_n} \quad V_{K_n} \quad S_{K_n}]^T$$

De modo a determinar $I_{K_n}^*$ primeiro iremos determinar os parâmetros que compoem a mesma ($U_{K_n} \quad V_{K_n} \quad S_{K_n}$):

$PK_n = P_n^T \rightarrow$ De modo a determinar a matriz $PK_{3 \times 1}$, onde $n = 1, 2, \dots, 6$.

$$U_{K_n} = t_{1 \times 1} \cdot PK_n + t_{1 \times 2}$$

$$V_{K_n} = t_{2 \times 1} \cdot PK_n + t_{2 \times 2}$$

$$S_{K_n} = t_{3 \times 1} \cdot PK_n + t_{3 \times 2}$$

A matriz $I_{K_n}^*$ tem dimensão 3×3 e representa Coordenadas homogêneas antes da conversão para o plano Imagem, essa matriz $I_{K_n}^*$ é a entrada intermediária para a projecção no plano imagem, sendo fundamental no processo de transformação espacial em aplicações como calibração de câmaras ou fotogrametria. A composição dos vectores homogêneos permite manipulações matriciais que preservam as proporções de escala e rotação.

Uma vez que $S_K \neq 0$, as coordenadas normalizadas no plano imagem I_K (em pixels) com dimensão 6×3 são dados pela equação:

$$I_{K_n} = \begin{bmatrix} uk_n \\ vk_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_{K_n}}{S_{K_n}} \\ \frac{V_{K_n}}{S_{K_n}} \end{bmatrix}$$

3.5. Teste de Qualidade

Com base nos PK (pontos de controle) e a sua respectiva projecção bem como as coordenadas 2D (em pixel), foi elaborada uma tabela para analisar a qualidade dos resultados da calibração geométrica de câmaras fotogramétricas.

Não obstante, foi calculado o desvio relativo (dr) em relação as coordenadas conhecidas (PK) e projectadas (PIK) com base na fórmula:

$$d_{kw} = \sqrt{XK_n^2 + YK_n^2 + ZK_n^2}$$

$$d_{Ikw} = \sqrt{XIK_n^2 + YIK_n^2 + ZIK_n^2}$$

$$d_r = d_{kw} - d_{Ikw}$$

De seguida foi calculado:

1. O desvio relativo percentual:

$$dr_{\%} = \left(\frac{d_r}{d_{kw}} \right) \times 100$$

2. Variância dos resíduos:

$$\sigma^2 = \frac{\sum dr^2}{n-u} \rightarrow \text{onde } n = 6 \text{ (número de observações ou pontos) e } u = 3 \text{ (número de incógnitas por equação)}$$

3. Desvio padrão dos resíduos (σ):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

4. Erro médio dos resíduos

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum d_r$$

5. Esperança

$$E = \frac{n}{k} \text{ onde :}$$

$n \rightarrow$ número de resíduos; e

$k \rightarrow$ número de classes.

6. Cálculo do χ^2

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \text{ onde:}$$

$\chi^2 \rightarrow$ Qui-quadrado;

$O_i \rightarrow$ valores observados;

$E_i \rightarrow$ valores esperados.

3.6. Aplicação do MMQ

O sistema de equações pode ser representado na forma matricial, $A.X = B$. As matrizes completas encontram-se no Anexo 2.

- a) De modo a aplicar o MMQ, foram determinadas seis vectores coluna (6×1) B_n , representando o vector de observações das coordenadas homogêneas da imagem.

$$B_n = \begin{bmatrix} UK_n \\ VK_n \end{bmatrix}$$

- b) De seguida, iremos determinar os parâmetros necessários para compor os Seis vectores coluna (11×1), representando os vector das incógnitas X_n :

$$X_n = [X_a \quad X_b \quad X_c \quad C_n \quad C_m]^T$$

$$X_a = \frac{U_0}{TR_Z} r_3 + \frac{K_u}{TR_Z} r_1 \rightarrow \text{seis vectores linha } (1 \times 3), \text{ onde } a = 1, 2, \dots, 3$$

$$X_b = \frac{1}{TR_Z} r_3 \rightarrow \text{matriz linha } (1 \times 3), \text{ onde } b = 1, 2, \dots, 3$$

$$X_c = \frac{V_0}{TR_Z} r_3 + \frac{K_v}{TR_Z} r_2 \rightarrow \text{matriz linha } (1 \times 3), \text{ onde } c = 1, 2, \dots, 3$$

$$C_n = U_0 + \frac{K_u}{TR_Z} TR_X \rightarrow \text{valor único, onde } n = 1, 2, \dots, 3$$

$$C_m = V_0 + \frac{K_v}{TR_Z} TR_Y \rightarrow \text{valor único, onde } m = 1, 2, \dots, 3$$

- c) No final iremos determinar as seis matrizes (6×11) dos coeficientes (A_n):

$$A_n = \frac{B_n}{X_n}$$

3.7. Equipamentos

Para a realização do presente trabalho foram empregues programas computacionais para a manipulação dos dados nos quais destacam-se equipamentos *software*, os quais podem ser vistos na tabela 3.

Tabela 3. Equipamentos

Ferramenta / Software	Finalidade Principal	Observações
Microsoft Excel	Criação de tabelas e organização de dados	Utilizado para entrada, análise inicial e organização tabular
Google Colab	Geração de gráficos e cálculos com Python	gráficos
Microsoft Word	Redação do texto do TCC	Usado para formatação geral e inserção de figuras
LaTeX	Escrita de fórmulas e matrizes matemáticas	Auxiliou na apresentação precisa de equações e expressões
Draw.io	Elaboração de fluxograma metodológico	Representação visual da metodologia do projecto
Freemat	Execução de cálculos matriciais e scripts numéricos	Utilizado para simulações e testes de algoritmos matemáticos

3.8. Método

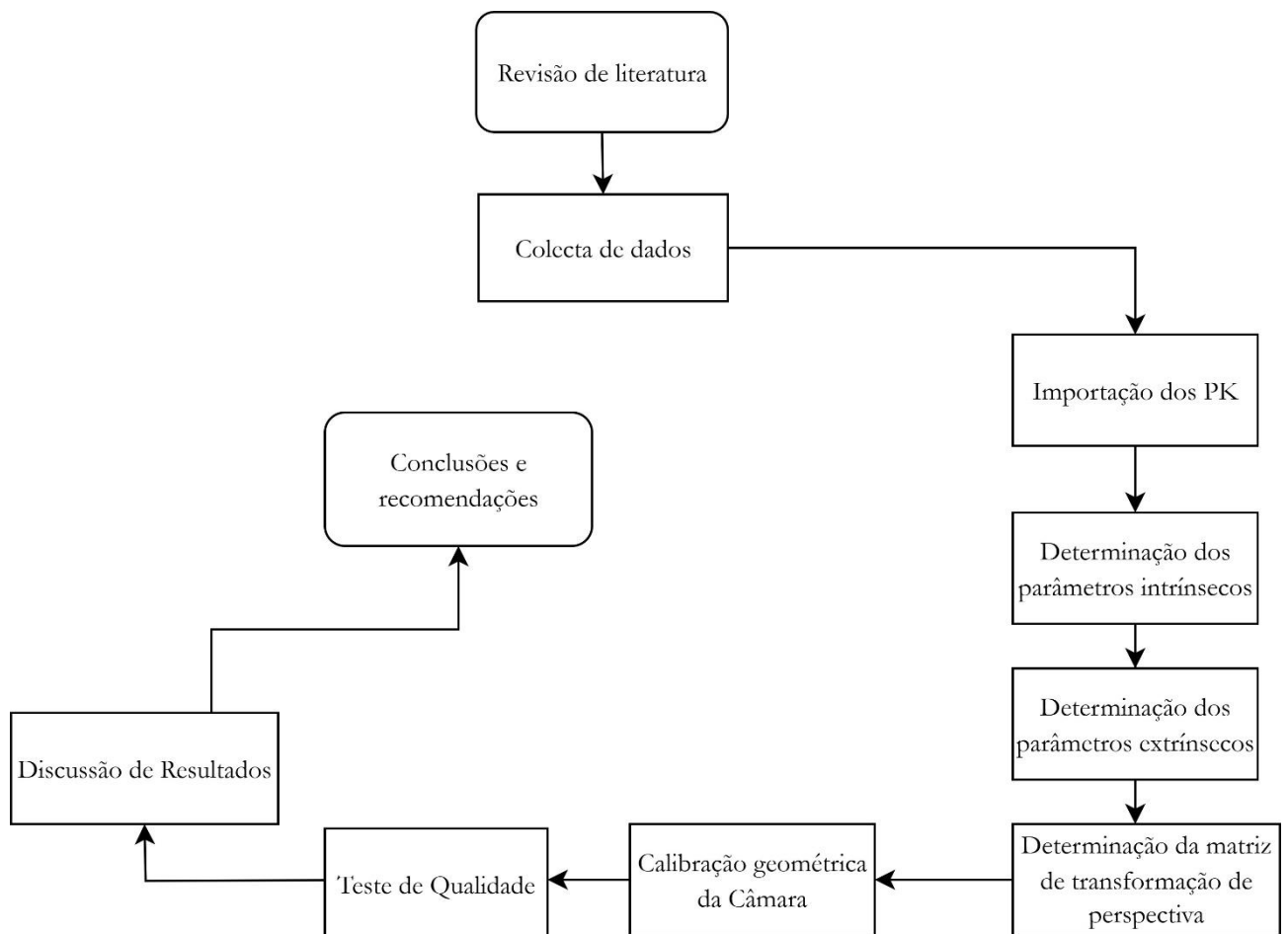


Figura 18. Fluxograma Simplificado dos Procedimentos.

