



UNIVERSIDADE  
E D U A R D O  
M O N D L A N E

**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**Departamento de Matemática e Informática**

Trabalho de Licenciatura em  
Matemática

**Ensino de Probabilidade e Estatística**

**Autor:** Benildo Florêncio João Gule

Maputo, Março de 2026



UNIVERSIDADE  
E D U A R D O  
M O N D L A N E

**FACULDADE DE CIÊNCIAS**  
**Departamento de Matemática e Informática**

Trabalho de Licenciatura em  
Matemática

**Ensino de Probabilidade e Estatística**

**Autor:** Benildo Florêncio João Gule

**Supervisor:** Professor Catedrático Manuel Joaquim Alves

**Co-supervisora:** Professora Catedrática Elena Vladimirovna Molchanova Alves

Maputo, Março de 2026

# Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais João Augusto Gule e Hortência José Zavale, ao meu tio Cláudio José Zavale e sua esposa Helena Lucas Matsinhe, aos meus amigos e colegas que me apoiaram sempre que fosse necessário.

# Declaração Sob Palavra de Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação, estando indicada no texto, as referências usadas na elaboração do mesmo e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, 02 de Março de 2026

---

(Benildo Florêncio João Gule)

# Agradecimentos

- Agradeço aos meus pais João Augusto Gule e Hortência José Zavale, por me terem colocado no mundo.
- Agradeço a Deus, por permitir a realização deste curso.
- Agradeço ao meu Supervisor Professor Catedrático Manuel Joaquim Alves, e à minha Co-Supervisora, Professora Catedrática Elena Vladimirovna Molchanova Alves, pela dedicação e pela valiosa e sábia orientação.
- Agradeço ao corpo docente ligado ao curso.
- Agradeço aos colegas do curso, especialmente Xavier Danilo, Notícias Novela, Moisés José, amigos e a todo o pessoal em geral que directa ou indirectamente contribuíram para o sucesso do meu curso.
- Agradeço à Universidade Eduardo Mondlane, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática e Informática, pela oportunidade da realização do curso.
- Agradeço ao Serviço Distrital de Educação, Juventude e Tecnologia de Zavala pela bolsa e pelo apoio financeiro concedido.

# Resumo

O objectivo principal deste trabalho é explorar estratégias que tornem o Ensino de Probabilidade e Estatística mais acessível e envolvente para os alunos, por meio da utilização de exemplos práticos e actividades interactivas. Para atingir este objectivo, começamos por apresentar conceitos fundamentais da teoria da probabilidade e da estatística, bem como as metodologias de ensino associadas a essas disciplinas.

A pesquisa foi conduzida na Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico, envolvendo uma população de 146 alunos da 12.<sup>a</sup> classe, dos quais foi seleccionada uma amostra de 107 alunos. A metodologia adoptada consistiu em três etapas: a primeira foi a orientação para o pré-teste, seguida pela leccionação da aula e, por fim, a aplicação do pós-teste sobre introdução à probabilidade.

Para o processamento dos dados, utilizou-se o pacote estatístico R version 4.4.0, compilador RStudio com um nível de confiança de 95%. Observou-se que, após a realização do teste de normalidade, os dados não apresentaram uma distribuição normal. Assim, recorreu-se a testes não paramétricos, como o teste de Wilcoxon, para comparar as duas amostras dependentes, com o intuito de analisar a evolução dos resultados antes e depois da leccionação.

**Palavras-chave:** Probabilidade, Estatística, Metodologias de Ensino de Probabilidade e Estatística, R, Pré-teste, Pós-teste.

# Abstract

The main objective of this work is to explore strategies that make the teaching of Probability and Statistics more accessible and engaging for students, through the use of practical examples and interactive activities. To achieve this goal, we begin by presenting fundamental concepts of probability theory and statistics, as well as the teaching methodologies associated with these subjects.

The research was conducted at the Secondary School 25 de Novembro in Quissico, involving a population of 146 students from the 12th grade, of which a sample of 107 students was selected. The adopted methodology consisted of three stages: the first was the orientation for the pre-test, followed by the teaching of the lesson, and finally, the application of the post-test on the introduction to probability.

For data processing, the statistical package R version 4.4.0 was used, along with the RStudio compiler, with a confidence level of 95%. It was observed that after performing the normality test, the data did not show a normal distribution. Therefore, non-parametric tests were employed, such as the Wilcoxon test, to compare the two dependent samples, aiming to analyze the evolution of the results before and after teaching.

**Keywords:** Probability, Statistics, Teaching Methodologies for Probability and Statistics, R, Pre-test, Post-test.

# Conteúdo

<b>Dedicatória</b>	<b>i</b>
<b>Declaração Sob Palavra de Honra</b>	<b>ii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Simbologia</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização . . . . .	1
1.2 Delimitação do Tema . . . . .	2
1.3 Objectivos . . . . .	2
1.3.1 Objectivos Gerais . . . . .	2
1.3.2 Objectivos Específicos . . . . .	2
1.4 Justificativa . . . . .	2
1.5 Definição do Problema . . . . .	3
1.6 Hipóteses . . . . .	3
1.7 Metodologia . . . . .	3
1.7.1 Classificação da pesquisa . . . . .	3
1.7.2 Quanto aos procedimentos técnicos . . . . .	4
1.7.3 Determinação da população e amostra . . . . .	4
1.7.4 Quanto à técnica de colecta de dados . . . . .	5
1.7.5 Pacote Estatístico para Análise dos Dados . . . . .	5
1.7.6 Localização da Área de Estudo . . . . .	5
1.7.7 Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico . . . . .	6
1.8 Estrutura do trabalho . . . . .	7

<b>2</b>	<b>Fundamentos da Estatística</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução à Estatística . . . . .	8
2.2.1	População e Amostra . . . . .	9
2.6	Tipos de dados . . . . .	10
2.6.1	Dados qualitativos . . . . .	10
2.6.2	Dados quantitativos . . . . .	10
2.7	Medidas Descritivas . . . . .	11
2.7.1	Medidas de Tendência Central . . . . .	12
2.10.1	Mediana . . . . .	14
2.13.1	Medidas de Separatrizes . . . . .	16
2.13.2	Medidas de Dispersão . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Introdução à probabilidade</b>	<b>19</b>
3.1	História e Evolução de Probabilidade . . . . .	19
3.2	Conceitos Básicos de Probabilidade . . . . .	21
3.5	Espaço amostral e evento . . . . .	21
3.8.1	Tipos de eventos . . . . .	23
3.11.1	Operações com eventos . . . . .	23
3.14	Definição de probabilidade . . . . .	25
3.14.1	Definição clássica ou de Laplace no $\Omega$ finito . . . . .	25
3.16.1	Definição frequencista de probabilidade . . . . .	27
3.17.1	Definição axiomática de probabilidade no espaço finito . . . . .	28
3.19.1	Definição axiomática de probabilidade no espaço infinito . . . . .	31
3.20	Espaço de Probabilidade . . . . .	31
3.21	Regras básicas de probabilidade . . . . .	33
3.21.1	Regra de adição . . . . .	33
3.22.1	Probabilidade condicional . . . . .	34
3.24.1	Independência . . . . .	36
3.26.1	Regra de multiplicação . . . . .	38
3.29	Teorema de Bayes . . . . .	39
3.29.1	Fórmula Geral do Teorema de Bayes . . . . .	39
3.29.2	Aplicações do Teorema de Bayes em diversas áreas . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Metodologias de Ensino em Probabilidade e Estatística</b>	<b>42</b>
4.1	Abordagens Tradicionais . . . . .	42
4.1.1	Características da Abordagem Tradicional . . . . .	42
4.1.2	Limitações da Abordagem Tradicional . . . . .	43
4.2	Abordagens Inovadoras . . . . .	43

4.2.1	Uso de Tecnologias Educacionais . . . . .	44
4.2.2	Aprendizagem Baseada em Projectos . . . . .	44
4.3	Desafios e Oportunidades no Ensino de Probabilidade e Estatística . . . . .	45
4.3.1	Desafios da Probabilidade . . . . .	45
4.3.2	Oportunidades no Ensino de Probabilidade e Estatística . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Análise dos Resultados</b>	<b>46</b>
5.1	Análise descritiva dos resultados do pré-teste . . . . .	46
5.1.1	Descrição da variável Sexo . . . . .	46
5.1.2	Aproveitamento do pré-teste . . . . .	47
5.2	Análise Inferencial dos resultados do Pré-teste . . . . .	47
5.2.1	Teste de Normalidade das variáveis em análise . . . . .	47
5.3	Dificuldades apresentadas pelos alunos no pré-teste. . . . .	49
5.4	Descrição das aulas Leccionadas . . . . .	51
5.5	Análise Descritiva dos Resultados do pós-teste . . . . .	53
5.5.1	Aproveitamento do pós-teste . . . . .	53
5.6	Análise Inferencial dos resultados do pós-teste . . . . .	53
5.6.1	Teste de Normalidade das variáveis em análise . . . . .	53
5.7	Análise comparativa do pré-teste e pós-teste . . . . .	54
5.8	Resultados apresentados pelos alunos no pós-teste . . . . .	55
5.9	Análise comparativa do pré-teste e pós-teste no grupo amostral através do teste de Wilcoxon . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusão e Recomendações</b>	<b>58</b>
6.1	Conclusão . . . . .	58
6.2	Recomendações . . . . .	59
6.3	Trabalhos Futuros . . . . .	59
	Bibliografia . . . . .	60
<b>A</b>	<b>Evidências e resultados processados em R</b>	<b>62</b>
A.1	Pré-teste . . . . .	62
A.1.1	Grelha dos objectivos das questões do pré-teste . . . . .	64
A.2	Plano de Aula . . . . .	67
A.3	Pós-Teste . . . . .	72
A.3.1	Grelha dos objetivos das questões do pré-teste . . . . .	74
A.4	Descrição da variável Sexo em R . . . . .	76
A.5	Aproveitamento pedagógico de Pre-Teste gerado em R . . . . .	76
A.6	Teste de Normalidade das variáveis em análise em R . . . . .	77
A.7	Aproveitamento pedagógico de Pós-Teste gerado em R . . . . .	78

A.8	Teste de Normalidade das variáveis em análise gerado em R . . . . .	79
A.9	Análise Comparativa do pré-teste e pós-teste em percentagem gerado em R . . . . .	80
A.10	Teste de Wilcoxon Pareado em R . . . . .	81
A.11	Anexo: Credencial . . . . .	83

# Simbologia

- $\emptyset$  é o conjunto vazio;
- d.C. denota depois do Cristo;
- $A \subset B$  denota que o conjunto  $A$  é um subconjunto do conjunto  $B$  (diz-se também que  $A$  está contido em  $B$ );
- $A \cup B$  denota a união ou reunião de dois eventos;
- $A \cap B$  denota a interseção de dois eventos;
- $A^c$  denota elementos pertencentes ao universo que não pertencem a  $A$ ;
- $\Omega$  denota o espaço amostral;
- $\square$  denota fim da demonstração.
- $\bar{X}$  denota média amostral;
- $\sigma^2$  denota variância populacional;
- $\sigma$  denota desvio padrão populacional;
- $S^2$  denota variância amostral;
- $P(A)$  denota a probabilidade de um acontecimento ocorrer;
- $P(\bar{A})$  denota a probabilidade de um acontecimento não ocorrer;
- $n(A)$  denota o número de elementos do conjunto ou subconjunto  $A$ ;
- $P(A/B)$  denota a probabilidade da ocorrência do evento  $A$  condicionado à ocorrência de  $B$ ;
- $N$  denota a quantidade de elementos da população;
- $n$  denota a quantidade de elementos da amostra;
- $\alpha$  denota a margem de erro aceitável ou nível de significância
- CV denota coeficiente de variação;

- PEA denota processo de ensino e aprendizagem;
- NEE denota necessidades educativas especiais;
- $H_0$  denota Hipótese nula;
- $H_1$  denota Hipótese alternativa;
- Sig.: Nível de significância calculada;
- $\tilde{\mu}_1$ : Mediana populacional 1;
- $\tilde{\mu}_2$ : Mediana populacional 2.
- $\mathcal{F}$  denota conjunto de subconjuntos de  $\Omega$  ou  $\sigma$ -álgebra ;
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  denota espaço de probabilidade;
- $\mu(\Omega) = 1$  denota medida de probabilidade;
- $f(x)$  denota função (massa) de probabilidade;
- $F(x)$  denota função de distribuição;
- $E[X]$  denota esperança ou valor esperado;
- $\text{Var}[X]$  denota variância de  $X$ ;
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  denota união infinita dos eventos;
- $\mathcal{P}(\Omega)$  denota conjunto partes ou partições de  $\Omega$ ;
- $Q_1$  denota primeiro quartil;
- $Q_2$  denota segundo quartil;
- $Q_3$  denota terceiro quartil.