Resultados e Discussão

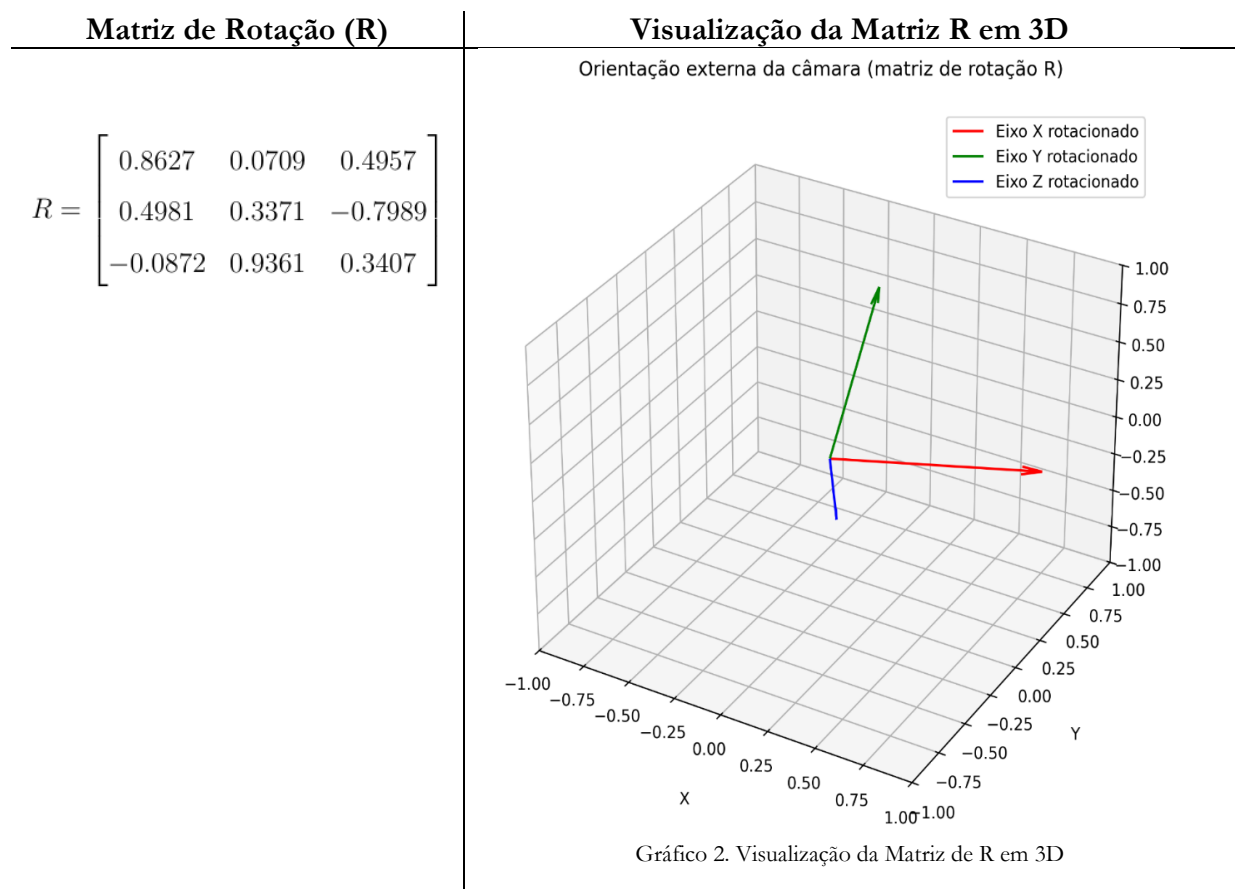
Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir da aplicação do método dos mínimos quadrados (MMQ) no ajustamento de observações voltado à calibração geométrica de câmaras na fotogrametria. Os dados processados foram analisados à luz dos objectivos propostos, permitindo avaliar a eficácia do modelo de ajustamento aplicado.

6.1. Parâmetros Extrínsecos da Câmara

Os parâmetros extrínsecos da câmara são fundamentais na fotogrametria, pois definem a posição e orientação da câmara no espaço em relação ao sistema de coordenadas do mundo real.

6.1.1. Matriz de Rotação

A matriz de rotação (R) é uma matriz 3×3 que altera a orientação da câmara sem mudar a posição da mesma. O resultado da determinação desta matriz bem como a ilustração em 3D é apresentado abaixo



A matriz de rotação R representa a orientação externa da câmara no espaço tridimensional e é composta por três vectores linha r_1 , r_2 e r_3 , que correspondem aos eixos rotacionados X' , Y' e Z' da câmara. Os vectores linha descrevem como os eixos do sistema de coordenadas da câmara estão orientados em relação ao sistema de coordenadas do mundo no momento da aquisição da imagem.

O vector r_1 , correspondente ao eixo X da câmara, aponta predominantemente para o leste e levemente para cima, sugerindo uma leve inclinação lateral da câmara. O vector r_2 , associado ao eixo Y da câmara, apresenta forte inclinação para frente e para baixo, o que é típico de sistemas aerofotogramétricos voltados para o solo. Por fim, o vector r_3 , que define o eixo óptico da câmara (eixo Z), está orientado para o norte e para cima, indicando que a câmara estava capturando imagens com uma leve inclinação vertical ascendente.

6.1.2. Matriz de Translação

A matriz de translação (TR) é uma matriz 3×1 usada em fotogrametria para representar o deslocamento (posição) de um objecto no espaço tridimensional, sem alterar sua forma ou orientação.

Matriz de Translação (TR)

Tabela 4. Matriz de Translação

Translação	$TR_X(m)$	$TR_Y(m)$	$TR_Z(m)$
TR_1	230650	3565500	12.6480
TR_2	230630	3564800	11.2655
TR_3	230280	3565000	23.6360
TR_4	230300	3565700	28.8160
TR_5	230200	3565600	29.8630
TR_6	230110	3565300	28.8370

Visualização da Matriz TR em 3D

Representação 3D Colorida dos Vetores de Translação da Câmara

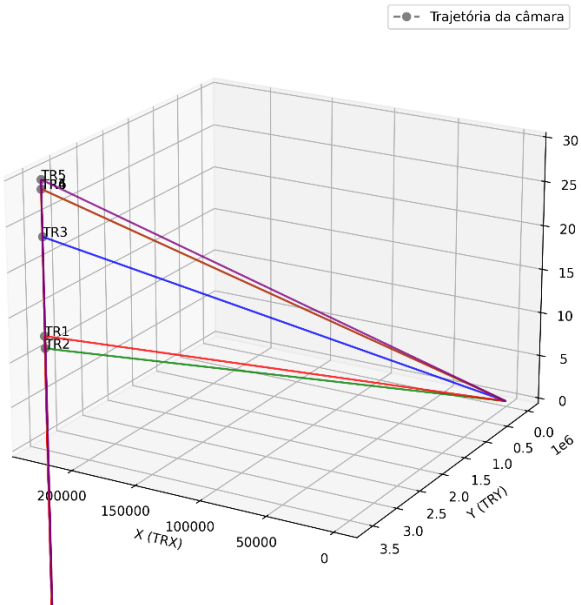


Gráfico 3. Visualização da Matriz de TR em 3D

Cada vector de translação TR (TR_X , TR_Y , TR_Z) indica a localização da câmara no momento da captura de uma imagem, sendo essencial para a correcta transformação de pontos do mundo real para o plano da imagem.

Para representar graficamente os parâmetros de translação obtidos nos pontos TR1 a TR6, foi desenvolvido o gráfico 3 tridimensional que ilustra a distribuição espacial desses vectores. Cada vector parte da origem e aponta para as coordenadas reais de posição da câmara naquele instante. Além disso, as cores distintas associadas a cada vector facilitam a diferenciação visual entre os pontos.

Observa-se que os vectores não apenas variam em altura (eixo Z), como também mostram uma trajectória espacial coerente ao longo dos eixos X e Y. A linha tracejada que conecta as extremidades dos vectores representa a trajectória estimada da câmara durante o voo fotogramétrico. A análise visual evidencia um padrão contínuo de deslocamento espacial.

Observa-se que TR2 está mais próximo da origem enquanto que TR4 está mais distante da origem.

6.2. Matriz de transformação perspectiva

A matriz M é uma matriz 3×4 que pressupõe a coincidência dos referenciais mundo e os da câmara. Vide os resultados abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0100 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & -0.0070 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Durante o processo de conversão do ponto $P_k(x, y, z)$, espaço contínuo, para o ponto $m_i(x, y)$, espaço discreto a princípio são determinados os P_k' (projecção do ponto 3D) e asseguir é feita a conversão. Vide as tabelas ilustradas abaixo:

Tabela 5. Projecção do ponto 3D

PK_n'	$X' (m)$	$Y' (m)$	$Z' (m)$
PK_1'	461308.895	7130963.940	25.296
PK_2'	461252.498	7129583.298	22.531
PK_3'	460550.034	7130090.832	47.272
PK_4'	460596.932	7131483.966	57.632
PK_5'	460395.294	7131113.010	59.726
PK_6'	460214.209	7130591.893	57.674

Tabela 6. Coordenadas discretas do plano 2D

x (pixel)	y (pixel)
119	1834
133	2059
63	981
52	805
50	777
52	804

Calibrar uma câmara, em relação a um referencial, significa determinar a matriz de transformação perspectiva T entre a câmara (plano imagem da câmara) e o referencial 3D associado a esta câmara.

Tabela 7. Matriz de transformação de Perspectiva

T_n	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
$T_{1 \times 1}$	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725
$T_{2 \times 1}$	0.0093	0.0093	0.0093	0.0093	0.0093	0.0093
$T_{3 \times 1}$	0.3966	0.3966	0.3966	0.3966	0.3966	0.3966
$T_{1 \times 2}$	230650	230630	230280	230300	230200	230110
$T_{2 \times 2}$	3565500	3564800	3565000	3565700	3565600	3565300
$T_{3 \times 2}$	12.6480	11.2655	23.6360	28.8160	29.8630	28.8370

Com base na tabela 7 acima, é possível concluir que:

- As componentes da coluna (1) permanecem constantes ao longo das matrizes $T_{n \times 1}$, o que sugere que esses parâmetros mantiveram estabilidade durante o processo;
- As componentes da coluna (2) mostram variações significativas, de destacar a matriz $T_{3 \times 2}$, vide o gráfico que ilustra asseguir:

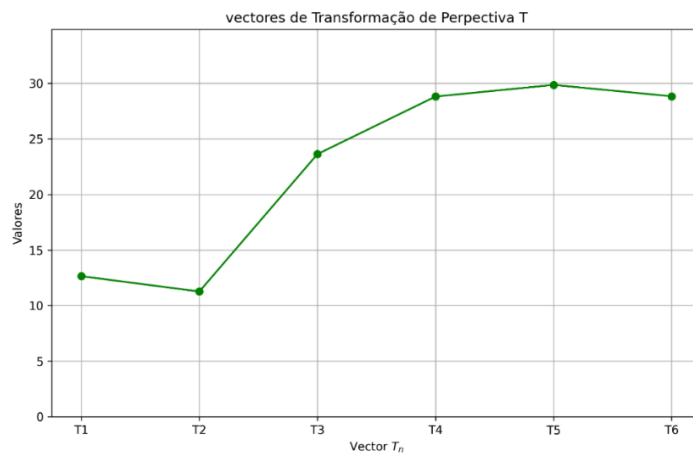


Gráfico 4. Representação da $T_{3 \times 2}$, em relação aos vetores de transformação de perspectiva T

O gráfico 4 acima mostra a evolução da componente da matriz $T_{3 \times 2}$ dos vectores T1 a T6:

- Há um crescimento acentuado de T2 para T3 e depois T4;
- O valor atinge o pico no T5 29.8630;
- Em T6 nota-se uma leve queda, mas o valor continua alto (28.8370).

6.3. Calibração geométrica de câmaras

Calibrar uma câmara, em relação a um referencial, significa determinar a matriz de transformação perspectiva existente entre a câmara, mais precisamente o plano imagem da câmara, e o referencial 3D associado a esta câmara. Considerando as coordenadas homogêneas da projecção de $P_K (X_K, Y_K, Z_K)$ como sendo o ponto $I_K^* (U_K, V_K, S_K)$, então, calibrar uma câmara consiste em determinar a matriz de transformação perspectiva que permita transformar o ponto P_K no ponto I_K^* (Polidório et al., 1998).

$$I_{K_n}^* = [U_{K_n} \quad V_{K_n} \quad S_{K_n}]^T$$

$$P_{K_n} = P_n^T$$

U_{K_n} , V_{K_n} e S_{K_n} de dimensão 3×1 , são os parâmetros necessários para compor a matriz das coordenadas homogêneas antes da conversão para o plano Imagem ($I_{K_n}^*$). Ao todo teremos 9 parâmetros para cada $n = 1, 2, \dots, 6$ como é ilustrado na tabela abaixo:

Tabela 8. Coordenadas do plano da Imagem

n	U_{K_n}	V_{K_n}	S_{K_n}
1	448610	3569800	182950
	3599800	3632100	2827900
	230670	3665500	22.6794
2	448560	3569100	182930
	3599200	3631400	2827300
	230640	3564800	20.2004
3	447870	3569300	182660
	3599100	3631700	2827500
	230300	3565000	42.3822
4	447918	3570000	182680
	3599739	3632400	2828100
	230326	3565700	51.6705
5	447720	3569900	182600
	3599500	3632200	2827900
	230230	3565600	53.5479
6	447550	3569600	182530
	3599100	3631900	2827700
	230130	3565300	51.7082

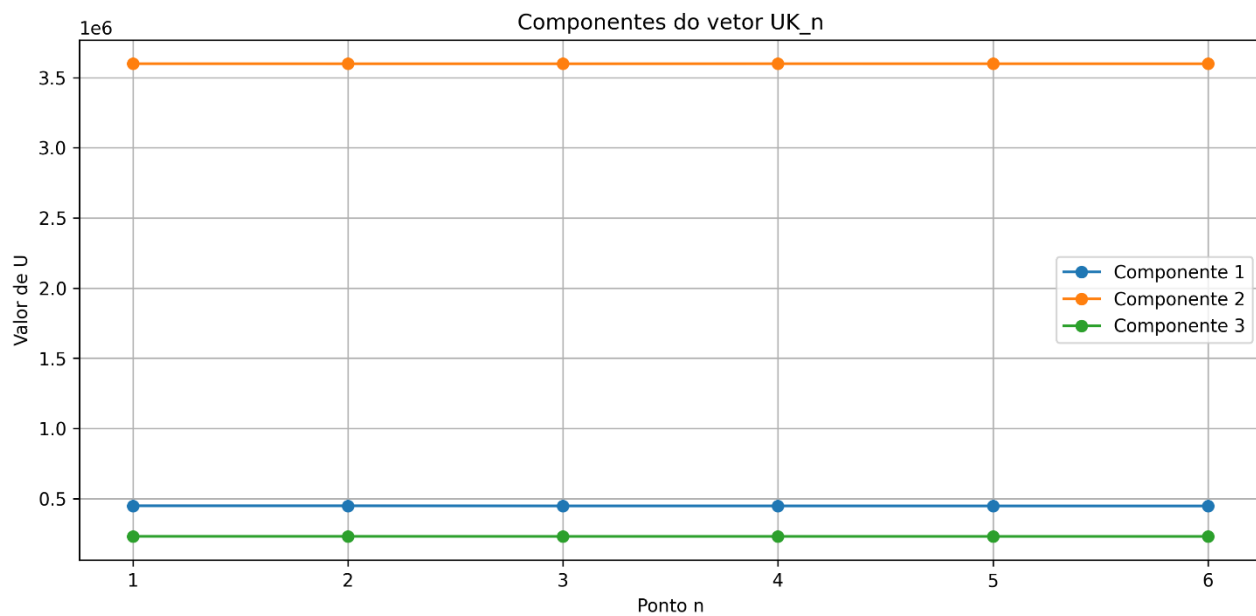


Gráfico 5. Variação do vector UK_n

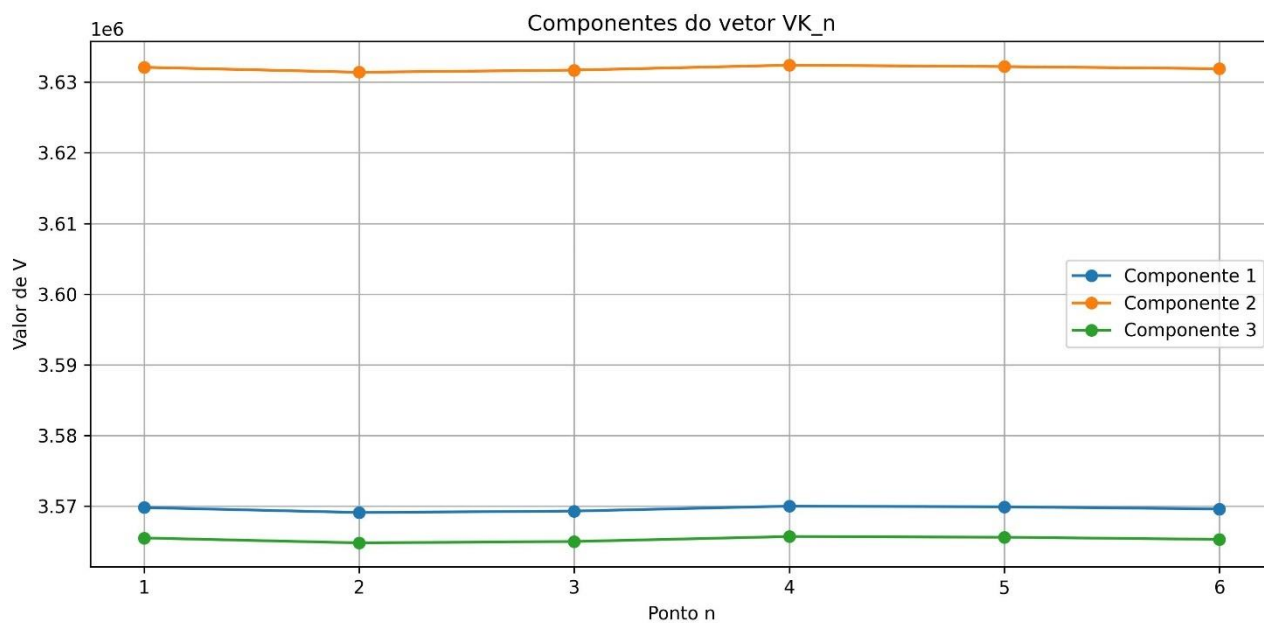


Gráfico 6. Variação do vector VK_n

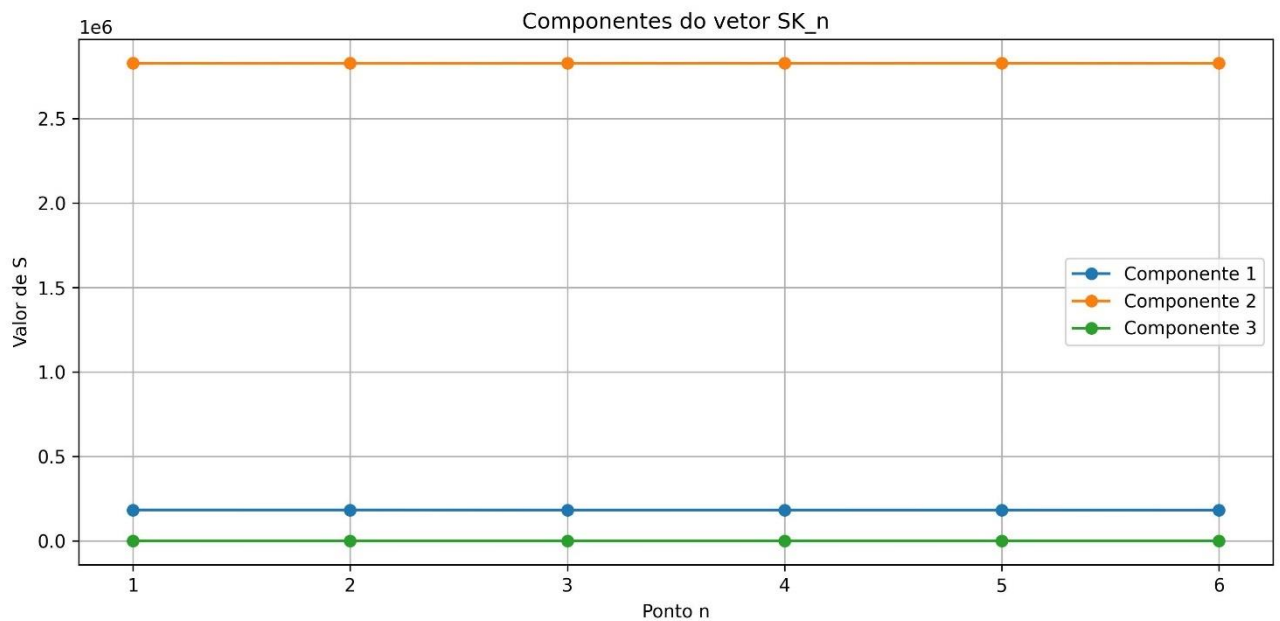


Gráfico 7. Variação do vector SK_n

Cada vector é formado por três componentes:

- Componente 1 $\rightarrow$ eixo X;
- Componente 2 $\rightarrow$ eixo Y;
- Componente 3 $\rightarrow$ eixo Z.

Os gráficos foram construídos para visualizar o comportamento de cada componente ao longo dos pontos n , permitindo observar padrões, variações e possíveis anomalias no modelo de transformação.

- Gráfico 5 do vector UK_n – O gráfico mostra um vector de projecção no plano imagem ao longo da direcção da linha da imagem (horizontal), grandes variações podem indicar inclinação da câmara ou distorções:

Componente X (linha 1): Tendência geral decrescente, de 448610(UK_1) par a 447550 (UK_6), embora Haja uma leve oscilação entre UK_3 e UK_4 , onde UK_4 apresenta um pequeno aumento.

Componente Y (linha 2): Mantém-se em torno de 3.599 milhões, com pequenas variações. A estabilidade desta componente indica consistência no posicionamento vertical relativo dos pontos no sistema da câmara. UK_1 apresenta um pico (3599800).