# Lista de Figuras

1.1	Localização do Distrito de Zavala . . . . .	6
1.2	Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico . . . . .	6
2.1	Classificação de uma variável . . . . .	11
3.1	Probabilidade de sair número maior que 4 no lançamento de um dado . . . . .	26
3.2	Probabilidade de sair a pontuação igual em dois dados . . . . .	26
3.3	Probabilidade de sair o produto da pontuação dos dois dados igual a 40 . . . . .	27
5.1	Distribuição da frequência por sexo . . . . .	46
5.2	Análise do aproveitamento do pré-teste . . . . .	47
5.3	Teste de Normalidade das variáveis em análise . . . . .	48
5.4	Dificuldades na primeira pergunta do pré-teste . . . . .	49
5.5	Dificuldades na segunda pergunta do pré-teste . . . . .	50
5.6	Dificuldades na terceira pergunta do pré-teste . . . . .	50
5.7	Leccionação da aula sobre introdução à probabilidade . . . . .	51
5.8	Leccionação da aula sobre introdução à probabilidade . . . . .	52
5.9	Leccionação da aula sobre introdução à probabilidade . . . . .	52
5.10	Análise do aproveitamento do pós-teste . . . . .	53
5.11	Teste de Normalidade das variáveis em análise . . . . .	54
5.12	Análise Comparativa do pré-teste e pós-teste em percentagem . . . . .	55
5.13	Primeira pergunta do pós-teste . . . . .	55
5.14	Segunda pergunta do pós-teste . . . . .	56
5.15	Terceira pergunta do pós-teste . . . . .	56
5.16	Teste de Classificações Assinadas por Wilcoxon . . . . .	57
A.1	Credencial . . . . .	83

# Lista de Tabelas

2.1	Notações de algumas estatísticas . . . . .	11
2.2	Gastos totais (dólar) em petiscos e bebidas . . . . .	14
2.3	Descrição dos quartis (amostrais) . . . . .	16
3.1	Lançamento de um dado 1000 vezes . . . . .	27
3.2	Probabilidade da face virada para cima no lançamento de um dado . . . . .	28
A.1	Definição dos objectivos das perguntas do Pré-Teste . . . . .	64
A.3	Definição dos objectivos das perguntas do Pós-Teste . . . . .	74

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contextualização

O Ensino de Probabilidade e Estatística é um tema de grande relevância na formação dos alunos, uma vez que essa área é essencial para a compreensão da realidade e tomada de decisões baseadas em dados. No entanto, muitos alunos enfrentam dificuldades ao estudar esse conteúdo devido à percepção de que a estatística é uma disciplina complexa e abstracta. Diante dessa situação, é essencial explorar estratégias que tornem o processo de ensino e aprendizagem (PEA) de Probabilidade e Estatística mais acessível e envolvente para os alunos.

Este trabalho visa discutir diversas abordagens pedagógicas que podem ser implementadas para tornar o ensino de Probabilidade e Estatística mais acessível e interessante para os alunos. Entre as estratégias a serem abordadas, destacam-se a utilização de exemplos práticos.

Além disso, a formação contínua dos professores e a reflexão sobre suas práticas pedagógicas são aspectos importantes para o sucesso do ensino desse tema. Ao capacitar os educadores a utilizarem metodologias diversificadas e a incluir a cultura de dados em suas aulas, é possível criar um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e inclusivo.

Assim sendo, a probabilidade e estatística são fundamentais em diversas áreas do conhecimento e da vida quotidiana dos alunos, tais como: na tomada de decisões, análise de dados e desenvolvimento do pensamento crítico.

**A Probabilidade e Estatística** é uma área do conhecimento que inclui os instrumentos necessários para recolher, organizar ou classificar, apresentar e interpretar conjuntos de dados. Também pode ser entendida como um ramo da matemática que lida com a análise de incertezas e a interpretação dos dados. [13]

O presente trabalho tem como objectivo geral explorar estratégias para tornar o ensino de probabilidade e estatística mais acessível e interessante para os alunos, utilizando exemplos práticos e actividades interactivas. Esse objectivo geral será atingido através da apresentação dos teoremas ou propriedades gerais com as respectivas demonstrações e apresentação de exemplos e suas resoluções.

## 1.2 Delimitação do Tema

O tema do presente trabalho enquadra-se nas disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática, concretamente nas áreas de Estatística Básica, Probabilidade e Estatística, Estatística Matemática. No Sistema Nacional de Educação, relaciona-se com a disciplina de Matemática da 12<sup>a</sup> classe, na unidade temática VIII: Breve Introdução às Probabilidades. Do ponto de vista espacial, a pesquisa decorreu no distrito de Zavala, especificamente na Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico. a perspectiva temporal, o trabalho realizou-se no período de 16 de junho a 02 de julho de 2025.

## 1.3 Objectivos

### 1.3.1 Objectivos Gerais

1. Explorar estratégias pedagógicas que tornem o ensino de probabilidade e estatística mais acessível e interessante para os alunos, utilizando exemplos práticos e actividades interactivas.

### 1.3.2 Objectivos Específicos

1. Identificar probabilidade, espaço amostral e eventos;
2. Apresentar estratégias que tornem o ensino de probabilidade e estatística mais acessível e interessante para os alunos;
3. Reconhecer os axiomas e teoremas da probabilidade na resolução dos exercícios;
4. Desenvolver exercícios práticos que abordem conceitos de probabilidade e estatística.

## 1.4 Justificativa

O estudo do tema Ensino de Probabilidade e Estatística torna-se indispensável para os alunos nos dias de hoje, visto que, orienta ao ensino de Matemática a missão de não só ensinar o domínio dos números, mas também a organização dos dados, leitura de gráficos e análises dos dados.

A actualidade do tema Ensino de Probabilidade e Estatística na licenciatura em Matemática é bastante relevante na *prática* para a compreensão e análise de dados em diversas áreas, como ciências naturais e humanas. No que tange às *mudanças tecnológicas*, isso se torna uma competência crucial para que os alunos possam interpretar e utilizar informações de maneira mais eficaz em suas vidas pessoais e profissionais. No que concerne a *interdisciplinaridade*, o tema promove a interdisciplinaridade, permitindo que os alunos liguem os conhecimentos matemáticos com outras áreas do saber, como ciências sociais, saúde e economia.

O tema é exclusivo porque é único que fornece ferramentas para a tomada de decisões. Isso distingue-se de outras áreas da matemática que podem não ter uma aplicação directa em situações do dia a dia, tendo aplicações práticas imediatas, como em pesquisas, políticas públicas e análise de mercado.

## 1.5 Definição do Problema

Ao longo das aulas na disciplina de Matemática, é comum observar que muitos alunos enfrentam dificuldades em entender e aplicar os conceitos de probabilidade e estatística, e é um desafio recorrente nas salas de aula. Estas dificuldades podem ser causadas por uma variedade de factores, como a falta de compreensão dos conceitos, a falta de prática, métodos de ensino inadequados, a falta de confiança e desmotivação em relação ao estudo da Matemática.

Diante deste cenário, surge a seguinte questão: *De que forma as estratégias pedagógicas podem contribuir para tornar o ensino de probabilidade e estatística mais acessível para os alunos da 12.ª classe da Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico?*

## 1.6 Hipóteses

$H_1$ : A falta de compreensão dos axiomas e das propriedades da probabilidade leva a erros na aplicação dessas propriedades durante a resolução de problemas.

$H_2$ : A falta de prática suficiente em exercícios que envolvem axiomas e as propriedades da probabilidade contribui para a dificuldade na sua aplicação.

## 1.7 Metodologia

Nesta secção apresentam-se os procedimentos metodológicos, os quais o pesquisador seguirá para a realização do seu trabalho. Para a redacção desta secção, serão consultadas as seguintes obras:[\[30\]](#); [\[32\]](#)

### 1.7.1 Classificação da pesquisa

- **Quanto aos objectivos** – a pesquisa é *descritiva*, pois visa descrever as características de determinada população ou o estabelecimento de relações entre variáveis, por amostragem probabilística, uma vez que cada elemento da população poderá ser seleccionado para compor a amostra e tem uma chance conhecida e diferente de zero. O pesquisador terá controle sobre o erro amostral da pesquisa, assim, somente as amostras probabilísticas fornecerão estimativas precisas da população.

- **Quanto à forma de abordagem do problema** – a pesquisa é *quantitativa*, pois quantificaram-se os dados e aplicou-se análise estatística.

### 1.7.2 Quanto aos procedimentos técnicos

A pesquisa é por **levantamento**, pois procedemos à solicitação de informações a dois grupos significativos de pessoas acerca do problema estudado para, em seguida, mediante análise quantitativa, obter as conclusões correspondentes aos dados colectados.

### 1.7.3 Determinação da população e amostra

Esta pesquisa teve como população 3 turmas da 12<sup>a</sup> classe grupo B, que estudam no período de tarde, num total de 146 alunos, da Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico. Para a determinação da amostra, recorreu-se à seguinte fórmula de Slovin: [2]

$$n = \frac{N}{1 + N(\alpha)^2}$$

**Onde:**

- N é o tamanho da população;
- n é o tamanho da amostra;
- $\alpha$  é a margem de erro aceitável ou nível de significância ( $\alpha = 0,05$ ).

#### Calculo do tamanho minimo de Amostra

N = 146 alunos;

$\alpha = 0,05$

n = ?

#### Resolução 1.7.1.

$$n = \frac{N}{1 + N(\alpha)^2}$$

$$n = \frac{146}{1 + 146(0,05)^2}$$

$$n = \frac{146}{1 + 146 \times 0,0025} = \frac{146}{1 + 0,365} = \frac{146}{1,365} \approx 106,96$$

Portanto,  $n = 107$  alunos.

No presente trabalho, utilizamos o tamanho mínimo da amostra em função das condições das salas de aula da Escola que tem capacidade para acolher 60 alunos. Entretanto, para viabilizar o estudo, dividimos a amostra em dois grupos, com cada grupo ocupando uma sala distinta. Em princípio, a

população seria composta por todos os alunos da 12.<sup>a</sup> classe da Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico. Após a autorização para a recolha de dados, a direcção da escola disponibilizou apenas as três (3) turmas do período da tarde, que representavam a maioria. Segundo a direcção da escola, as duas turmas do período de manhã já estavam ocupadas.

### **1.7.4 Quanto à técnica de colecta de dados**

#### **1. Pré-teste**

É um questionário que foi aplicado antes da formação dos indivíduos, visando medir o nível de conhecimento específico antes de começar o estudo. Aplicou-se na turma como forma de buscar uma estimativa sobre os resultados. Dessa forma, houve maior segurança e precisão na execução da pesquisa.

#### **2. Leccionação**

O processo de leccionação foi planificado, como aula, uma vez que o Processo de Ensino e Aprendizagem é entendido como um conjunto de várias actividades planificadas e organizadas que envolvem o professor, aluno e o meio escolar, com o objectivo de alcançar determinados resultados.

#### **3. Pós-teste**

É um questionário aplicado ao final do processo de formação dos indivíduos, com vista a avaliar a eficácia do estudo. Este foi administrado após a intervenção didáctica do pesquisador, com o objectivo de determinar até que ponto os alunos assimilaram as estratégias programadas no pré-teste, que visavam tornar o ensino de Probabilidade e Estatística mais acessível, bem como identificar as dificuldades encontradas por eles.

### **1.7.5 Pacote Estatístico para Análise dos Dados**

O processamento e análise dos dados escolhidos em pré-teste, assim como em pós-teste, foram realizados no pacote estatístico R version 4.4.0, compilador RStudio.

### **1.7.6 Localização da Área de Estudo**

A pesquisa foi realizada na província de Inhambane, no Distrito de Zavala. Localiza-se no extremo oriental sul da República de Moçambique, província de Inhambane. É limitado a norte pelo Distrito de Inharrime, a sul e leste pelo Oceano Índico e a oeste pelo Distrito de Manjacaze, província de Gaza.



**Figura 1.1:** Localização do Distrito de Zavala

### 1.7.7 Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico

A Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico está localizada no bairro Nhangave, a cerca de 3 km a sul da vila de Quissico, com uma área de 4,47 ha, segundo o Título de propriedade nº 658/CMVQ. O nome que ostenta representa a timbila, símbolo da cultura Chope, proclamado património Mundial pela UNESCO a 25 de Novembro de 2005.



**Figura 1.2:** Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico

De forma pedagógica e didáctica, no presente trabalho faremos uso dos conceitos de probabilidade e estatística. Além desses conceitos, teremos como base as obras indicadas nas referências bibliográficas. A redação final do trabalho será realizada utilizando o compilador pdfLaTeX, na versão Tex Live 2024, e o visualizador PDF Overleaf na forma online L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

## 1.8 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está estruturado em seis (6) capítulos, cada um dos quais contém secções e subsecções.

No Capítulo 1, apresentamos a introdução do trabalho. Começamos por apresentar um breve resumo sobre o ensino de Probabilidade e Estatística, bem como a delimitação do tema, assim como a metodologia da pesquisa. No que diz respeito ao último ponto, são apresentados os passos para a realização da pesquisa, começando pela determinação da amostra, que é composta por 107 alunos, numa população de 146 alunos da 12.<sup>a</sup> classe, da Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico, do período de tarde. Para a recolha de dados, foram aplicadas duas avaliações, sendo a primeira considerada como pré-teste e a segunda como pós-teste.