Componente Z (linha 3): Apresenta uma queda acentuada e contínua, passando de 230670 (UK_1) para 230130 (UK_6).

Observa-se um padrão geométrico consistente com os princípios da calibração fotogramétrica. A componente U_X decresce ligeiramente, apontando para um deslocamento da imagem projectada no eixo horizontal da câmara, possivelmente devido ao ângulo de aquisição. A componente U_Y , bastante estável, sugere que a orientação vertical da câmara manteve-se praticamente constante ao longo da série de pontos. Já a componente U_Z , que decresce de forma significativa, pode indicar um afastamento sistemático dos pontos em relação ao plano da imagem. Essa distribuição reforça a validade do modelo de transformação de perspectiva utilizado.

- Gráfico 6 do vector $VK_n \rightarrow$ Está relacionado à direção vertical da imagem (eixo Y no plano imagem)

Componente X (linha 1): Varia suavemente, mantendo-se na faixa de 3.569 – 3.570 milhões.

Componente Y (linha 2): Valores em torno de 3632000, muito consistentes entre os pontos. Isso mostra uniformidade vertical na projecção, o que sugere bom alinhamento do sensor da câmara no momento da aquisição.

Componente Z (linha 3): Varia de 3564800 a 3565700, também com variação mínima. Reforça a coerência geométrica e a estabilidade do referencial da câmara.

Os vectores VK_n mostram estabilidade e consistência entre os pontos. As três componentes dos vectores apresentam variações mínimas, revelando um sistema bem alinhado e um modelo de calibração preciso. Esta estabilidade fortalece a confiança nos resultados de calibração geométrica aplicados, sugerindo uma orientação bem controlada da câmara durante a captura dos pontos.

- Gráfico 7 do vector $SK_n \rightarrow$ é o vector de escala da projecção em coordenadas homogêneas. Ele relaciona os vectores do espaço 3D com as coordenadas no plano imagem da câmara, ou seja, Variações de distância câmara – ponto.

Componente X (linha 1): Queda leve e contínua de 182950 (SK_1) até 182530 (SK_6). Isso sugere um pequeno deslocamento na direção da profundidade.

Componente Y (linha 2): Valores próximos de 2.8 milhões, com pequenas variações. Indica homogeneidade na escala espacial.

Componente Z (linha 3): apresenta grande variação, saltando de 22.68 até mais de 53, evidenciando uma alteração significativa na componente de altitude ou profundidade.

O vector SK_n mostra comportamento estável nos eixos X e Y, mas a componente Z apresenta maior variação, refletindo a profundidade relativa de cada ponto em relação ao plano imagem. Essa variação é esperada em aplicações fotogramétricas, onde os pontos estão distribuídos em diferentes planos no espaço tridimensional. A análise confirma a fidelidade geométrica do modelo de calibração e reforça a importância do uso da coordenada homogênea na reconstrução da cena.

Tabela 9. Coordenadas homogêneas antes da conversão para o plano Imagem

IK_n^*	IK_1^*			IK_2^*			IK_3^*		
UK_n	448610	3599800	230670	448560	3599200	230640	447870	3599100	230300
VK_n	3569800	3632100	3565500	3569100	3631400	3564800	3569300	3631700	3565000
SK_n	182950	2827900	22.6794	182930	2827300	20.2004	182660	2827500	42.3822

IK_4^*			IK_5^*			IK_6^*		
447918	3599739	230326	447720	3599500	230230	447550	3599100	230130
3570045	3632360	3565743	3569900	3632200	3565600	3569600	3631900	3565300
182683	2828090	51.6705	182600	2827900	53.5479	182530	2827700	51.7082

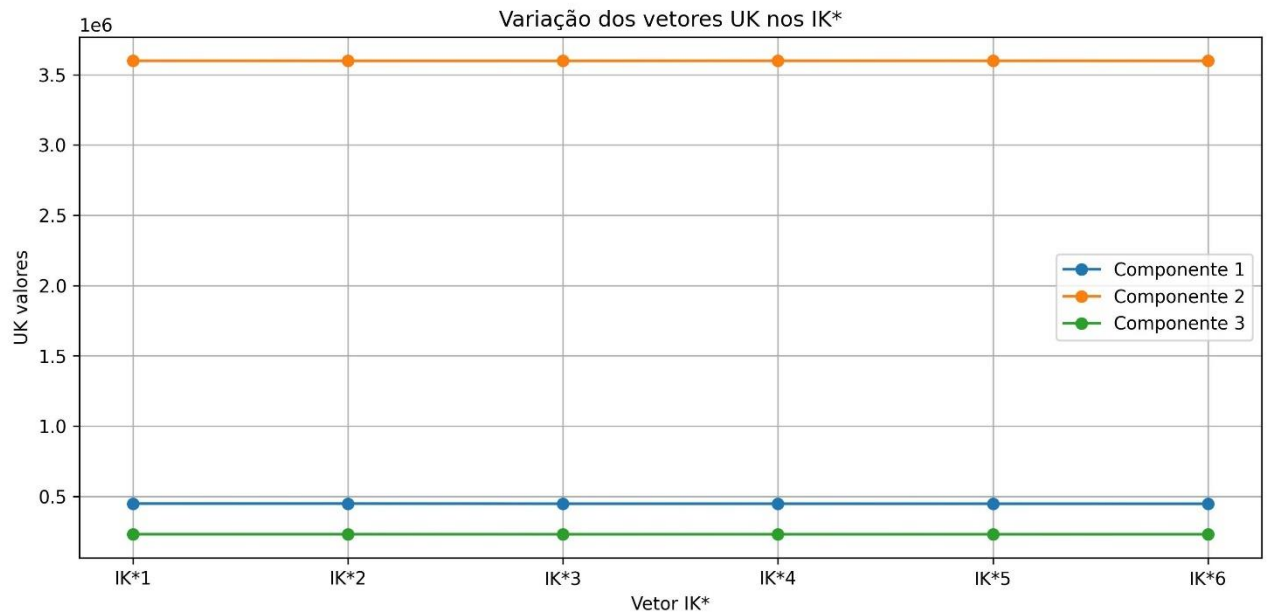


Gráfico 8. Variação dos vetores UK_n nos IK_n^*

UK_n (Componente X dos vectores homogêneos):

O vector UK mostra uma tendência de redução nas componentes X, Y e Z ao longo dos pontos, o que pode indicar um movimento ao longo do trajecto dos pontos medidos.

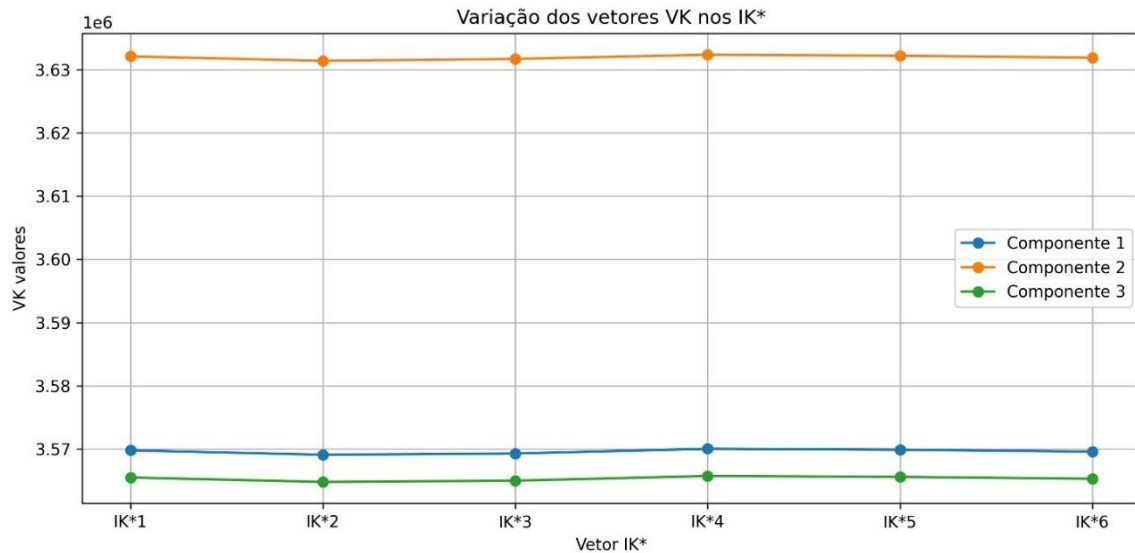


Gráfico 9. Variação dos vectores VK_n nos IK^*_n

VK_n (Componente Y): Mostra variações pequenas e constantes, indicando que as coordenadas medidas são consistentes e possuem um deslocamento regular, podendo refletir a posição ou orientação da câmara em relação ao referencial. A estabilidade das curvas mostra que há pequena variação entre pontos consecutivos.

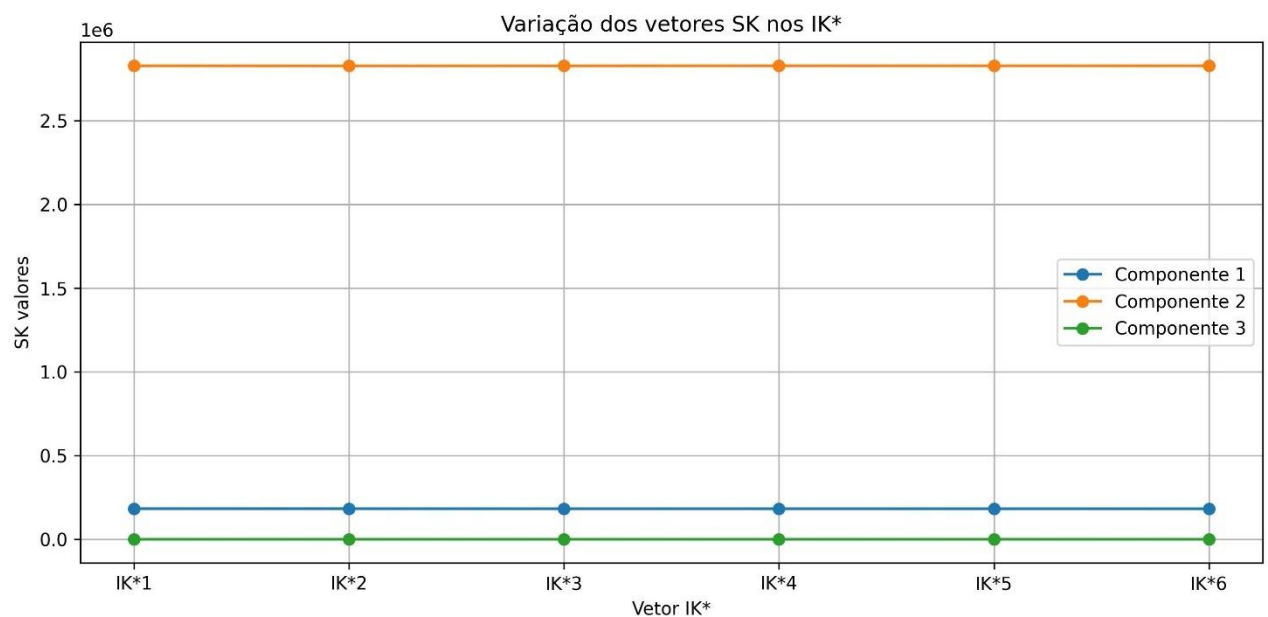


Gráfico 10. Variação dos vectores SK_n nos IK^*_n

SK_n (Componente Z): Apresenta uma variação maior e menos uniforme. Isso pode indicar que o vector SK tem uma componente vertical mais sensível a mudanças ou ruídos na medição. A terceira componente tem maior variação, o que pode indicar diferenças na elevação ou profundidade relativa dos pontos no espaço 3D.