No capítulo 2 apresentam-se a definição de Estatística, população, amostra, medida de tendência central e de dispersão; tipos de dados sendo qualitativos e quantitativos. Para a redacção foram consultadas as seguintes [1]; [27]; [8]; [24]; [4]; [29].

No Capítulo 3 começamos por apresentar a história e evolução da probabilidade na secção (3.1); Na secção (3.2) damos os conceitos básicos da probabilidade; Na secção (3.3) damos o conceito de espaço amostral e evento; Na secção (3.15) abordamos a definição de probabilidade; (3.21) Espaço de Probabilidade; Na secção (3.22) damos as regras básicas de probabilidade; Na secção (3.30) damos o teorema de Bayes. Foram consultadas as seguintes obras: [26], [12], [24], [27], [19], [10], [1], [14], [13], [7], [29], [11] e [9].

No Capítulo 4, apresenta-se a definição da metodologia de ensino. Falamos da abordagem tradicional e da abordagem inovadora, sendo uma das características da abordagem tradicional o uso da aula expositiva durante a leccionação. Para a redacção foram consultadas as seguintes obras: [21]; [17]; [3]; [15]; [4]

No Capítulo 5, referente à análise dos resultados da pesquisa, começamos por uma análise descritiva dos dados do pré-teste, inferencial do pré-teste, dificuldades apresentadas pelos alunos no pré-teste, descrição das aulas leccionadas, análise descritiva dos resultados do pós-teste, análise inferencial dos resultados do pós-teste, análise comparativa do pré-teste e pós-teste, resultados apresentados pelos alunos no pós-teste e finalmente, análise comparativa do pré-teste e pós-teste no grupo amostral através do teste de Wilcoxon.

No Capítulo 6, referente à conclusão e recomendações, começamos por apresentar a Conclusão da pesquisa, a seguir as recomendações e finalmente principais linhas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamentos da Estatística

Neste capítulo apresentam-se a definição de Estatística, população, amostra, medida de tendência central e de dispersão; finalmente, fará-se a visualização de dados.

### 2.1 Introdução à Estatística

Etimologicamente, a palavra **estatística** vem do latim *STATUS*, que significa ESTADO, uma vez que na antiguidade, tal como hoje, o Estado fazia levantamento para obter informações sobre a população disponível para pagar impostos, a idade dos jovens para ir à guerra, etc. Hoje, a Estatística serve não só ao Estado, mas a todas as áreas.

**Definição 2.1.1.** *A Estatística é uma ciência ou método que se ocupa da recolha, organização e análise de dados. [24], [27]*

Ela está presente em diversas áreas, como economia, saúde, psicologia, ciências sociais, indústria e tecnologia, desempenhando um papel crucial na análise de informação. [31]

**Exemplo 2.2.** *Um exemplo prático é a análise de notas de alunos de uma sala de aula, onde gráficos podem mostrar o desempenho geral e identificar padrões, como alunos que se destacam ou precisam de mais ajuda.*

O termo Estatísticas é utilizado para indicar números, como por exemplo estatísticas fornecidas pelo governo:

- Estatística de saúde - número de doentes assistidos em cada centro de saúde;
- Estatísticas da educação - percentagem dos alunos aprovados nos exames finais da 12<sup>a</sup> classe numa certa província;
- Instituições Bancárias - análise de crédito seguro de vida e/ou de automóveis.

A Estatística pode ser dividida em dois ramos: [24], [27]

1. **Estatística Descritiva:** é o ramo da estatística que diz respeito aos métodos de recolha, apresentação e ao resumo dos dados, que podem ser apresentados sob a forma numérica ou gráfica;
2. **Estatística Indutiva ou Inferência:** é o ramo da estatística cujo objectivo é fazer afirmações a partir de um conjunto de valores representativos (amostra) sob um universo, fundamentado pela teoria das probabilidades.

### 2.2.1 População e Amostra

**Definição 2.2.1.** *População estatística ou universo é o conjunto (finito ou infinito) de elementos que possuem pelo menos uma característica em comum e que são de interesse para o estudo. É população o conjunto dos eleitores no nosso país, as contas bancárias de um banco, o conjunto dos estudantes universitários no nosso país, etc. [27]*

A população pode ser dividida em duas partes: [27]

1. **População finita** é aquela em que é possível conhecer a quantidade de todos os elementos da população.

**Exemplo 2.3.** *Um estudo sobre todos os alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE) da Escola Secundária de Matola.*

2. **População infinita** é aquela população em que não é possível conhecer a quantidade de todos os elementos da mesma.

**Exemplo 2.4.** *Um estudo sobre espécies de peixes que frequentam uma certa zona no Oceano Índico.*

**Definição 2.4.1.** *Amostra é um subconjunto finito da população que é examinada com o propósito de levar conclusões sobre essa população. [27]*

As amostras são muito importantes na análise estatística, uma vez que, por razões económicas ou restrições de natureza física, não é possível observar todos os elementos de uma dada população. [33]

As razões económicas prendem-se com os custos de observação de toda a população, quer em termos de recursos humanos, quer em termos de recursos financeiros, quer mesmo relativamente à duração do estudo. [33]

**Observação 2.4.1.** *A quantidade dos elementos da população representa-se por  $N$  e para a amostra por  $n$ .*

**Exemplo 2.5. Medicina:** Pretende-se estudar o efeito de um novo medicamento para curar determinada doença. É seleccionado um grupo de 20 doentes, administrando-se o medicamento a esses doentes escolhidos ao acaso, e o medicamento habitual aos restantes.

Nota que, no exemplo em análise,  $N = \{\text{conjunto de todos os doentes com a doença que o medicamento a estudar pretende tratar}\}$ ;  $n = \{\text{conjunto de 20 doentes seleccionados e Problema} = \{\text{pretende-se, a partir dos resultados obtidos, realizar um teste de hipótese, para tomar uma decisão sobre qual dos medicamentos é melhor}\}$ .

## 2.6 Tipos de dados

**Definição 2.6.1.** *Variável* é uma condição ou característica das unidades da população; pode assumir valores diferentes em diferentes unidades. **Dados** são os valores da variável em estudo, obtidos por meio de uma amostra. [24], [23]

### 2.6.1 Dados qualitativos

**Definição 2.6.2.** *Dados qualitativos* representam a informação que identifica alguma qualidade, categoria ou característica, não susceptível de medida, mas de classificação, assumindo várias modalidades. [24]

Os dados do tipo qualitativo ainda se podem exprimir na *escala nominal* ou na *escala ordinal*: [24], [23], [1], [5]

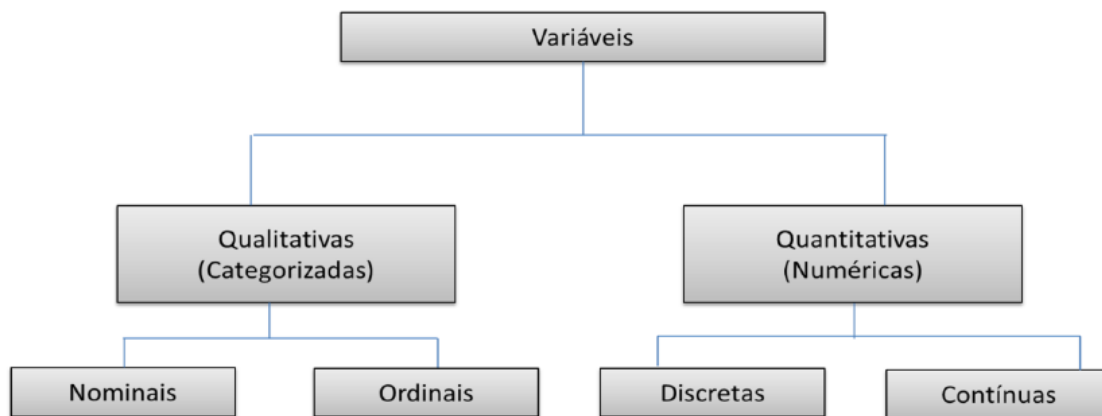
1. **A variável é nominal** quando os dados estão divididos por categorias que não possuem ordem. São variáveis nominais: *cor de cabelo (loiro, castanho, preto)*; *tipo de sangue (O, A, B, AB)*; *gênero (masculino e feminino)*, etc.
2. **A variável é ordinal** quando os dados são distribuídos em categorias mutuamente exclusivas que têm ordem natural. São variáveis ordinais: *escolaridade (primeiro grau, segundo grau, terceiro grau)*; *gravidade de uma doença (leve, moderada, severa)*; *opinião dos alunos sobre as aulas de estatística - muito boa, boa, razoável, má, muito má*; etc.

### 2.6.2 Dados quantitativos

**Definição 2.6.3.** *Dados quantitativos* representam a informação resultante de características susceptíveis de serem medidas, apresentando-se com diferentes intensidades. [24]

Os dados do tipo quantitativo ainda se podem exprimir em discretos e contínuos: [24], [23], [5]

1. A **variável discreta** só pode assumir alguns valores em um dado intervalo. São variáveis discretas: *número de filhos (0, 1, 2, 3, 4, etc.); quantidade de moedas num bolso (0, 1, 2, 3, etc.); número de alunos numa sala, etc.*
2. A **variável contínua** assume qualquer valor num dado intervalo. São variáveis contínuas: *peso, altura, tempo de espera, quantidade de chuva, temperatura, etc.*



**Figura 2.1:** Classificação de uma variável

## 2.7 Medidas Descritivas

É uma maneira de resumir os dados de uma variável quantitativa. Além de tabelas e gráficos, é apresentada em forma de valores numéricos. Estas medidas, se calculadas a partir de dados populacionais, são denominados *parâmetros*, e se calculadas a partir de dados amostrais, são denominadas *estimadores ou estatísticas*.

As medidas descritivas auxiliam a análise do comportamento dos dados, que podem ser provenientes de uma população ou de uma amostra, o que exige uma notação específica para cada caso. [18]

Medidas	Parâmetros	Estimadores
Número de elementos	$N$	$n$
Média	$\mu$	$\bar{X}$
Variância	$\sigma^2$	$S^2$
Desvio padrão	$\sigma$	$S$

**Tabela 2.1:** Notações de algumas estatísticas

Classificam-se as medidas descritivas como: medidas de posição (tendência central e separatrizes); medidas de dispersão; medidas de assimetria e de curtose. No presente trabalho, iremos abordar as medidas de posição e de dispersão.

## 2.7.1 Medidas de Tendência Central

São assim denominadas por indicarem um ponto em torno do qual se concentram os dados. Este ponto tende a ser o centro da distribuição dos dados. As mesmas subdividem-se em: média aritmética, mediana e moda.

### 1. Média Aritmética

**Definição 2.7.1.** A *média aritmética* ( $\bar{X}$ ) é a soma de todos os valores observados da variável dividida pelo número total de observações. Esta é a medida mais utilizada para representar o conjunto de dados. [18]

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  um conjunto de dados. A média é dada por:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

para dados populacionais ou amostrais, respectivamente. Caso os dados estejam apresentados segundo uma distribuição de frequências, tem-se:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N X_i f_i}{N} \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i f_i}{n}$$

Observe que, no caso de dados, a média é obtida a partir de uma população, onde os pesos são as frequências absolutas de cada classe e  $X_i$  é o ponto médio da classe  $i$ .

**Exemplo 2.8.** Considere o número de filhos, por família, para um grupo de 8 famílias: 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4. Neste caso, a média será calculada da seguinte forma:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^8 X_i}{8} = \frac{0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4}{8} = \frac{15}{8} = 1,875$$

filhos por família.

### 2. Moda

**Definição 2.8.1.** A *moda* ( $M_o$ ) é o valor que apresenta a maior frequência da variável entre os valores observados. [18]

Para o caso de valores individuais, a moda pode ser determinada imediatamente observando-se o rol ou a frequência absoluta dos dados. Por outro lado, em se tratando de uma distribuição de frequência de valores agrupados em classe, primeiramente é necessário identificar a classe modal, aquela que apresenta a maior frequência, e a seguir a moda é calculada aplicando-se a fórmula:

$$M_o = l_i + \frac{h(f_i - f_{i-1})}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}$$

Onde:

- $i$  é a ordem da classe modal;
- $l_i$  é o limite inferior da classe modal;
- $h$  é a amplitude da classe modal;
- $f_i$  é a frequência absoluta da classe modal;
- $f_{i-1}$  é a frequência absoluta da classe anterior à classe modal;
- $f_{i+1}$  é a frequência absoluta da classe posterior à classe modal.

**Observação 2.8.1.** *Um conjunto de dados pode apresentar todos seus elementos com a mesma frequência absoluta, e neste caso não existirá um valor modal, o que significa que a distribuição será classificada como amodal. Pode ocorrer casos em que a sequência de observações apresente vários elementos com frequência igual, implicando numa distribuição plurimodal. [18]*

A utilização da moda é que seu valor não é afectado pelos valores extremos do conjunto de dados analisados.