Uma vez que $S_K \neq 0$, as coordenadas normalizadas no plano imagem IK (em pixels) com dimensão 6×3 são dados pela equação:

$$IK_n = \begin{bmatrix} uk_n \\ vk_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{UK_n}{VK_n} \\ \frac{VK_n}{SK_n} \end{bmatrix}$$

Tabela 10. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK_1

IK_1 (pixel)		
0.01022042393888	0.15797814557934	0.00000126697831
0.08201311537243	1.26768517208274	0.00001016678361
0.00525512822211	0.08122905823432	0.00000065145375
0.08132831877898	1.25710020060020	0.00001008189257
0.08274775777249	1.27904061533236	0.00001025785380
0.08123014814052	1.25558276692947	0.00001006972281

Tabela 11. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK_2

IK_2 (pixel)		
0.01022180935655	0.15798940895818	0.00000112878977
0.08201875608088	1.26769090918322	0.00000905729403
0.00525581099075	0.08123439237231	0.00000058039682
0.08133354765977	1.25710025251097	0.00000898162677
0.08275307078616	1.27904055798110	0.00000913838407
0.08123536312899	1.25558270161109	0.00000897078430

Tabela 12. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK_3

IK_3 (pixel)		
0.01018998721886	0.15773892855633	0.00000236436576
0.08188557491812	1.26757203658722	0.00001899977353
0.00523971376321	0.08110970280919	0.00000121576206
0.08120961591670	1.25710832879818	0.00001884293189
0.08262713503753	1.27905123633334	0.00001917183649
0.08111174228874	1.25559326495399	0.00001882022243

Tabela 13. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK_4

IK_4 (pixel)		
0.01018834127619	0.15772398813965	0.00000288169221
0.08187950919914	1.26756283360683	0.00002315897525
0.00523897812951	0.08110373435306	0.00000148180376
0.08120407636338	1.25710657211256	0.00002296793439
0.08262150809923	1.27904959308462	0.00002336884380
0.08110622073347	1.25559168565621	0.00002294025669

Tabela 14. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK_5

IK_5 (pixel)		
0.01018056625293	0.15766358453720	0.00000298540603
0.08184657822408	1.26753508442657	0.00002400114712
0.00523500276164	0.08107302481585	0.00000153514141
0.08117338256690	1.25710949141251	0.00002380373547
0.08259031693543	1.27905315800684	0.00002421924521
0.08107560206134	1.25559519204815	0.00002377506177

Tabela 15. Coordenadas normalizadas no plano imagem IK_6

IK_6 (pixel)		
0.01017402392656	0.15761356947675	0.00000288213390
0.08181851159030	1.26751300705656	0.00002317784071
0.00523161692191	0.08104697051516	0.00000148203116
0.08114717771039	1.25711286155976	0.00002298766284
0.08256368651413	1.27905708052017	0.00002338893653
0.08104945961285	1.25559903593216	0.00002295998091

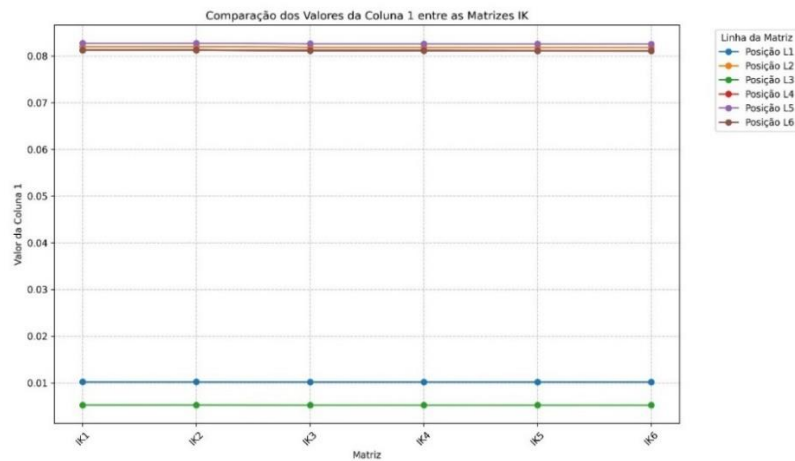


Gráfico 11. Comparação dos Valores da Coluna 1 entre as Matrizes IK_n

O gráfico 11 representa os valores da primeira coluna das matrizes homogêneas IK_1 a IK_6 , correspondendo às coordenadas normalizadas x dos pontos no plano da imagem.

- Observa-se uma estabilidade significativa dos valores ao longo das seis matrizes, o que evidencia consistência na calibração e no processo de ajuste por mínimos quadrados.
- Pequenas variações entre os pontos L1 a L6 são esperadas devido às flutuações numéricas associadas ao ajuste geométrico.

Nenhum ponto apresenta discrepância abrupta, reforçando que os vectores de translação e rotação foram correctamente aplicados na geração das coordenadas.

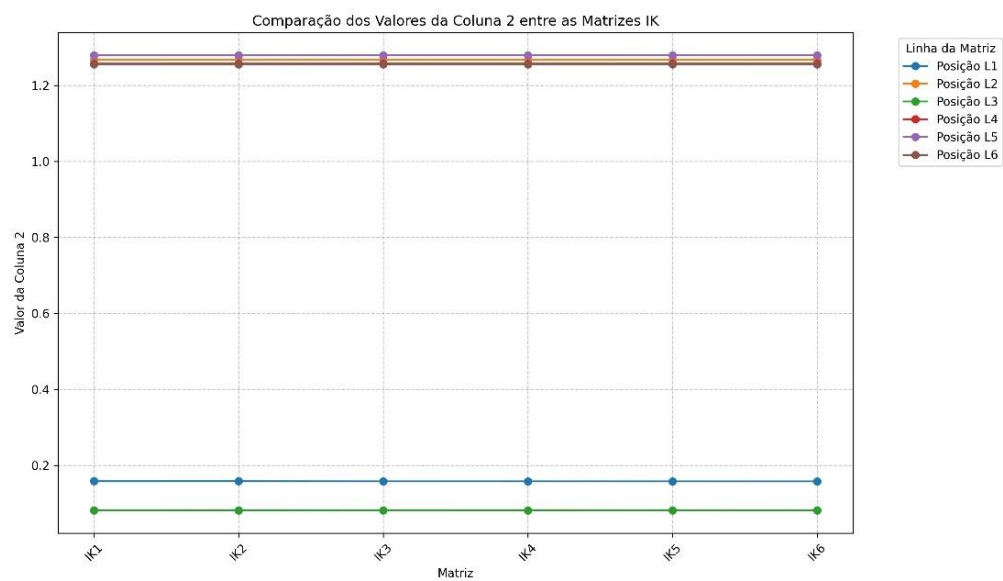


Gráfico 12. Comparação dos Valores da Coluna 2 entre as Matrizes IK_n

O gráfico 12 ilustra os valores da segunda coluna das matrizes homogêneas, correspondentes às coordenadas normalizadas y.

O comportamento dos pontos segue uma tendência uniforme, sem saltos numéricos ou distorções relevantes.

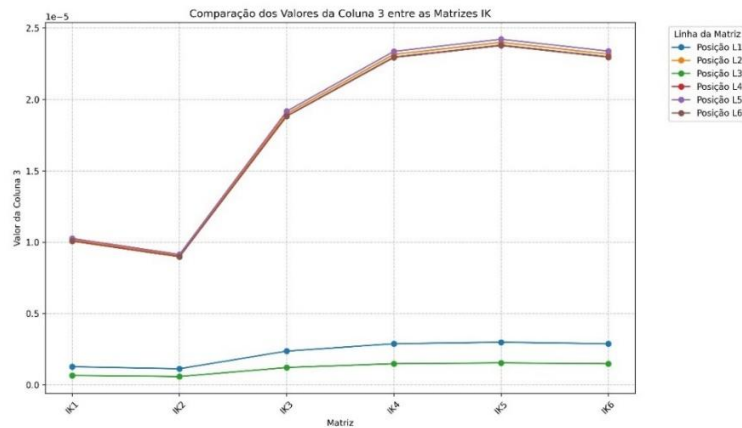


Gráfico 13. Comparação dos Valores da Coluna 3 entre as Matrizes IK_n

O gráfico 13 representa a terceira coluna, que corresponde ao valor do factor de escala homogêneo (w), essencial para a conversão de coordenadas para o plano da imagem.

- Os valores de w são muito pequenos (em torno de 10^{-6} a 10^{-5}), como esperado, uma vez que são usados como normalizadores das coordenadas homogêneas.
- Notam-se pequenas variações entre os pontos e entre as matrizes, porém todas dentro de uma faixa estável, o que demonstra que não há distorções significativas ou erros sistemáticos no ajuste.

De modo geral a comparação dos três componentes das coordenadas homogêneas evidencia um comportamento coerente, regular e confiável do processo fotogramétrico adoptado. As diferenças mínimas entre as matrizes IK_1 a IK_6 confirmam a eficiência do modelo de orientação externa aplicado, além da qualidade das correções geométricas executadas durante a calibração da câmara e a geração das coordenadas.

4.4. Teste de Qualidade

Com base nos resultados calculados e nas afirmações metodológicas que guiaram nosso processo, podemos tirar as seguintes conclusões sobre a qualidade do sistema e da metodologia empregada:

Tabela 16. Dados e resultados produzidos no experimento

P_K			I_K		P_{IK}		
X_K	Y_K	Z_K	u_k	v_k	X_{IK}	Y_{IK}	Z_{IK}
461309.148	7130964.117	25.296	119	1834	461308.895	7130963.940	25.296
461252.723	7129583.456	22.531	133	2059	461252.498	7129583.298	22.531
460550.507	7130091.163	47.272	63	981	460550.034	7130090.832	47.272
460597.508	7131484.369	57.632	52	805	460596.932	7131483.966	57.632
460395.891	7131113.428	59.726	50	777	460395.294	7131113.010	59.726
460214.786	7130592.297	57.674	52	804	460214.209	7130591.893	57.674

Tabela 17. Cálculo de desvio relativo

d_{KW}	d_{IKW}	d_r	$dr_{\%}$
7145869.812	7145869.619	0.193	2.7×10^{-6}
7144488.388	7144488.216	0.172	2.41×10^{-6}
7144949.738	7144949.378	0.361	5.05×10^{-6}
7146343.077	7146342.638	0.439	6.14×10^{-6}
7145959.915	7145959.459	0.456	6.38×10^{-6}
7145428.200	7145427.759	0.440	6.16×10^{-6}

1- Método de estatística dos resíduos

$$\sigma^2 = \frac{\sum dr^2}{n-u} = \frac{(0.0372+0.0296+0.1303+0.1927+0.2079+0.1936)}{6-3} = \frac{0.7913}{3} = 0.2638$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.2638} = 0.5136$$

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum d_r = \frac{0.193 + 0.172 + 0.361 + 0.439 + 0.456 + 0.440}{6} = \frac{2.061}{6} = 0.3435$$

Uma vez que $\sigma < 1$ e $\bar{r} < 1$ tem-se que:

Um desvio padrão baixo significa que os resíduos estão agrupados de forma consistente, indicando um bom ajuste;

O erro médio dos resíduos é relativamente pequeno, assim sendo o resultado é estatisticamente aceitável, reforçando a robustez da calibração pelo Método dos Mínimos Quadrados.

De modo geral, os valores são pequenos, indicando boa qualidade do ajustamento, com baixa dispersão.

2- Teste de Qui-Quadrado

H_0 : os resíduos seguem uma distribuição esperada.

H_1 : os resíduos não seguem distribuição esperada.

Tabela 18. Teste do qui-quadrado aplicado aos resíduos da calibração

Classe	Intervalo	Observado (O)	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
1	[0.15 – 0.25]	2	0.167
2	[0.25 – 0.35]	0	1.500
3	[0.35 – 0.45]	3	1.500
4	[0.45 – 0.55]	1	0.167
Total		6	3.334

$$E = \frac{n}{k} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Decisão

$$G1 = k - 1 = 4 - 1 = 3$$

Valor crítico para $\alpha = 5$

$$\chi^2_{0.05,3} = 7.815$$

Comparação:

$$\chi^2_{\text{calc}} < \chi^2_{\text{tabelado}} = 3.334 < 7.815$$

Aceitamos a $H_0 \rightarrow$ os resíduos podem ser considerados consistentes com a distribuição esperada $\rightarrow$ bom ajuste.

Conclusões e Recomendações

5.1. Conclusões

A calibração geométrica da câmara fotogramétrica, realizada por meio do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), evidenciou consistência dos parâmetros obtidos e confiabilidade dos produtos fotogramétricos, conforme demonstrado pela análise estatística dos resíduos e pelo teste do qui-quadrado. A determinação dos parâmetros intrínsecos da câmara bem como a construção da matriz de transformação perspectiva demonstrou o alinhamento eficaz entre os pontos do espaço tridimensional e suas respectivas projecções no plano da imagem. A avaliação da precisão global do ajustamento, por meio da estatística dos resíduos, evidenciou um desvio padrão baixo ($\sigma = 0.5136$) e um erro médio dos resíduos relativamente pequeno ($\bar{r} = 0.3435$), indicando boa dispersão e robustez do modelo ajustado. Adicionalmente, o teste do qui-quadrado demonstrou que os resíduos seguem a distribuição esperada ($\chi^2_{\text{calc}} = 3.334 < \chi^2_{\text{tabelado}} = 7.815$), confirmando a consistência do ajustamento e a qualidade do modelo aplicado. Esses resultados comprovam que a aplicação do MMQ constitui uma ferramenta confiável para a calibração geométrica de câmaras fotogramétricas, permitindo produzir produtos fotogramétricos precisos, com baixo erro sistemático, e oferecendo uma base sólida para futuras aplicações em mapeamentos topográficos e modelagem 3D.

5.2. Limitações

Apesar de ter conseguido efectuar a calibração geométrica, existem algumas limitações importantes que devem ser consideradas:

- Dificuldade na determinação dos factores de escala K_u e K_v ;
- Dificuldades na determinação dos ângulos ω , φ e κ .

5.3. Recomendações

- A repetição do processo com diferentes posições da câmara pode melhorar a robustez dos parâmetros estimados.
- Sugere-se o uso de *softwares* específicos de ajuste fotogramétrico para comparação e validação dos resultados.
- Em estudos futuros, incorporar o modelo de distorção radial e tangencial pode aumentar ainda mais a precisão dos resultados
- Maior distribuição dos pontos de controle pode melhorar a confiabilidade dos resultados.

Referências Bibliográficas

- Airton Marco Polidório, F. B. (1998). Calibração geométrica de câmaras, aplicando o método dos mínimos quadrados. *Acta Scientiarum. Technology*, 20(4), 495–503.
- Amorim, G. P. (2005). *Módulo 7: Ajustamento de Observações*. Espírito Santo: CEFETES - Coordenadoria de Geomática.
- Azevedo, T. C., Tavares, J. M., & Vaz, M. A. (2008). ANÁLISE DO MÉTODO DE CALIBRAÇÃO DE CÂMARAS PROPOSTO POR ZHANG. *5º Congresso Luso-Moçambicano de Engenharia e 2º Congresso de Engenharia de Moçambique* (p. 12). Maputo: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Catarina. (2009). *CAPÍTULO 2 - AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES*.
- Fontes, L. C. (2005). *Noções de aerofotogrametria aplicada à topografia*. Salvador: Universidade Federal da Bahia.
- Gonçalves, G. (2024). *Fotogrametria digital: Textos de apoio*. Coimbra: Universidade de Coimbra, Departamento de Matemática.
- Lourenço, J. d. (2017). *Etapas e metodologias de produção de ortofotomapas digitais*. Lisboa: Universidade de Lisboa, Instituto de Geografia e Ordenamento do Território.
- Menezes, L. V. (2017). *Confiabilidade de observações geodésicas em redes tridimensionais GPS*. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Moura, J. D. (1981). *Aplicação do ajustamento livre à Fotogrametria*. Paraná.
- Pernambuco, U. C. (2018). *Fotogrametria (Apostila da disciplina Topografia 2, Laboratório de Topografia)*. Recife: Universidade Católica de Pernambuco.
- Rosalen, D. L. (1997). *Estudo do processo de captação de imagens aplicado à Fotogrametria Digital*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos.
- Santana, R. M. (2006). *Mapeamento de geounidades do meio físico e biótico em área da Antártica Marítima*. Minas Gerais: Universidade Federal de Viçosa, UFV.
- Santos, G. D. (2013). *Ajustamento de Observações aplicado na Fotogrametria*. Paraná.
- Santos, W. G. (2008). *Integração de sistemas de referência locais ao SIRGAS-2000 utilizando o Método de colocação por Mínimos Quadrados*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Schenk, T. (2005). *Introduction to Photogrammetry*. Columbus, OH: The Ohio State University.

- Silva, A. M. (2014). *A representação das matrizes de rotações com o uso dos quatérnions: Aplicações à fotogrametria*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Temba, P. (2000). *Fundamentos da Fotogrametria*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais.
- Tommaselli, A. M. (2009). *Fotogrametria Básica - Introdução*. São Paulo: Universidade Estadual Paulista.
- Vettorazzi, C. A. (2016). *Fotogrametria: Fundamentos e processos (LEB 450 – Topografia e Geoprocessamento II)*. São Paulo: Universidade de São Paulo.
- Wolf, P. R., Dewitt, B. A., & Wilkinson, B. E. (2014). *Elements of Photogrammetry with Applications in GIS* (Vol. Fourth Edition). New York: McGraw-Hill Education.

Anexos

Anexo 1: Autorização para Colecta e Validação de Dados no CENACARTA



Faculdade de Ciências

A
CENACARTA

CREDENCIAL

No âmbito da elaboração do Trabalho final do Curso de Licenciatura em Ciências de Informação Geográfica, lecionado na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane, credencia o estudante **Enoque Zacarias Machava Júnior**, para efectuar recolha de dados, para preparação de trabalho do fim do curso.

Antecipadamente agradecemos o vosso apoio e colaboração.
Cordiais Saudações.

Maputo, 08 de Julho de 2025

UNIVERSIDADE
EDUARDO
MONDLANE

Profa. Doutora David Liace, Jamal

SECRETARIA DA
FACULDADE DE CIÊNCIAS FI

Profa. Doutora David Liace

Av. Julius Nyerere, nº 3453, Campus Principal, C. Postal 257, Tel.: (+258) 21 493377, Fax.: (+258) 21 493377,
Maputo – Moçambique

Anexo 1. Credencial para colecta e validação de dados no CENACARTA

Anexo 2: Certificado de calibração

RC30_13352_DTM.cam
CAMEDIT Camera Data Base Rel. 2.00
Name of this File: C:\ORINA\Cameras\RC30_13352_DTM.cam
This file has been updated : Fri Jul 28 13:13:37 2000
Number of cameras in this file = 1
Please avoid manual editing of this file!
**** Start of Camera Block ****
Camera Number = 1
Camera ID = RC30_13352_DTM
Camera Type = RC30
Camera Serial No. = 15/4 UAG-S
Lens Serial No. =
Lens Mounted = Fix
Calibration Date = 03.02.1999
Calibrated Focal Length:
CFI [mm]: 153.692 +/-: 0.000
Principal Point of Autokollimation:
X [mm]: -0.010 +/-: 0.000
Y [mm]: -0.007 +/-: 0.000
Distortion Interval [mm]: 10.00
Distortion Format = 0
Radial Symmetric Distortion Parameters [microns]
0.1 -0.2 -0.6 -0.9 -0.7 -0.5 -0.3 -0.1
0.0 0.7 0.8 1.1 0.7 0.5 -0.6 -1.4
Total Number of Fiducials: 8
Fiducial Coordinates:
ID X [mm] Y [mm]
1 -106.0000 105.9980
2 106.0010 106.0010
3 106.0000 -105.9980
4 -106.0000 -106.0000
5 0.0020 111.9940
6 112.0020 -0.0010
7 0.0000 -111.9940
8 -111.9980 0.0000
Page 1