**Exemplo 2.9.** *Recorrendo ao exemplo do número de filhos por famílias, verificamos que a moda é 2, porque apresenta o maior valor da frequência absoluta neste conjunto de dados.*

Os critérios para a determinação do número de intervalos, denotado por  $K$ :

- $k = 5$ ;
- Raiz quadrada:  $k = \sqrt{n}$ ;
- Log (Sturges):  $k = 1 + 3,3 \log n$ ;
- ln (Milone):  $k = -1 + 2 \ln n$ ;
- $k = 1 + 10^d AT$ .

Adoptando o princípio de que os agrupados devem ter no mínimo 5 e no máximo 20 classes, o critério da raiz é válido para  $25 \leq n \leq 400$ ; o log para  $16 \leq n \leq 572.237$ ; e o ln para  $20 \leq n \leq 36.315$ . [18]

A amplitude de classe,  $h$ , é definida por  $h = \frac{AT}{k}$  e a amplitude total (AT) de um conjunto de dados é a diferença entre o maior e o menor valor deste:  $AT = X_{max} - X_{min}$ .

**Exemplo 2.10.** *Os seguintes dados referem-se aos gastos totais (em dólar) em petiscos e bebidas consumidos por 36 famílias em um domingo no campo de Costa de Sol, durante o Jogo Costa do Sol vs Textáfrica de Chimoio:*

5, 21, 26, 13, 14, 29, 12, 31, 5, 47, 18, 33,  
 23, 22, 37, 32, 7, 17, 15, 38, 20, 11, 26, 25,  
 27, 8, 24, 12, 39, 28, 9, 47, 19, 22, 42, 18.

Representamos os dados em uma tabela de frequências em classe.

Classe	$f_i$	$X_i$	$fr(\%)$	F	$Fr(\%)$
[5 - 12[	6	8,5	16,67	6	16,67
[12 - 19[	8	15,5	22,22	14	38,89
[19 - 26[	8	22,5	22,22	22	61,11
[26 - 33[	7	29,5	19,44	29	80,55
[33 - 40[	4	36,5	11,11	33	91,66
[40 - 47[	3	43,5	8,33	36	100
Total	36	–	100	–	–

**Tabela 2.2:** Gastos totais (dólar) em petiscos e bebidas

Notemos que, de acordo com a tabela,  $n = 36$ ;  $X_{max} = 47$ ;  $X_{min} = 5$ ;  $AT = X_{max} - X_{min} = 47 - 5 = 42$ ;  $k = \sqrt{n} = \sqrt{36} = 6$ ; e  $h = \frac{AT}{k} = \frac{42}{6} = 7$ . Consequentemente, a moda será calculada da seguinte forma:

$$M_o = l_i + \frac{h(f_i - f_{i-1})}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} = 19 + \frac{7(8 - 8)}{(8 - 8) + (8 - 7)} = 19.$$

A moda dos gastos totais (dólar) em petiscos e bebidas consumidas por 36 famílias.

### 2.10.1 Mediana

**Definição 2.10.1.** *A mediana ( $M_d$ ) é o valor que ocupa a posição central da série de observações de uma variável, em rol, dividindo o conjunto em duas partes iguais, ou seja, a quantidade de valores inferiores à mediana é igual à quantidade de valores superiores à mesma. [18]*

**Observação 2.10.1.** *Se o conjunto de observações tiver  $n$  elementos, então a posição da mediana determina-se pela fórmula a seguir:*

$$Med = \begin{cases} X\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ \frac{X\left(\frac{n}{2}\right) + X\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{2}, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

**Exemplo 2.11.** *Dado o conjunto de valores:*

$$5, 13, 10, 2, 18, 15, 6, 16, 9, 8, 13, 12, 7, 11, 3$$

*Para localizar o valor mediano, primeiro, vamos ordenar os dados em ordem crescente. Como  $n$  é ímpar ( $n = 15$ ), a posição em que se encontra o valor mediano será:*

$$X\left(\frac{n+1}{2}\right) = X\left(\frac{15+1}{2}\right) = X\left(\frac{16}{2}\right) = X_8$$

*Portanto, o valor mediano está na posição 8. Vejamos:*

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°
2	3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13	15	16	18

**Exemplo 2.12.** *Recorrendo ao exemplo do número de filhos por famílias, verificamos que  $n = 8$ , a mediana é determinada como:*

$$Md = \frac{(X_4 + X_5)}{2} = \frac{(2 + 2)}{2} = 2.$$

Para os dados em distribuição de frequência em classe, tem-se:

$$Md = l_i + \frac{h(p - F_{a_{i-1}})}{F_i}$$

Onde:

- $p = \frac{n}{2}$  indica a posição central da série;
- $i$  é a ordem da classe que contém o menor valor  $F_{a_i}$ , tal que  $F_{a_i} \geq p$ ;
- $F_{a_i}$  é a frequência acumulada da classe anterior à mediana.

**Exemplo 2.13.** *Recorrendo os dados da tabela 3.2, achemos o valor da mediana: primeiro calcula-se  $p = \frac{n}{2} = \frac{36}{2} = 18$ ,*

$$Md = l_i + \frac{h(p - F_{a_{i-1}})}{F_i} = 19 + \frac{7(18 - 14)}{22} = 19 + \frac{7 \times 4}{22} = 19 + \frac{14}{11} \approx 20,27.$$

### 2.13.1 Medidas de Separatrizes

São valores que ocupam determinados lugares de uma distribuição de frequência, ou em rol, dividindo os dados em partes iguais e podem ser divididos em: quartil, decil e percentil. No presente trabalho, abordar-se-á apenas da primeira medida, visto que serve de pré-requisito para a subseção subsequente.

#### 1. Quartil

**Definição 2.13.1.** *Os quartis dividem a distribuição em quatro partes iguais.*

$$Q_i = \text{quartil}, i = 1, 2, 3. [18], [8]$$

Notação	Interpretação	Posição
$Q_1$	25% dos dados são valores menores ou igual ao valor do primeiro quartil	$p = 0,25(n + 1)$
$Q_2$	50% dos dados são valores menores ou igual ao valor do segundo quartil	$p = 0,50(n + 1)$
$Q_3$	25% dos dados são valores menores ou igual ao valor do terceiro quartil	$p = 0,75(n + 1)$

**Tabela 2.3:** Descrição dos quartis (amostrais)

### 2.13.2 Medidas de Dispersão

São medidas estatísticas utilizadas para avaliar o grau de variabilidade, ou dispersão, dos valores em torno da média. As medidas de dispersão auxiliam as medidas de tendência central a descrever o conjunto de dados adequadamente, indicando se os dados estão, ou não, próximos uns dos outros. [18], [8]

Desta forma, não há sentido calcular a média de um conjunto onde não há variação dos seus elementos. Existe ausência de dispersão e a medida de dispersão é igual a zero. Por outro lado, aumentando-se a dispersão, o valor da mediana aumenta, e se a variação for muito grande, a média não será uma medida de tendência central respectivamente.

As quatro medidas de dispersão que serão definidas a seguir são: *amplitude total*, *amplitude interquartilica*, *desvio padrão*, e *variância*, assim como, *coeficiente de variação (CV)* que é uma medida relativa. Com exceção da primeira, todas têm como ponto de referência a média.

#### 1. Amplitude total

**Definição 2.13.2.** *A amplitude total (AT) é a diferença entre o maior e o menor dos valores da série. A utilização desta como medida de dispersão é limitada, pois, sendo uma medida que depende apenas dos valores extremos, não é afectada pela dispersão dos valores. [8]*

$$A_t = X_{max} - X_{min}$$

**Exemplo 2.14.** *Recorrendo ao exemplo do número de filhos, temos que  $X_{min} = 0$  e  $X_{max} = 4$ , portanto a amplitude total será calculada da seguinte forma:*

$$A_t = X_{max} - X_{min} = 4 - 0 = 4.$$

## 2. Amplitude interquartílica

**Definição 2.14.1.** *A amplitude interquartílica é a diferença entre o terceiro e o primeiro quartil. Esta medida é mais estável que a amplitude total por não considerar os valores mais extremos. Esta medida abrange 50% dos dados e é útil para detectar valores discrepantes. [8]*

$$d_q = Q_3 - Q_1$$

Por outro lado, a amplitude semi-interquartílica é definida como a média aritmética da diferença entre a mediana e os quartis.

## 3. Variância

**Definição 2.14.2.** *A variância leva em consideração os valores extremos e os valores intermediários, isto é, expressa melhor os resultados obtidos. A variância relaciona os desvios em torno da média. [8]*

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}{N} \quad \text{ou} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Se os dados são populacionais ou amostrais, respectivamente. Caso os dados estejam apresentados segundo uma distribuição de frequência, têm-se:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 F_i}{N} \quad \text{ou} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 F_i}{n - 1}$$

## 4. Desvio Padrão

**Definição 2.14.3.** *O desvio padrão é a medida mais utilizada na comparação de diferenças entre conjuntos de dados, por ter grande precisão. Esta determina a dispersão dos valores em relação à média e é calculada por meio da raiz quadrada da variância. [8], [18]*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2}{N}} \quad \text{ou} \quad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Se os dados são populacionais ou amostrais, respectivamente, e se tiverem em distribuição de frequência.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 F_i}{N}} \quad \text{ou} \quad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 F_i}{n - 1}}$$

## 5. Coeficiente de Variação

**Definição 2.14.4.** *O Coeficiente de Variação (CV) é uma medida relativa de dispersão útil para comparação em termos relativos de grau de concentração. Esta é a relação entre o desvio padrão (S) e a média  $\bar{x}$ .*

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\%$$

# Capítulo 3

## Introdução à probabilidade

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos do trabalho que servirão de chave para a compreensão. Começamos por apresentar a história e evolução da probabilidade na secção (3.1). Na secção (3.2) damos os conceitos básicos da probabilidade. Na secção (3.3) damos o conceito de espaço amostral e evento. Na secção (3.4) abordamos a definição de probabilidade. Na secção (3.5) damos as regras básicas de probabilidade. Na secção (3.6) damos o teorema de Bayes. Para leituras adicionais, vide [26], [12], [24], [27], [19], [10], [1], [14], [13], [7], [29], [11] e [9].

### 3.1 História e Evolução de Probabilidade

Podemos relacionar a origem da probabilidade com alguns interesses dos homens em obter para si alguma espécie de vantagem. Assim, ao falarmos sobre a origem da probabilidade, supõe-se que tudo pode ter se originado com os jogos de azar, ainda na Idade Média. Alguns historiadores acreditam que tudo começou com um antigo que tinha por nome Chevalier Méré, onde se acreditava que enviava problemas para Blaise Pascal<sup>1</sup> que envolviam a parte teórica sobre probabilidade. Já para outros dois matemáticos, Pascal e Pierre de Fermat<sup>2</sup>, eles trocavam correspondências e debatiam sobre cálculos que envolviam apostas, também na Idade Média.

São diversas as correntes que debatem a real origem da probabilidade. Mas existe uma em que se discute que tudo teve origem na Itália no século XVI com Gerolamo Cardano<sup>3</sup>, o qual resolveu estudar as probabilidades de ganhar diversos jogos de azar. A partir destes resultados, publicou um manual para jogadores, *Liber de ludo aleae*, conhecido como livro dos jogos de azar em 1526, mas não formulou conceitos ou teoremas, dedicando-se assim apenas a resolver problemas que envolviam dados e números. [26]

Outro italiano que contribuiu para a origem da probabilidade foi Luca Pacioli<sup>4</sup>. O trabalho que

---

<sup>1</sup>Blaise Pascal, 1623 a 1662 - matemático francês

<sup>2</sup>Pierre de Fermat, 1601 a 1665 - matemático francês

<sup>3</sup>Gerolamo Cardano, 1501 a 1576 - matemático italiano

<sup>4</sup>Luca Bartolomeo de Pacioli, 1445 a 1517 - matemático italiano

colocou na história do desenvolvimento da probabilidade foi o *Summa de arithmetica*, Geometria ou simplesmente Summa (1494). Este trabalho apresentava conteúdo de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria e é o primeiro autor conhecido que estudou os jogos de azar.

Pacioli estudou o problema dos pontos, ou seja, divisão das apostas, em que ele propôs o seguinte: dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da bola. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio? Embora sua solução tenha sido incorrecta, este problema foi o que Pascal e Fermat veriam solucionar mais tarde e que é considerado, de facto, o início da Teoria da Probabilidade.

O francês Pascal encontrou uma solução para o problema dos pontos e a comunicou por carta ao também francês Fermat. Os dois matemáticos são os responsáveis por estabelecer as bases da teoria do cálculo probabilístico e inúmeras hipóteses foram levantadas envolvendo possíveis resultados, marcando o início da Teoria das Probabilidades como ciência.

Percebe-se que originalmente o cálculo de probabilidade era voltado para a previsão de ganhar em jogos de azar. Nos dias actuais, a probabilidade está presente em diversas áreas como Economia, Informática, Física e Biologia.

Ao iniciarmos essa discussão, há evidências de que os jogos de azar surgiram há aproximadamente 40 mil anos. Uma das histórias contadas é que a probabilidade adveio dos jogos de azar, ainda na Idade Média, por meio de apostas. Estudiosos como Galileu Galilei<sup>1</sup>, Niccolò Tartaglia<sup>2</sup>, Cardano e outros foram uns dos primeiros estudiosos que começaram a trabalhar com jogos de dados.

Para tanto, dois matemáticos, Pascal e Fermat, iniciaram os estudos dos Cálculos da Probabilidade, assim dando ramificações à Teoria da Probabilidade.

**Os jogos de azar** são aqueles em que a perda ou o ganho dependem mais da sorte do que do cálculo. Estes jogos estão relacionados às probabilidades e possibilidades. Temos como exemplos desses jogos o bingo, a roleta, jogos de baralho, biólogo, etc. [26].

Os jogos de azar já existem há muito tempo em nossa civilização, sendo mais conhecidos pelo *jogo do osso*, que era feito da pata de animais, e o jogo de dados, que adveio do primeiro. Esses jogos, além de servir como apostas, eram usados para tomar algumas decisões, como repartir heranças, discutir sobre o futuro, entre outros casos.

Acredita-se que o caso registado mais antigo sobre esses jogos de azar foi o do bispo Wibold, que no ano 950 d.C. surgiu com um jogo religioso em que, a cada um dos 56 possíveis resultados do lance de 3 dados, era atribuída uma penitência à prática de uma virtude correspondente.

Apesar de ser denominado jogo de azar, alguns estudiosos acreditavam que eles traziam em si os cálculos, a matemática enraizada na sua essência, e por suspeitarem disso, ficaram inquietos e começaram a propor situações que envolviam jogos com o objectivo de resolver problemas probabilísticos. Em 1653, Chevalier de Méré, conhecido também como o filósofo do jogo, começou a estudar

<sup>1</sup>Galileo di Vincenzo Bonauti de Galilei, 1564 a 1642 - astrónomo, físico e matemático florentino

<sup>2</sup>Niccolò Fontana Tartaglia, 1499 a 1557 - matemático italiano

Matemática, sendo ele um dos primeiros a ramificar o elo entre a probabilidade e os jogos de azar.

No século XX, Andrei Kolmogorov<sup>1</sup> é considerado o grande expoente da Teoria das Probabilidades, pois em 1933, estabelece no seu livro *Foundations of Probability* os fundamentos da teoria moderna da probabilidade [12].

A vantagem do modelo de Kolmogorov é a de ligar logicamente o cálculo das probabilidades à Teoria de Medidas e do Integral. Foi introduzido nas probabilidades o rigor do raciocínio matemático e dadas as bases de uma formulação homogênea e coerente desta ciência.

## 3.2 Conceitos Básicos de Probabilidade

**Definição 3.2.1.** *Os fenômenos aleatórios são aqueles cujos resultados individuais são incertos, possibilitando um padrão genérico de comportamento.* [24]

**Exemplo 3.3.** *Associados às seguintes experiências, temos os seguintes exemplos de fenômenos considerados aleatórios:*

1. Estado do tempo no dia seguinte;
2. Comportamento de um aluno no exame de resposta múltipla, para o qual não estudou.

**Definição 3.3.1.** *Um experimento aleatório é um processo que apresenta variedades em seus resultados, isto é, repetindo-se o experimento sob as mesmas condições, os resultados são diferentes.* [19], [10]

**Exemplo 3.4.** *Consideremos os experimentos que consistem em:*

1. Lançar um dado e observar o número da face de cima;
2. Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidos;
3. De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V) e 2 bolas brancas (B), seleccionar uma bola e observar a sua cor.

## 3.5 Espaço amostral e evento

**Definição 3.5.1.** *Um espaço amostral é o conjunto não vazio de todos os resultados possíveis, associados à realização de um experimento aleatório. O espaço amostral é representado por  $\Omega$ ,  $S$  ou  $E$ .* [1], [14]

---

<sup>1</sup> Andrei Kolmogorov, 1903 a 1987 - matemático russo

**Observação 3.5.1.** Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando seus elementos têm a mesma chance de ocorrer.

**Exemplo 3.6.** Determine o espaço amostral no lançamento de dois dados. No lançamento de dois dados, observa-se o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

**Exemplo 3.7.** Determine o espaço amostral no lançamento de três moedas. Notemos que uma moeda têm duas faces que são cara (C) e coroa (K):

$$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K), (K, K, K)\}.$$

**Definição 3.7.1.** Um *evento* é todo subconjunto de  $\Omega$  (espaço amostral). Indicamos um evento por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, ..., X, Y, Z. [19], [27]

**Exemplo 3.8.** Dado o espaço amostral do lançamento de um dado, determine os seguintes eventos:

- $A = \{\text{sair número par}\};$
- $B = \{\text{sair número ímpar}\};$
- $C = \{\text{sair número menor ou igual a 6}\};$
- $D = \{\text{sair número maior ou igual a 7}\}.$

Sabe-se que um dado tem 6 faces enumeradas de 1 a 6 e  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :

1. Evento  $A = \{2, 4, 6\};$
2. Evento  $B = \{1, 3, 5\};$
3. Evento  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$
4. Evento  $D = \emptyset.$

Assim, quaisquer que sejam os eventos A, B e C, estão contidos em  $\Omega$ , então A, B e C pertencem a  $\Omega$ .

### 3.8.1 Tipos de eventos

Os eventos podem ser classificados em:

**Definição 3.8.1.** *Evento simples ou elementar* é um evento formado por um elemento do espaço amostral  $n(A) = 1$ . [27]

**Exemplo 3.9.** No lançamento de um dado, considere o evento  $K = \{\text{sair um número menor que } 2\}$ . Como  $\Omega$  é composto pelos seguintes elementos  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e o único elemento do  $\Omega$  menor que 2 é 1, logo  $K = \{1\}$ , portanto  $K$  é um evento elementar porque possui somente um elemento.

**Definição 3.9.1.** *Evento certo* é um evento igual ao espaço amostral ( $A = \Omega$ ).

**Exemplo 3.10.** No lançamento de um dado, considere o evento  $M = \{\text{sair um número menor ou igual a } 6\}$ . Notemos que todos os elementos do espaço amostral são menores ou iguais a 6. Então o evento  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $M$  é evento certo porque possui todos os elementos do espaço amostral.

**Definição 3.10.1.** *Evento impossível* é um evento que nunca ocorre. ( $A = \emptyset$ ) ou  $n(A) = 0$ . [19]

**Exemplo 3.11.** No lançamento de um dado, consideremos o evento  $T$ : sair um número maior ou igual a 7. O espaço amostral referente ao lançamento de um dado não tem nenhum número maior ou igual a 7, logo ( $T = \emptyset$ ).  $T$  é evento impossível.

### 3.11.1 Operações com eventos

Se usarmos certas operações entre conjuntos (eventos), podemos combinar conjuntos para formar novos eventos.

**Definição 3.11.1.** *Evento complementar:* o evento complementar (ou contrário) de  $A$ , denotado por  $A^c$ , é o conjunto de todos os elementos do espaço amostral  $\Omega$ , que não pertencem a  $A$ , ou seja, ocorre quando o evento  $A$  não ocorre. [27]

**Definição 3.11.2.** *Evento união ou reunião:* sejam dados dois eventos  $A$  e  $B$ , do espaço amostral  $\Omega$ . O evento  $A \cup B$  é um novo evento e ocorre quando  $A$ , ou o evento  $B$ , ou os dois eventos ocorrerem. [1]

**Definição 3.11.3.** *Evento intersecção:* sejam dados dois eventos  $A$  e  $B$  do espaço amostral  $\Omega$ . O evento  $A \cap B$  é um novo evento e ocorre quando  $A$  e o evento  $B$  ocorrerem simultaneamente. [1]

**Exemplo 3.12.** Um dado é lançado e é observado o número da face de cima.  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

- Evento  $A$ : ocorrência de número par;
- Evento  $B$ : ocorrência de número maior ou igual a 4;
- Evento  $C$ : ocorrência de número ímpar.

Determine:

1. Evento  $A \cap B$ : ocorrência de número par e um número maior ou igual a 4;
2. Evento  $A \cap C$ : ocorrência de número par e um número ímpar;
3. Evento  $A^c \cap B^c$ : ocorrência de número não par e um número menor que 4.

Notemos que os eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$  possuem os seguintes elementos:

1. Evento  $A = \{2, 4, 6\}$ ;
2. Evento  $B = \{4, 5, 6\}$ ;
3. Evento  $C = \{1, 3, 5\}$ .

1.  $A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$ . Logo o evento  $A \cap B = \{4, 6\}$ ;
2.  $A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset$ . O evento  $A \cap C = \emptyset$ ; portanto o evento  $A^c = \{1, 3, 5\}$ ;
3.  $A^c \cap B^c = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$ . Logo o evento  $A^c \cap B^c = \{1, 3\}$ .

**Definição 3.12.1.** *Evento mutuamente exclusivos, disjuntos ou incompatíveis:* dois eventos são mutuamente exclusivos quando não podem ocorrer simultaneamente. Assim, se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, então  $A \cap B = \emptyset$ . [19]; [27]

**Exemplo 3.13.** *Veja o seguinte experimento: lançamento de uma moeda e observar-se o resultado. Consideremos que cara ( $C$ ) e coroa ( $K$ ) do espaço amostral.*

$$\Omega = \{C, K\}$$

Determine:

1. Evento  $A$ : ocorre a cara;
2. Evento  $B$ : ocorre a coroa;
3. Evento  $A \cap B$ .

Descrevendo os eventos, teremos:

1.  $A = \{C\}$ ;
2.  $B = \{K\}$ ;
3.  $A \cap B = \{C\} \cap \{K\} = \emptyset$ . Portanto, os eventos  $A$  e  $B$  são disjuntos.

**Definição 3.13.1. Evento independente:** Dizemos que dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes quando a probabilidade da ocorrência simultânea dos dois eventos for igual ao produto entre as probabilidades. Ou seja, se dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes, então temos. [13]

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

## 3.14 Definição de probabilidade

Tendo reunido os pré-requisitos suficientes para esta secção, agora abordamos o conceito de probabilidade. Este é um conceito muito relevante para o trabalho. De seguida, apresentam-se apenas as definições:

- Clássica ou a priori ( $\Omega$  finito);
- Frequencista ou a posteriori;
- Axiomática.

### 3.14.1 Definição clássica ou de Laplace no $\Omega$ finito

Em 1812, Laplace apresenta esta definição da seguinte forma:

**Definição 3.14.1.** A *probabilidade de um acontecimento* é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, todos os casos supostos igualmente prováveis.[14],[7]

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis de } A}{\text{número de casos possíveis de } \Omega} \implies P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (3.1)$$

Nesta definição, estamos supondo que  $n(\Omega) > 0$ , ou seja, que  $\Omega$  tenha algum elemento, pois, se não tivesse, não teríamos o que estudar. Nota-se que esta definição se baseia em duas hipóteses:

1. Há um número finito de eventos elementares, isto é,  $\Omega$  é um conjunto finito;
2. Os eventos elementares são igualmente prováveis.

**Exemplo 3.15.** No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de sair um número maior do que 4?

Notemos que  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies n(\Omega) = 6$ . Evento A:  $A = \{5, 6\} \implies n(A) = 2$ .

A_1 (Numero de casos favoraveis)	A_2 (numero de casos possiveis)	Probabilidade
2	6	0.3333333333

**Figura 3.1:** Probabilidade de sair número maior que 4 no lançamento de um dado

**Exemplo 3.16.** Lançam-se dois dados. Qual a probabilidade de cada um dos acontecimentos:

1. A pontuação dos dois dados é igual?
2. O produto da pontuação dos dois dados é 40?

Notemos que

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$n(\Omega) = 36$$

1. O evento A:  $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} \implies n(A) = 6;$

Portanto, utilizando software Excel.

A_1 (Numero de casos favoraveis)	A_2 (Numero de casos possiveis)	Probabilidade
6	36	0.1666666667

**Figura 3.2:** Probabilidade de sair a pontuação igual em dois dados

O evento B:  $B = \emptyset \implies n(B) = 0;$  logo, calculando a probabilidade.

A_1 (Numero de casos favoraveis)	A_2 (Numero de casos possiveis)	Probabilidade
0	36	0

**Figura 3.3:** Probabilidade de sair o produto da pontuação dos dois dados igual a 40

### 3.16.1 Definição frequencista de probabilidade

O conceito frequencista de probabilidade é utilizado em experiências aleatórias e independentes que possuem resultados que não são equiprováveis.

**Definição 3.16.1.** *Seja  $n(A)$  o número de vezes que o acontecimento  $A$  ocorre em  $n$  repetições de uma dada experiência, então:[7]*

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} \tag{3.2}$$

A frequência relativa tende a estabilizar-se em torno de um valor que os frequencistas tomam como o valor aproximado da probabilidade  $P(A)$ .

**Exemplo 3.17.** *Suponhamos que lança um dado 1000 vezes e verifica a face que ficou voltada para cima, tendo obtido os seguintes resultados.*

Face	Frequência Absoluta	Probabilidade
1	159	0,159
2	163	0,163
3	160	0,16
4	161	0,161
5	86	0,086
6	271	0,27
Total	1000	1

**Tabela 3.1:** Lançamento de um dado 1000 vezes

Perante os resultados anteriores, somos levados a seguir o seguinte modelo de probabilidade para o fenómeno aleatório que consiste em verificar qual a face que sai no lançamento de um dado.