RC30 15/4 UAG-S No. 13352 03.02.1999
Aperture: 4.0
Filter on gonioscopes: VIS (400 - 700 NM)
Filter on camera: 153.692 mm
C.F.L.:
Radial distortion (micrometers) referred to principal point of symmetry (PPS)
(Positive values denote image displacement away from center)
Radius mm Half - Slides Mean
1 2 3 4
10 -0.2 -0.4 -0.4 0.1 -0.2
20 -0.5 -1.0 -1.0 -0.1 -0.6
30 -1.0 -1.2 -0.5 -0.9 -0.7
40 -0.7 -0.9 -0.6 -0.1 -0.5
50 -0.6 -1.0 -0.4 0.0 -0.3
60 -1.1 -0.8 0.0 0.4 -0.1
70 -0.5 -0.3 0.4 0.9 0.1
80 0.8 0.3 0.8 1.1 0.6
90 0.6 -0.1 1.7 0.9 0.6
100 0.8 0.3 1.9 1.7 1.1
110 0.6 0.2 0.9 0.8 0.7
120 0.5 0.2 1.2 0.3 0.5
130 0.4 0.2 1.2 -0.2 -0.6
140 -1.3 -0.3 -0.5 -1.1 -1.4
150
160
Photographic resolution (line pairs per millimeter)
International 3-line test-chart, contrast (log): 2.0
Aperture: 4.0
Filter: 450 NM
Film: KODAK PANATOMIC X 2412
Developer: KODAK HC110
Angle (deg) 0 5 10 15 20 25 30 35 40 45
Radial: 147 147 145 142 139 119 108 108 90 74
Tangential: 147 146 127 123 116 108 111 99 77 62
AWAR (Area weighted average resolution) in lp/mm: 111

Anexo 2. Certificado de Calibração

Anexo 3: Aplicação do MMQ

$$B_n = \begin{bmatrix} UK_n \\ VK_n \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} UK_1 \\ VK_1 \end{bmatrix} \rightarrow B_1 = \begin{bmatrix} 448610 \\ 3599800 \\ 230670 \\ 3569800 \\ 3632100 \\ 3565500 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} UK_2 \\ VK_2 \end{bmatrix} \rightarrow B_2 = \begin{bmatrix} 448560 \\ 3599200 \\ 230640 \\ 3569100 \\ 3631400 \\ 3564800 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} UK_3 \\ VK_3 \end{bmatrix} \rightarrow B_3 = \begin{bmatrix} 447870 \\ 3599100 \\ 230300 \\ 3569300 \\ 3631700 \\ 3565000 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} UK_4 \\ VK_4 \end{bmatrix} \rightarrow B_4 = \begin{bmatrix} 447918 \\ 3599739 \\ 230326 \\ 3570000 \\ 3632400 \\ 3565700 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} UK_5 \\ VK_5 \end{bmatrix} \rightarrow B_5 = \begin{bmatrix} 447720 \\ 3599500 \\ 230230 \\ 3569900 \\ 3632200 \\ 3565600 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} UK_6 \\ VK_6 \end{bmatrix} \rightarrow B_6 = \begin{bmatrix} 447550 \\ 3599100 \\ 230130 \\ 3569600 \\ 3631900 \\ 3565300 \end{bmatrix}$$

De seguida, iremos determinar os parâmetros necessários para compor o vector das incógnitas X:

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad C_1 \quad C_2]^T$$

$$X_1 = \frac{U_0}{TRZ} r_3 + \frac{K_u}{TRZ} r_1$$

$$x_1 = \frac{U_0}{TRZ_1} r_3 + \frac{K_u}{TRZ_1} r_1 \rightarrow x_1 = [0.0683 \quad 0.0049 \quad 0.0389]$$

$$x_2 = \frac{U_0}{TRZ_2} r_3 + \frac{K_u}{TRZ_2} r_1 \rightarrow x_2 = [0.0767 \quad 0.0055 \quad 0.0437]$$

$$x_3 = \frac{U_0}{TRZ_3} r_3 + \frac{K_u}{TRZ_3} r_1 \rightarrow x_3 = [0.0365 \quad 0.0026 \quad 0.0208]$$

$$x_4 = \frac{U_0}{TRZ_4} r_3 + \frac{K_u}{TRZ_4} r_1 \rightarrow x_4 = [0.0300 \quad 0.0021 \quad 0.0171]$$

$$x_5 = \frac{U_0}{TRZ_5} r_3 + \frac{K_u}{TRZ_5} r_1 \rightarrow x_5 = [0.0289 \quad 0.0021 \quad 0.0165]$$

$$x_6 = \frac{U_0}{TRZ_6} r_3 + \frac{K_u}{TRZ_6} r_1 \rightarrow x_6 = [0.0299 \quad 0.0021 \quad 0.0171]$$

$$X_2 = \frac{1}{TRZ} r_3$$

$$x_{11} = \frac{1}{TRZ_1} r_3 \rightarrow x_{11} = [-0.0069 \quad 0.0740 \quad 0.0269]$$

$$x_{22} = \frac{1}{TRZ_2} r_3 \rightarrow x_{22} = [-0.0077 \quad 0.0831 \quad 0.0302]$$

$$x_{33} = \frac{1}{TRZ_3} r_3 \rightarrow x_{33} = [-0.0037 \quad 0.0396 \quad 0.0144]$$

$$x_{44} = \frac{1}{TRZ_4} r_3 \rightarrow x_{44} = [-0.0030 \quad 0.0325 \quad 0.0118]$$

$$x_{55} = \frac{1}{TRZ_5} r_3 \rightarrow x_{55} = [-0.0029 \quad 0.0313 \quad 0.0114]$$

$$x_{66} = \frac{1}{TRZ_6} r_3 \rightarrow x_{66} = [-0.0030 \quad 0.0325 \quad 0.0118]$$

$$X_3 = \frac{V_0}{TRZ} r_3 + \frac{K_v}{TRZ} r_2$$

$$x_{111} = \frac{V_0}{TRZ_1} r_3 + \frac{K_v}{TRZ_1} r_2 \rightarrow x_{111} = [0.0394 \quad 0.0261 \quad -0.0634]$$

$$x_{222} = \frac{V_0}{TRZ_2} r_3 + \frac{K_v}{TRZ_2} r_2 \rightarrow x_{222} = [0.0443 \quad 0.0293 \quad -0.0711]$$

$$x_{333} = \frac{V_0}{TRZ_3} r_3 + \frac{K_v}{TRZ_3} r_2 \rightarrow x_{333} = [0.0211 \quad 0.0140 \quad -0.0339]$$

$$x_{444} = \frac{V_0}{TRZ_4} r_3 + \frac{K_v}{TRZ_4} r_2 \rightarrow x_{444} = [0.0173 \quad 0.0115 \quad -0.0278]$$

$$x_{555} = \frac{V_0}{TRZ_5} r_3 + \frac{K_v}{TRZ_5} r_2 \rightarrow x_{555} = [0.0167 \quad 0.0111 \quad -0.0278]$$

$$x_{666} = \frac{V_0}{TRZ_6} r_3 + \frac{K_v}{TRZ_6} r_2 \rightarrow x_{666} = [0.0173 \quad 0.0115 \quad -0.0278]$$

$$C_1 = U_0 + \frac{K_u}{TRZ} TRX$$

$$c_1 = U_0 + \frac{K_u}{TRZ_1} TRX_1 \rightarrow c_1 = 18236$$

$$c_2 = U_0 + \frac{K_u}{TRZ_2} TRX_2 \rightarrow c_2 = 20472$$

$$c_3 = U_0 + \frac{K_u}{TRZ_3} TRX_3 \rightarrow c_3 = 9742.5547$$

$$c_4 = U_0 + \frac{K_u}{TRZ_4} TRX_4 \rightarrow c_4 = 7992.0347$$

$$c_5 = U_0 + \frac{K_u}{TRZ_5} TRX_5 \rightarrow c_5 = 7708.4570$$

$$c_6 = U_0 + \frac{K_u}{TRZ_6} TRX_6 \rightarrow c_6 = 7979.5787$$

$$C_2 = V_0 + \frac{K_v}{TRZ} TR_Y$$

$$c_{11} = V_0 + \frac{K_v}{TRZ_1} TRX_1 \rightarrow c_{11} = 281900$$

$$c_{22} = V_0 + \frac{K_v}{TRZ_2} TRX_2 \rightarrow c_{22} = 316430$$

$$c_{33} = V_0 + \frac{K_v}{TRZ_3} TRX_3 \rightarrow c_{33} = 150830$$

$$c_{44} = V_0 + \frac{K_v}{TRZ_4} TRX_3 \rightarrow c_{44} = 123740$$

$$c_{55} = V_0 + \frac{K_v}{TRZ_5} TRX_5 \rightarrow c_{55} = 119400$$

$$c_{66} = V_0 + \frac{K_v}{TRZ_6} TRX_6 \rightarrow c_{66} = 123640$$

Após calcular os parâmetros que compoem o vector das incógnitas X, podemos montar o vector X para cada ponto PK:

$$X = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad C_1 \quad C_2]^T$$

$$X_1 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad c_1 \quad c_{11}]^T \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 0.0683 \\ 0.0049 \\ 0.0389 \\ -0.0069 \\ 0.0740 \\ 0.0269 \\ 0.0394 \\ 0.0261 \\ -0.0634 \\ 18236 \\ 18236 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = [x_2 \quad x_{22} \quad x_{222} \quad c_2 \quad c_{22}]^T \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 0.0767 \\ 0.0055 \\ 0.0437 \\ -0.0077 \\ 0.0831 \\ 0.0302 \\ 0.0443 \\ 0.0293 \\ -0.0711 \\ 20472 \\ 316430 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = [x_3 \quad x_{33} \quad x_{333} \quad c_3 \quad c_{33}]^T \rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 0.0365 \\ 0.0026 \\ 0.0208 \\ -0.0037 \\ 0.0396 \\ 0.0144 \\ 0.0211 \\ 0.0140 \\ -0.0339 \\ 9742.5547 \\ 150830 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = [x_4 \quad x_{44} \quad x_{444} \quad c_4 \quad c_{44}]^T \rightarrow X_4 = \begin{bmatrix} 0.0300 \\ 0.0021 \\ 0.0171 \\ -0.0030 \\ 0.0325 \\ 0.0118 \\ 0.0173 \\ 0.0115 \\ -0.0278 \\ 7992.0347 \\ 123740 \end{bmatrix}$$

$$X_5 = [x_5 \quad x_{55} \quad x_{555} \quad c_5 \quad c_{55}]^T \rightarrow X_5 = \begin{bmatrix} 0.0289 \\ 0.0021 \\ 0.0165 \\ -0.0029 \\ 0.0313 \\ 0.0114 \\ 0.0167 \\ 0.0111 \\ -0.0278 \\ 7708.4570 \\ 119400 \end{bmatrix}$$

$$X_6 = [x_6 \quad x_{66} \quad x_{666} \quad c_6 \quad c_{66}]^T \rightarrow X_6 = \begin{bmatrix} 0.0299 \\ 0.0021 \\ 0.0171 \\ -0.0030 \\ 0.0325 \\ 0.0118 \\ 0.0173 \\ 0.0115 \\ -0.0278 \\ 7979.5787 \\ 123640 \end{bmatrix}$$