Face	Probabilidade
1	0,16
2	0,16
3	0,16
4	0,16
5	0,09
6	0,27
Total	1

**Tabela 3.2:** Probabilidade da face virada para cima no lançamento de um dado

Os resultados levam-nos ainda a concluir que estamos perante um dado *viciado*, pois as faces não têm todas a mesma probabilidade de saírem, como seria de esperar que o dado fosse *equilibrado*.

### 3.17.1 Definição axiomática de probabilidade no espaço finito

As probabilidades são definidas com base em um conjunto de regras, ou axiomas, que devem satisfazer (Axiomática simplificada de Kolmogorov).

**Definição 3.17.1.** *Seja  $\Omega$  o espaço de acontecimentos e  $\mathcal{P}(\Omega)$  o conjunto das suas partes ou partições. A probabilidade é uma função que associa a cada evento  $A$  em  $\mathcal{P}(\Omega)$  um número real  $P(A)$  no intervalo  $[0, 1]$  e que satisfaz os seguintes axiomas:[7],[1]*

**Axioma 3.17.1.** - *A probabilidade de qualquer acontecimento  $A$  do conjunto  $\mathcal{P}(\Omega)$  é um número compreendido entre zero e um.*

$$0 \leq P(A) \leq 1, \text{ com } A \subseteq \Omega$$

**Axioma 3.17.2.** - *A probabilidade do acontecimento certo é 1.*

$$P(\Omega) = 1, \text{ sendo } \Omega \text{ o espaço de acontecimentos.}$$

**Axioma 3.17.3.** - *A probabilidade da reunião de dois acontecimentos incompatíveis (disjuntos) é igual à soma das probabilidades desses acontecimentos.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ se } A \cap B = \emptyset$$

**Exemplo 3.18.** *Uma urna contém 20 bolas vermelhas e 30 bolas brancas. Extrai-se uma bola ao acaso. Qual a probabilidade de que saia:*

1. *Uma bola vermelha?*
2. *Uma bola branca?*
3. *Uma bola vermelha ou branca?*

Notemos que  $\Omega = 20 + 30 = 50$  bolas  $\implies n(\Omega) = 50$ .

1. Evento  $V$ :  $V = 20$  bolas  $\implies n(V) = 20$

Portanto,

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} \implies P(V) = \frac{20}{50} \implies P(V) = \frac{2}{5} \implies P(V) = 0,4.$$

2. Evento  $B$ :  $B = 30$  bolas  $\implies n(B) = 30$ ;

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \implies P(B) = \frac{30}{50} \implies P(B) = \frac{3}{5} \implies P(B) = 0,6.$$

3. Evento  $V \cup B = 50$  bolas  $\implies n(V \cup B) = 50$ .

$$P(V \cup B) = P(V) + P(B) - P(V \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - 0 = \frac{5}{5} = 1$$

Uma vez que  $V$  e  $B$  são conjuntos disjuntos. Também é notório que todas as probabilidades deste exemplo cumprem com todos os axiomas acima indicados. Estes axiomas nos permitem deduzir as seguintes propriedades: [7], [1]

**Teorema 3.18.1.** *A probabilidade do acontecimento  $A^c$  (não  $A$ ) é igual a 1 menos a probabilidade do acontecimento  $A$ .*

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

**Demonstração 3.18.1.** *De fato, temos que  $\Omega = A \cup A^c$ . Assim,  $P(\Omega) = P(A \cup A^c)$ . Pelo axioma 2, temos que  $1 = P(\Omega)$  e pelo axioma 3 temos  $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ . Logo,  $1 = P(A) + P(A^c)$ , de onde se conclui que  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .  $\square$*

**Teorema 3.18.2.** *A probabilidade do acontecimento impossível é zero.*

$$P(\emptyset) = 0$$

**Demonstração 3.18.2.** *De fato, temos que  $\emptyset = \Omega^c$ . Assim,  $P(\emptyset) = P(\Omega^c)$  portanto,  $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$ .  $\square$*

**Teorema 3.18.3.** *Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são acontecimentos incompatíveis dois a dois, então:*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

**Demonstração 3.18.3.** *De fato, temos que  $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ . Assim*

$$P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C). \quad \square$$

**Teorema 3.18.4.** *Sendo  $A$  e  $B$  dois acontecimentos quaisquer, tem-se:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Demonstração 3.18.4.** Temos que  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ .

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

$$\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad \square$$

**Teorema 3.18.5.** Se  $A = \Omega$ , então  $P(A) = 1$ .

**Demonstração 3.18.5.** De fato, se  $A = \Omega$ , então  $P(A) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1. \quad \square$

**Exemplo 3.19.** No lançamento de duas moedas distinguíveis, temos que o espaço amostral é  $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ . Onde  $C$  é cara e  $K$  é coroa. Qual é a probabilidade do evento  $A$ : observar pelo menos uma cara?

$$\text{Evento } A: A = \{(C, C), (C, K), (K, C)\} \implies n(A) = 3$$

$$\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\} \implies n(\Omega) = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

**Teorema 3.19.1.** Se  $A \subset B$ , então  $P(A) \leq P(B)$ .

**Demonstração 3.19.1.** 1. Se  $A = B$ , por definição  $P(A) = P(B)$  e, portanto,  $P(A) \leq P(B)$ .

2. Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos quaisquer, Então  $P(A)$  e  $P(B)$ . Como

$$P(A) \geq 0$$

e

$$P(B) \geq 0$$

$$\implies P(A) \leq P(B)$$

3. No caso particular de  $A = \emptyset$ , temos  $P(A) = 0$  e  $P(B) \geq 0$ , e, portanto,  $P(A) \leq P(B)$ .  $\square$

**Teorema 3.19.2.** Se  $A$  é um evento, então  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

**Demonstração 3.19.2.** Temos que  $\emptyset \subset A \subset \Omega$ , assim  $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$  e  $0 \leq P(A) \leq 1$ .  $\square$

**Teorema 3.19.3.** Para todo  $A, B \in \gamma$ ,  $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ .

**Demonstração 3.19.3.** Temos que:  $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$

$$P[(A \cap B^c) \cup (A \cap B)] = P(A)$$

$$P(A \cap B^c) + P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \quad \square$$

### 3.19.1 Definição axiomática de probabilidade no espaço infinito

**Definição 3.19.1.** *Seja  $\mathcal{F}$  um conjunto de subconjuntos de  $\Omega$ . Diz-se que  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra se satisfaz: [28]*

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;
2. se  $A \in \mathcal{F}$ ; então  $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
3. se  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

Uma  $\sigma$ -álgebra é utilizada para definir o espaço de eventos sobre o qual a probabilidade pode ser medida.

**Definição 3.19.2.** *A medida de probabilidade  $P$  é uma função  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , satisfazendo:[22]*

**Axioma 3.19.1.**

$$P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$$

**Axioma 3.19.2.**  $P[\Omega] = 1$ ;

**Axioma 3.19.3.** *Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  são disjuntos dois a dois, isto é,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ , então*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

A última condição da definição anterior chama-se  $\sigma$ -aditividade da medida  $P$ . A medida de probabilidade quantifica a incerteza associada a esses eventos definidos pela  $\sigma$ -álgebra.

## 3.20 Espaço de Probabilidade

**Definição 3.20.1.** *Um espaço de probabilidade é uma tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , com  $\mu(\Omega) = 1$ . Neste caso denotamos a medida  $\mu$  por  $P$ , onde  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  e  $P$  uma medida de probabilidade: [6]*

- Os elementos  $\sigma$ -álgebra é representada por  $\mathcal{F}$  são eventos;
- A cada  $A \in \mathcal{F}$  associamos sua probabilidade  $P(A)$ ;
- Uma função mensurável  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de variável aleatória (v.a.).

**Definição 3.20.2.** *Seja  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  um conjunto finito. Este espaço é chamado de espaço finito e  $X = (x_i)_{i=1}^n$  designa-se uma variável aleatória discreta. A função massa de probabilidade,  $f(x)$ , da v. a.  $X$  designa a probabilidade dessa variável tomar cada um dos valores do seu domínio  $D$ , i. e.: [22]*

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{se } x \in D; \\ 0, & \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

Com as seguintes propriedades:

1. A probabilidade de cada valor deve estar entre 0 e 1:

$$0 \leq p(x_i) \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

2. A soma de todas as probabilidades é igual a 1:

$$\sum_i p(x_i) = 1 \quad (3.4)$$

**Definição 3.20.3.** A *função de distribuição*,  $F(x)$ , da v. a.  $X$  corresponde à acumulação da função de probabilidade para cada valor do domínio  $D$  da variável, i. e.: [1]

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \leq x} f(i).$$

**Propriedade 3.20.1.** *Propriedades de  $F(x)$* : A função  $F(x)$  tem que satisfazer as seguintes condições:

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$ , qualquer que seja o valor de  $x$ ;
2.  $F(x_1) \leq F(x_2)$ , quaisquer que sejam  $x_1$  e  $x_2$  com  $x_1 < x_2$ , i. e.,  $F(x)$  é uma função monótona não decrescente;
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;
4.  $F(x)$  é contínua à direita;
5.  $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ , quaisquer que sejam  $x_1$  e  $x_2$  com  $x_1 < x_2$ .

**Definição 3.20.4.** Se  $X$  é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade  $p(x_i)$ , então a esperança ou valor esperado de  $X$ , representada por  $E[X]$ , é definida por [24]

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad (3.5)$$

**Observação 3.20.1.** Sejam  $a$  e  $b$  duas constantes quaisquer e  $h(X) = a + bX$ , então

$$\begin{aligned}
 E(a + bX) &= \sum_i (a + bX)P(x_i) \\
 &= \sum_i (aP(x_i) + bx_iP(x_i)) \\
 &= \sum_i aP(x_i) + \sum_i bx_iP(x_i) \\
 &= a \sum_i P(x_i) + b \sum_i x_iP(x_i) \\
 &= a + bE(X)
 \end{aligned}$$

**Definição 3.20.5.** Uma variável aleatória  $X$  diz-se contínua se for definida num espaço de probabilidade  $S$  não enumerável. Neste caso, a função medida de probabilidade é uma função  $f$  contínua e [22]

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \forall a, b \in S : a < b.$$

A função  $f$  chama-se função densidade de probabilidade e satisfaz:

1.  $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in S;$
2.  $\int_S f(x) dx = 1.$

**Definição 3.20.6.** Se  $X$  é uma variável aleatória contínua com função de probabilidade  $f(x)$ , então o valor esperado de  $X$  é definido por [22]

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \tag{3.6}$$

**Definição 3.20.7.** Se  $X$  é uma variável aleatória com média  $E[X]$ , então a variância de  $X$ , representada por  $Var[X]$ , é definida por [22]

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{3.7}$$

## 3.21 Regras básicas de probabilidade

### 3.21.1 Regra de adição

**Definição 3.21.1.** O método usado para calcular a probabilidade de união de dois eventos é denominado **regra de adição**. Portanto, para calcular esta probabilidade, somamos suas probabilidades e desse total subtraímos suas probabilidades conjuntas. [14], [10]

- Se  $A$  e  $B$  forem eventos mutuamente exclusivos, o valor de  $P(A \cup B)$  será calculado por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ porque } P(A \cap B) = 0.$$

- Se  $A$  e  $B$  forem eventos não mutuamente exclusivos, o valor de  $P(A \cup B)$  será calculado por:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . Sendo  $P(A \cap B) = P(A \text{ e } B)$ ,  $A \cap B$  significa ocorrer os dois eventos simultaneamente.

**Exemplo 3.22.** Qual é a probabilidade de sair 5 ou 6 quando se joga um dado?

Evento  $A = \{\text{sair } 5\} \implies n(A) = 1$ ; Evento  $B = \{\text{sair } 6\} \implies n(B) = 1$  e  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies n(\Omega) = 6$ .

$$A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) \implies P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \implies P(A \cup B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

### 3.22.1 Probabilidade condicional

**Definição 3.22.1.** A *probabilidade condicional* representa a probabilidade de que um evento venha a ocorrer, sabendo-se que outro evento já tenha ocorrido. Caso  $A$  e  $B$  sejam dois eventos, a probabilidade condicional de  $A$ , dado que  $B$  ocorreu, é escrita como  $P(A|B)$  e lida como probabilidade de  $A$ , considerando-se que  $B$  já ocorreu. [1], [14]

Dados dois eventos  $A$  e  $B$  associados ao mesmo espaço amostral  $\Omega$ , se  $P(B) > 0$ , então a probabilidade de ocorrência do evento  $A$  condicionado à ocorrência do evento  $B$  é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0 \tag{3.8}$$

A probabilidade condicional define uma lei de probabilidade, ou seja, a função que associa a cada evento  $A$  de  $\Omega$  o número  $P(A|B)$  satisfaz os axiomas de probabilidade. [10]

**Axioma 3.22.1.**  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ ,  
pois  $P(A \cap B) \geq 0$  e  $P(B) > 0$ .

**Axioma 3.22.2.**  $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Na verdade, como  $P(B|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ .

**Axioma 3.22.3.** Sejam  $A_1$  e  $A_2$  dois eventos mutuamente exclusivos.

Então  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

**Exemplo 3.23.** Na Universidade Eduardo Mondlane, 60% dos alunos estudam Matemática, 20% estudam Física e 10% estudam Matemática e Física. Seleccionou-se aleatoriamente um aluno e verificou-se que ele estuda Matemática. Qual a probabilidade de ele estudar também Física?

Considere os eventos:  $F = \{\text{alunos que estudam Física}\}$  e  $M = \{\text{alunos que estudam Matemática}\}$ .

Como  $P(F \cap M) = 0,10$  e  $P(M) = 0,60$ , logo:

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0,10}{0,60} \approx 0,167.$$

**Exemplo 3.24.** Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, 500 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de, ao escolhermos, desse grupo, uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?

$\Omega = \{\text{o conjunto de todos os consumidores de cartões de crédito}\} = 1000 \implies n(\Omega) = 1000$

$A = \{\text{o conjunto de todos os consumidores de cartões de crédito Master Card}\} \implies n(A) = 650$

$B = \{\text{o conjunto de todos os consumidores de cartões de crédito VISA}\} \implies n(B) = 500$

Assim  $A \cap B = 200 \implies n(A \cap B) = 200$

$$\text{Logo } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{200}{1000}}{\frac{500}{1000}} = \frac{200}{500} = 0,4.$$

### Propriedades de probabilidade condicional

Vamos a seguir apresentar as propriedades de probabilidade condicional:

**Propriedade 3.24.1.**  $P(\emptyset|B) = 0$

**Demonstração 3.24.1.**  $P(\emptyset|B) = \frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0. \quad \square$

**Propriedade 3.24.2.**  $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

**Demonstração 3.24.2.**  $P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B). \quad \square$

**Propriedade 3.24.3.**  $P[(A_1 - A_2)|B] = P(A_1|B) - P[(A_1 \cap A_2)|B]$

**Demonstração 3.24.3.**  $P[(A_1 - A_2)|B] = P(A_1 \cap A_2^c|B) = \frac{P(A_1 \cap A_2^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B \cap A_2^c)}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) - A_2]}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) - P(A_1 \cap B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) - P[(A_1 \cap A_2)|B]. \quad \square$

**Propriedade 3.24.4.**  $P[(A_1 \cup A_2)|B] = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P[(A_1 \cap A_2)|B]$

**Demonstração 3.24.4.**  $P[(A_1 \cup A_2)|B] = \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} =$

$$\frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap B \cap A_2)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P[(A_1 \cap A_2)|B]. \quad \square$$

**Propriedade 3.24.5.**  $P(A_2|B) \leq P(A_1|B)$

**Demonstração 3.24.5.**  $A_2 \subset A_1 \implies A_1 \cap A_2 = A_2$

$$P[(A_1 - A_2)|B] = P(A_1|B) - P[(A_1 \cap A_2)|B] = P(A_1|B) - P(A_2|B)$$

$$\implies P(A_1|B) - P(A_2|B) \geq 0 \implies P(A_1|B) \geq P(A_2|B)$$

Logo  $P(A_2|B) \leq P(A_1|B)$ .  $\square$

**Propriedade 3.24.6.**  $P(A|B) \leq 1$

**Demonstração 3.24.6.**  $A \cap B \subset B \implies P(A \cap B) \leq P(B) \implies \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(B)}{P(B)} \implies P(A|B) \leq 1. \quad \square$

### 3.24.1 Independência

**Definição 3.24.1.** *Dois acontecimentos A e B são independentes se e somente se: [1]*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \quad P(A) \geq 0 \text{ e } P(B) \geq 0. \quad (3.9)$$

Se A e B são independentes, então:

- $P(A|B) = P(A)$  se  $P(B) > 0$ ;
- $P(B|A) = P(B)$  se  $P(A) > 0$ .

Ou seja, o conhecimento da realização de B não afecta a probabilidade de realizar A e vice-versa.

**Observação 3.24.1.** *A independência entre os acontecimentos A e B implica a independência entre os acontecimentos A e B<sup>c</sup>, A<sup>c</sup> e B, A<sup>c</sup> e B<sup>c</sup>. [1]*

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A) \times [1 - P(B)] = P(A) \times P(B^c).$$

**Exemplo 3.25.** *As probabilidades de três jogadores acertarem um pênalti são, respectivamente,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{6}$  e  $\frac{7}{10}$ .*

*Se cada um chutar uma única vez, qual a probabilidade de:*

1. *Todos acertarem?*

2. *Somente um acertar?*

3. *Todos errarem?*

Nomeando os eventos de acertar, respectivamente, por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e aplicando as propriedades da união, intersecção e complementar das probabilidades, temos:

$$1. P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{6} \times \frac{7}{10} = \frac{56}{180} = \frac{14}{45}$$

2. Calculemos as probabilidades dos jogadores errarem:

- Jogador A:  $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- Jogador B:  $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6}$
- Jogador C:  $P(C^c) = 1 - P(C) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

Calculemos a probabilidade de somente o jogador B acertar:

$$P(A^c \cap B \cap C^c) = P(A^c) \times P(B) \times P(C^c) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{180}$$

Calculemos a probabilidade de somente o jogador C acertar:

$$P(A^c \cap B^c \cap C) = P(A^c) \times P(B^c) \times P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{180}$$

Calculemos a probabilidade de somente o jogador A acertar:

$$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A) \times P(B^c) \times P(C^c) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{12}{180}$$

Agora, calculemos a probabilidade de somente um jogador acertar, que será dada pela soma das probabilidades encontradas anteriormente:

$$P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) + P(A \cap B^c \cap C^c) = \frac{12}{180} + \frac{14}{180} + \frac{12}{180} = \frac{38}{180} = \frac{19}{90}$$

3.

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c) \times P(B^c) \times P(C^c) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{180} = \frac{1}{30}$$

**Observação 3.25.1.**  $P(A^c \cap B^c \cap C^c) \neq 1 - P(A \cap B \cap C)$

**Exemplo 3.26.** A probabilidade de uma mulher estar viva a 30 anos é  $\frac{3}{4}$  e de seu marido é  $\frac{3}{5}$ .

Calcular a probabilidade de:

1. Apenas o homem estar vivo?
2. Somente a mulher estar viva?
3. Pelo menos um estar vivo?

Seja:

- $M_V$  = probabilidade da mulher estar viva =  $\frac{3}{4}$
- $M_M$  = probabilidade da mulher estar morta =  $\frac{1}{4}$
- $H_V$  = probabilidade de homem estar vivo =  $\frac{3}{5}$
- $H_M$  = probabilidade de homem estar morto =  $\frac{2}{5}$

1.  $P(M_M \cap H_V) = P(M_M) \times P(H_V) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$
2.  $P(M_V \cap H_M) = P(M_V) \times P(H_M) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
3. Então, não existe morte conjunta, pois pelo menos um está vivo:

$$1 - P(M_M \cap H_M) = 1 - [P(M_M) \times P(H_M)] = 1 - \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{2}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}.$$

### 3.26.1 Regra de multiplicação

Uma consequência importante da definição formal de probabilidade condicional é a seguinte:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B). \quad (3.10)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A). \quad (3.11)$$

Isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos  $P(A \cap B)$  é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro. [19]

**Exemplo 3.27.** Numa caixa, contendo 4 bolas vermelhas e 6 bolas brancas, retiram-se sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de ambas serem vermelhas.

Seja  $A = \{\text{a primeira bola é vermelha}\} = 4 \implies n(A) = 4;$

$B = \{\text{a segunda bola é vermelha}\}$ , temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \approx 0,1333$$

**Exemplo 3.28.** *Uma caixa contém 15 peças, das quais 4 peças possuem algum defeito. Seleccionaram-se duas peças, uma após a outra, sem reposição da primeira. Qual a probabilidade de que nenhuma seja defeituosa?*

Sejam os eventos:

- $B_1$ : A primeira peça retirada é boa.
- $B_2$ : A segunda peça retirada é boa.

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} \implies P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2|B_1)$$

$$P(A \cap B) = P(B_1) \times P(B_2|B_1) = \frac{11}{15} \times \frac{10}{14} = \frac{11}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{11}{21} \approx 0,5238$$

## 3.29 Teorema de Bayes

O teorema de Bayes é amplamente utilizado no campo das probabilidades. Foi assim denominado em referência a Thomas Bayes, pastor presbiteriano e matemático inglês que viveu no século XVIII. [9]

Esse teorema descreve a probabilidade *posteriori* de um evento acontecer, dado o conhecimento inicial das evidências e de suas chances serem verdadeiros. De forma mais simplificada, tendo a informação da probabilidade de  $B$  ocorrer dado que  $A$  aconteceu e com entendimento dos eventos  $A$  e  $B$  acontecerem independentemente, o teorema permite ajustar as expectativas sobre o evento principal. [29]

### 3.29.1 Fórmula Geral do Teorema de Bayes

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^k P(B|A_i) \cdot P(A_i)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k. \quad (3.12)$$

Onde:

- $P(A_j)$  e  $P(A_i)$  são as probabilidades *a priori* (a probabilidade *a priori* de um evento é calculada sem o conhecimento prévio da ocorrência de qualquer outro evento) de  $A_j$  e  $A_i$ .

- $P(A_j|B)$  é a probabilidade a *posteriori* de  $A_j$  condicional a  $B$ , ou seja, a probabilidade de  $A_j$  ocorrer, dado que  $B$  já ocorreu (a probabilidade do evento  $A_j$  ocorrer é calculada ao se levar em consideração a ocorrência prévia do evento  $B$ ).
- $P(B|A_j)$  é a probabilidade a *posteriori* de  $B$  condicional a  $A_j$ , ou seja, a probabilidade de  $B$  ocorrer, dado que  $A_j$  já ocorreu.
- $P(B|A_i)$  é a probabilidade a *posteriori* de  $B$  condicional a  $A_i$ , ou seja, a probabilidade de  $B$  ocorrer, dado que  $A_i$  já ocorreu.

**Demonstração 3.29.1. Demonstração do Teorema de Bayes[9]**

A probabilidade condicional calcula a probabilidade de um evento  $A$  ocorrer perante o conhecimento prévio da ocorrência de um evento  $B$ .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0. \quad (3.13)$$

De modo análogo, calcula a probabilidade de evento  $B$  ocorrer perante o conhecimento prévio da ocorrência de um evento  $A$ :

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0. \quad (3.14)$$

Como  $A \cap B = B \cap A$  pela comutatividade, então,  $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ . Logo, por (3.8) e (3.9) temos:

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A) \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}. \quad (3.15)$$

(3.10) é a fórmula simples do **Teorema de Bayes**.

Sejam  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  uma partição do espaço amostral  $S$  e seja  $B$  um evento qualquer em  $S$ . Como  $S$  é a união de todos os  $A_i$ 's, então:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_k \cap B)$$

Os  $A_i$ 's são mutuamente exclusivos dois a dois (pela definição de partição), assim os eventos  $A_i \cap B$  também são. Deste modo, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos:

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_k \cap B)]$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_k \cap B)$$

E pela regra da multiplicação:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \dots + P(A_k) \cdot P(B|A_k). \quad (3.16)$$

(3.11) é conhecido como **Teorema da probabilidade total**.

Por (3.10) temos:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(B)}, \text{ e substituindo } P(B) \text{ pela equação (3.11):}$$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \dots + P(A_k) \cdot P(B|A_k)}$$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^k P(B|A_i) \cdot P(A_i)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k. \quad \square$$

### 3.29.2 Aplicações do Teorema de Bayes em diversas áreas

O Teorema de Bayes é frequentemente aplicado em outros campos além da Matemática.

- Na **Medicina**: esse teorema pode ser utilizado para avaliar a confiabilidade do resultado de um exame para diagnosticar uma determinada doença; para calcular a probabilidade de um indivíduo herdar características ou doenças genéticas; ajuda a modelar a propagação de doenças em populações. [11]

**Exemplo 3.30.** Considerando que:

1. Apenas 1% das pessoas têm a doença, ou seja, a probabilidade de alguém selecionado aleatoriamente ter a doença é  $P(A) = 0,01$  e de não ter a doença é  $P(\bar{A}) = 0,99$ .
2. O exame tem resultado positivo para 95% das pessoas que realmente têm a doença, ou seja,  $P(B_+|A) = 0,95$ . O mesmo exame tem resultado negativo para 95% das pessoas que não têm a doença, ou seja,  $P(B_-|\bar{A}) = 0,95$ .
3. Se uma pessoa não tem a doença, a probabilidade de um resultado falso positivo é de 5%, ou seja,  $P(B_+|\bar{A}) = 0,05$ .

Qual a probabilidade de uma pessoa que tem um exame com resultado positivo realmente ter a doença?