No final iremos determinar a matriz dos coeficientes (A):

$$A_n = \frac{B_n}{X_n}$$

$$A_1 = \frac{B_1}{X_1}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.00000038384420 & 0.00000002736418 & 0.00000021879193 & -0.00000003873804 & 0.00000041607503 & 0.00000015143893 & 0.00000022166007 & 0.00000014693933 & -0.00000035614343 & 0.10251878561747 & 1.58474669821873 \\ 0.000000308013239 & 0.00000021958201 & 0.00000175568136 & -0.000000031085082 & 0.00000333876654 & 0.00000121521164 & 0.00000177869652 & 0.00000117910491 & -0.00000285784939 & 0.82265520911516 & 12.71669498000272 \\ 0.00000019736466 & 0.00000001407009 & 0.00000011249823 & -0.00000001991829 & 0.00000021393708 & 0.00000007786673 & 0.00000011397297 & 0.00000007555313 & -0.00000018312150 & 0.05271301531294 & 0.81484360614679 \\ 0.000000305441377 & 0.00000021774854 & 0.00000174102169 & -0.00000030825526 & 0.00000331088836 & 0.00000120506481 & 0.00000176384469 & 0.00000116925957 & -0.00000283398680 & 0.81578616771575 & 12.61051258023987 \\ 0.000000310772305 & 0.00000022154894 & 0.00000177140808 & -0.00000031363530 & 0.00000336867394 & 0.00000122609704 & 0.00000179462941 & 0.00000118966688 & -0.00000288344892 & 0.83002424264717 & 12.83060631331178 \\ 0.000000305072682 & 0.00000021748569 & 0.00000173892012 & -0.00000030788317 & 0.00000330689182 & 0.00000120361019 & 0.00000176171557 & 0.00000116784817 & -0.00000283056592 & 0.81480144000796 & 12.59529055069496 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{B_2}{X_2}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.00000034197820 & 0.00000002437956 & 0.00000019492823 & -0.00000003451287 & 0.00000037069360 & 0.00000013492144 & 0.00000019748353 & 0.00000013091261 & -0.00000031729876 & 0.09132586343726 & 1.41162452333038 \\ 0.000000274399818 & 0.00000019561907 & 0.00000156408421 & -0.00000027692773 & 0.00000297440763 & 0.00000108259584 & 0.00000158458774 & 0.00000105042943 & -0.00000254597287 & 0.73278941681065 & 11.32673124867340 \\ 0.00000017583705 & 0.00000001253539 & 0.00000010022745 & -0.00000001774569 & 0.0000019060182 & 0.00000006937339 & 0.00000010154133 & 0.00000006731215 & -0.00000016314747 & 0.04695758451863 & 0.72582371924023 \\ 0.000000272107402 & 0.00000019398481 & 0.00000155101740 & -0.00000027461420 & 0.00000294955587 & 0.00000107355152 & 0.00000157134963 & 0.00000104165384 & -0.00000252470308 & 0.72666748198389 & 11.23210445833783 \\ 0.00000276856522 & 0.00000019737045 & 0.00000157808747 & -0.00000027940707 & 0.00000300103753 & 0.00000109228833 & 0.00000159877457 & 0.00000105983394 & -0.00000256876699 & 0.73935008744681 & 11.42813958154786 \\ 0.000000271778918 & 0.00000019375064 & 0.00000154914504 & -0.00000027428269 & 0.00000294599791 & 0.00000107225555 & 0.00000156945272 & 0.00000104039637 & -0.00000252165530 & 0.72579026086410 & 11.2185452422480 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \frac{B_3}{X_3}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.00000071687678 & 0.00000005110600 & 0.00000040862114 & -0.00000007234810 & 0.00000077707186 & 0.00000028283103 & 0.00000041397774 & 0.00000027442747 & -0.00000066514215 & 0.19115161509005 & 2.95934914470094 \\ 0.00000575678762 & 0.00000041040022 & 0.00000328137996 & -0.00000058098222 & 0.00000624017653 & 0.00000227123851 & 0.00000332439546 & 0.00000220375480 & -0.00000534133924 & 1.53501868488778 & 23.76467617122936 \\ 0.00000036889251 & 0.00000002629827 & 0.00000021026944 & -0.00000003722909 & 0.00000039986786 & 0.00000014554000 & 0.00000021302585 & 0.00000014121567 & -0.00000034227075 & 0.09836334600662 & 1.52283036550583 \\ 0.00000570870868 & 0.00000040697268 & 0.00000325397487 & -0.00000057613003 & 0.00000618806047 & 0.00000225226982 & 0.00000329663112 & 0.00000218534971 & -0.00000529673000 & 1.52219867475183 & 23.56620080907772 \\ 0.00000580835456 & 0.00000041407641 & 0.00000331077321 & -0.00000058618642 & 0.00000629607347 & 0.00000229158334 & 0.00000335417403 & 0.00000222349513 & -0.00000538918476 & 1.54876875149466 & 23.97755037495235 \\ 0.00000570182856 & 0.00000040648220 & 0.00000325005319 & -0.00000057543568 & 0.00000618060264 & 0.00000224955539 & 0.00000329265802 & 0.00000218271593 & -0.00000529034639 & 1.52036412467929 & 23.53779888232277 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \frac{B_4}{X_4}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.00000087304914 & 0.00000006223950 & 0.00000049763968 & -0.00000008810921 & 0.00000094635778 & 0.00000034444606 & 0.00000050416322 & 0.00000033421178 & -0.00000081004406 & 0.23281790095759 & 3.60475065933317 \\ 0.00000701633694 & 0.000000500119323 & 0.00000399932548 & -0.00000070809751 & 0.00000760548833 & 0.00000276817137 & 0.00000405175250 & 0.00000268592264 & -0.00000650999103 & 1.87106173089472 & 28.96989870776506 \\ 0.0000044893327 & 0.00000003200436 & 0.00000025589282 & -0.00000004530691 & 0.0000048662953 & 0.0000017711866 & 0.00000025924731 & 0.00000017185606 & -0.00000041653524 & 0.11971800494407 & 1.8536086196169 \\ 0.000000695845842 & 0.00000049606708 & 0.00000396633461 & -0.00000070225634 & 0.00000754274984 & 0.00000274533643 & 0.00000401832916 & 0.00000266376617 & -0.00000645628942 & 1.85562714239823 & 28.73092291238854 \\ 0.00000707991956 & 0.00000050472603 & 0.00000403556770 & -0.00000071451435 & 0.00000767440990 & 0.00000279325677 & 0.00000408846981 & 0.00000271026269 & -0.00000656898511 & 1.88801744740916 & 29.23242633142945 \\ 0.000000695007307 & 0.00000049546930 & 0.00000396155495 & -0.00000070141008 & 0.00000753366039 & 0.00000274202814 & 0.00000401348684 & 0.00000266055618 & -0.00000644850921 & 1.85339100388110 & 28.69630048103403 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \frac{B_5}{X_5}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0.00000090447142 & 0.00000006447958 & 0.00000051555044 & -0.00000009128039 & 0.00000098041854 & 0.00000035684317 & 0.00000052230877 & 0.00000034624053 & -0.00000083919870 & 0.24109175691747 & 3.73429648838628 \\ 0.00000727149048 & 0.00000051838308 & 0.00000414476349 & -0.00000073384793 & 0.00000788206674 & 0.00000286883768 & 0.00000419909705 & 0.00000278359792 & -0.00000674673099 & 1.93825518654772 & 30.02184574563984 \\ 0.00000046509303 & 0.00000003315639 & 0.00000026510391 & -0.00000004693777 & 0.00000050414620 & 0.00000018349421 & 0.00000026857915 & 0.00000017804217 & -0.00000043152880 & 0.12397306612584 & 1.92023232734028 \\ 0.00000721168180 & 0.00000051411933 & 0.00000411067243 & -0.00000072781196 & 0.00000781723602 & 0.00000284524122 & 0.00000416455909 & 0.00000276070257 & -0.00000669123850 & 1.92231285881209 & 29.77491329452231 \\ 0.00000733756641 & 0.00000052309362 & 0.00000418242690 & -0.00000074051640 & 0.00000795369097 & 0.00000289490677 & 0.00000423725419 & 0.00000280889243 & -0.00000680803844 & 1.95586808431307 & 30.29465383794619 \\ 0.00000720299469 & 0.00000051350003 & 0.00000410572076 & -0.00000072693525 & 0.00000780781946 & 0.00000284181388 & 0.00000415954251 & 0.00000275737706 & -0.00000668317832 & 1.91999726326526 & 29.73904678282733 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \frac{B_6}{X_6}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0.00000087318297 & 0.00000006224904 & 0.00000049771597 & -0.00000008812272 & 0.00000094650285 & 0.00000034449886 & 0.00000050424051 & 0.00000033426301 & -0.00000081016824 & 0.23266010617385 & 3.60485226047475 \\ 0.00000702205261 & 0.00000050060070 & 0.00000400258343 & -0.00000070867435 & 0.00000761168395 & 0.00000277042639 & 0.00000405505315 & 0.00000268811065 & -0.00000651529423 & 1.87102996130055 & 28.98987151828371 \\ 0.00000044900217 & 0.00000003200927 & 0.00000025593210 & -0.00000004531386 & 0.00000048670422 & 0.00000017714585 & 0.00000025928710 & 0.00000017188244 & -0.00000041659916 & 0.11963688677140 & 1.85366244693351 \\ 0.00000696443556 & 0.00000049649319 & 0.000000396974159 & -0.00000070285956 & 0.00000754922887 & 0.00000274769460 & 0.00000402178080 & 0.00000266605428 & -0.00000646183521 & 1.85567786335910 & 28.75200501904854 \\ 0.00000708600706 & 0.00000050516000 & 0.00000403903758 & -0.00000071512871 & 0.00000768100855 & 0.00000279565848 & 0.00000409198519 & 0.00000271259304 & -0.00000657463329 & 1.88807066005916 & 29.25390131888101 \\ 0.00000695604893 & 0.00000049589531 & 0.000000396496120 & -0.00000070201317 & 0.00000754013803 & 0.00000274438580 & 0.00000401693774 & 0.00000266284380 & -0.00000645405381 & 1.85344324084268 & 28.71738161857780 \end{bmatrix}$$