Para obter a resposta a esta pergunta, basta calcular  $P(A|B_+)$ . De acordo com o princípio aditivo da probabilidade temos:

$$P(B_+) = P(B_+|A) \cdot P(A) + P(B_+|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}). \quad (3.17)$$

Substituindo o denominador na equação (3.10) pela equação (3.12) temos:

$$P(A|B_+) = \frac{P(B_+|A) \cdot P(A)}{P(B_+|A) \cdot P(A) + P(B_+|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}. \quad (3.18)$$

$$P(A|B_+) = \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} = 0.1610.$$

# Capítulo 4

## Metodologias de Ensino em Probabilidade e Estatística

**Definição 4.0.1.** *Metodologia de ensino é um conjunto de estratégias que o professor utiliza para facilitar a aprendizagem dos alunos. Para tal, deve se ter em conta as características dos alunos ao escolher a metodologia de ensino, e esta deve ser flexível. [21]*

### 4.1 Abordagens Tradicionais

**Definição 4.1.1.** *Abordagem tradicional no ensino de probabilidade e estatística é caracterizada pelo uso da aula expositivo e pela transmissão de conhecimentos teóricos, onde o professor assume o papel central como transmissor de conteúdos teóricos e na aplicação de fórmulas.*

No modelo tradicional de ensino, os professores eram vistos pela sociedade como detentores do conhecimento, transmissores de saberes oficialmente constituídos. Actualmente, passam a ser considerados mediadores no PEA, uma vez que o acesso à informação é rápido e fácil para a maioria das pessoas, sobretudo por meio da *internet*. [17]

#### 4.1.1 Características da Abordagem Tradicional

- **Aula expositiva** é uma metodologia tradicional, onde o professor se comunica de forma interactiva com os alunos, facilitando a troca de informações e a discussão de pontos mais complexos, que apresentam mais dificuldades para sua compreensão. [3]
- **Resolução de exercícios:** é uma metodologia em que os alunos são incentivados a resolver problemas e exercícios práticos, de forma mecânica, sem uma compreensão mais profunda dos conceitos.

- **Uso de manuais e livros didáticos:** o ensino é frequentemente baseado em textos que contêm teoria, exemplos e exercícios, servindo como referência central para o aprendizado.
- **Avaliação Formativa e Sumativa:** testes e provas são utilizados para avaliar a compreensão dos alunos, geralmente focando na memorização de fórmulas e na aplicação de técnicas.
- **Trabalho em grupo:** os alunos podem ser organizados em grupos para discutir problemas e elaborar soluções, embora a interação possa ser limitada.

#### 4.1.2 Limitações da Abordagem Tradicional

- **Memorização em vez de compreensão:** os alunos podem memorizar fórmulas sem entender como ou quando aplicá-las.[17]
- **Desconexão com a realidade:** a falta de exemplos práticos pode tornar o ensino de probabilidade e estatística menos relevante e interessante para os alunos.
- **Desenvolvimento limitado de habilidades:** essa abordagem pode não promover habilidades críticas como análise, interpretação de dados e pensamento crítico.

## 4.2 Abordagens Inovadoras

**Definição 4.2.1.** *Abordagem inovadora no ensino de probabilidade e estatística refere-se a métodos e estratégias pedagógicos que buscam incluir os alunos de forma mais activa no PEA, promovendo uma aprendizagem mais profunda e contextualizada. Esta abordagem preocupa-se em desenvolver habilidades críticas, analíticas e práticas nos alunos, em vez de apenas transmitir conhecimentos teóricos.*

Os métodos tradicionais de ensino faziam algum sentido em um tempo em que o acesso à informação era difícil e o professor actuava como um transmissor de conhecimento para uma pequena parcela privilegiada da sociedade. Hoje, a educação é cada vez mais híbrida, acontecendo em momentos e espaços diversificados, incluindo os espaços digitais, exigindo novas metodologias de ensino que valorizem as experiências dos alunos. [17]

A abordagem inovadora surge nesse contexto, para atender a este perfil de aluno, bem como às novas demandas sociais. Esta é classificada como aquela que exige participação activa e dinâmica dos alunos na escrita, discussão, síntese, análise e avaliação, abandonando a postura passiva típica das aulas tradicionais. [17]

Neste, o professor actua como mediador do processo de aprendizagem, não transmitindo conhecimento, mas estimulando a discussão entre os alunos.

O mesmo é fundamental para a inclusão dos alunos com diferentes necessidades educativas especiais (NEE), para que participem de forma activa no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, a sua

implementação requer o enfrentamento de desafios, como a formação de professores e a infra-estrutura tecnológica, fato que frequentemente limita sua concretização nas escolas públicas. [25]

Desafios e oportunidades para a implementação desta abordagem. Embora ofereçam boas soluções, sua implementação enfrenta dificuldades, como: a formação docente é um ponto crítico, pois muitos professores não possuem experiências com tecnologias educacionais. Além disso, a infra-estrutura escolar carece de equipamentos adequados, como computadores e acesso à internet, dificultando a aplicação dessa metodologia.

Para superar esses desafios, o governo precisa criar políticas públicas que incentivem a formação contínua de professores e parcerias para o fornecimento de recursos tecnológicos.

### 4.2.1 Uso de Tecnologias Educacionais

Para que o ensino de Probabilidade e Estatística contribua para uma aprendizagem efectiva, é importante que se possibilite aos alunos uma interacção com os problemas variados do seu quotidiano e que eles possam equacionar as várias possibilidades para escolherem suas próprias soluções. E para que estas soluções sejam resolvidas sem um excessivo processo de cálculos, é preciso utilizar ferramentas modernas, como os softwares específicos (R; Excel; SPSS; MATLAB), as calculadoras científicas, os recursos oferecidos pela Web e os dispositivos móveis, que vão tornar esta aprendizagem muito mais consistente.[15]

Todavia, é necessário que os professores estejam preparados para este novo desafio e estabeleçam estratégias diferenciadas que motivem os alunos no desenvolvimento de trabalhos em grupo, na apresentação de múltiplas soluções para cada situação levantada, na aceitação de críticas.

### 4.2.2 Aprendizagem Baseada em Projectos

**Definição 4.2.2.** *Aprendizagem baseada em projectos (ABP) é uma abordagem que envolve os alunos na aquisição de conhecimento e competências por meio de um processo de investigação de questões complexas. [25]*

*Esta estratégia de ensino e aprendizagem do século XXI exige muito mais dedicação dos alunos e dos professores. Exige que o professor reflecta sobre a actividade docente e mude a sua postura tradicional de transmissão de conhecimento, e que os alunos assumam maior responsabilidade por sua própria aprendizagem, com a compreensão de que o conhecimento obtido com seu esforço pessoal será mais duradouro do que aquele obtido apenas por informações de terceiros.*

As principais características dessa metodologia são: [25]

- O aluno é o centro do PEA;
- Desenvolve-se em grupo;

- Um processo activo, cooperativo, integrado e interdisciplinar, orientado para a aprendizagem do aluno.

## **4.3 Desafios e Oportunidades no Ensino de Probabilidade e Estatística**

### **4.3.1 Desafios da Probabilidade**

No campo da psicologia, Piaget e Inhelder, foram os pioneiros a desenvolver estudos concernentes à compreensão de crianças com diferentes idades sobre probabilidade. Esses investigadores, na década de 50, já apontavam para a necessidade de desenvolver o raciocínio das crianças frente a situações que envolvam a aleatoriedade.[4]

### **4.3.2 Oportunidades no Ensino de Probabilidade e Estatística**

Em quanto estudante de Matemática Pura pode explorar a aplicação de conceitos teóricos em problemas práticos, permitindo-lhes ver a relevância da probabilidade e da estatística em diversas áreas, como ciências naturais e economia.[25]

Incentivar os estudantes a desenvolver modelos estatísticos para a análise de dados reais. Isso pode incluir a utilização de software estatístico para a simulação e análise, aprofundando a compreensão dos métodos estatísticos. [4]

# Capítulo 5

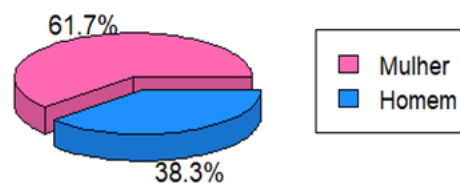
## Análise dos Resultados

Neste capítulo, serão apresentadas descritivamente as actividades desenvolvidas no campo ou na Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico, bem como a discussão dos resultados da pesquisa.

### 5.1 Análise descritiva dos resultados do pré-teste

Para aferir o nível de conhecimento acerca de Probabilidade na disciplina de Matemática da 12<sup>a</sup> classe, aplicou-se um pré-teste. Eis os resultados:

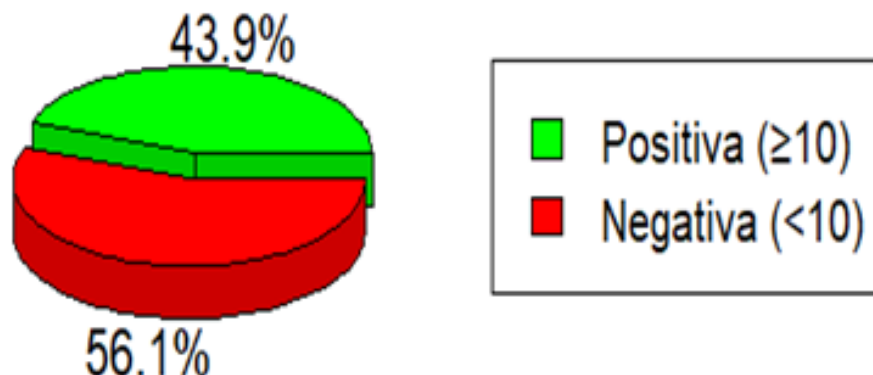
#### 5.1.1 Descrição da variável Sexo



**Figura 5.1:** Distribuição da frequência por sexo

Com base no gráfico circular extraído do pacote estatístico RStudio da figura 5.1, entende-se que o grupo contém 107 alunos, dos quais 41 são do sexo masculino, correspondendo a 38.3%, e 66 são do sexo feminino, correspondendo a 61.7%. Portanto, o grupo apresenta um número elevado de alunas.

### 5.1.2 Aproveitamento do pré-teste



**Figura 5.2:** Análise do aproveitamento do pré-teste

Com o gráfico circular extraído do pacote estatístico RStudio, podemos afirmar que cerca de 43.9% dos estudantes tiveram um aproveitamento positivo no pré-teste, enquanto 56.1% obtiveram um desempenho pedagógico negativo. Isso significa que eles apresentaram muitas dificuldades no que concerne à matéria relacionada à Introdução à Probabilidade.

## 5.2 Análise Inferencial dos resultados do Pré-teste

Nesta secção, faremos generalizações e estimativas sobre as características da população da 12<sup>a</sup> classe da Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico, com base em 107 alunos da amostra.

### 5.2.1 Teste de Normalidade das variáveis em análise

O teste de Kolmogorov-Smirnov é um teste estatístico usado para verificar se uma amostra de dados segue uma distribuição específica. O teste foi utilizado para avaliar se os dados se ajustam a uma distribuição normal. A escolha do teste justifica-se pelo facto de ser utilizado para verificar a normalidade em amostras grandes ( $n > 30$ ). [20]

**Passo 1: Hipóteses a testar**

$H_0$  : As variáveis seguem uma distribuição normal;

$H_1$  : As variáveis não seguem uma distribuição normal.

**Passo 2: Regra de decisão**

Rejeita-se a hipótese nula quando o valor de *significância* for menor ou igual ao nível de significância ( $\alpha = 0,05$ ).

**Passo 3: Cálculo do valor de significância.**

Teste	GL	Estatística	Significância
Shapiro-Wilk	107	0.9748	0.0392
Kolmogorov-Smirnov	107	0.0923	0.0321

**Figura 5.3:** Teste de Normalidade das variáveis em análise

De acordo com os resultados ilustrados na tabela acima, observa-se que: o valor *Significância* = 0,0321 é menor que o nível de significância estabelecido de 0,05. Nestas condições, rejeita-se a hipótese nula. Portanto, ao nível de significância de 5%, existe uma forte evidência estatística que nos permite afirmar que as notas do pré-teste não seguem uma distribuição normal.

Do teste de Kolmogorov-Smirnov, constatou-se que os resultados do pré-teste não possuem uma distribuição normal. Assim sendo, para avaliar a existência de diferenças estatísticas referentes às amostras emparelhadas, foram utilizados os testes não paramétricos de Wilcoxon. A comparação usando este teste só pode ser feita depois da realização do pós-teste, porque os dados resultam do mesmo grupo.

Podemos calcular a estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) para os dados do pre- teste e a seguir e verificar se a distribuição da amostra se ajusta a uma distribuição normal com média  $\mu = 9.27$  e desvio padrão  $\sigma = 4.6$ . A estatística  $D_n$  é dada por:

$$D_n = \max_x |F_n(x) - F(x)|$$

Onde, A função de distribuição normal acumulada é calculada como:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

A função de distribuição empírica é dada por:

$$F_n(x) = \frac{\text{Número de elementos } \leq x}{n}$$

onde  $n = 107$ .

Efectuando os calculos o máximo entre as diferenças:

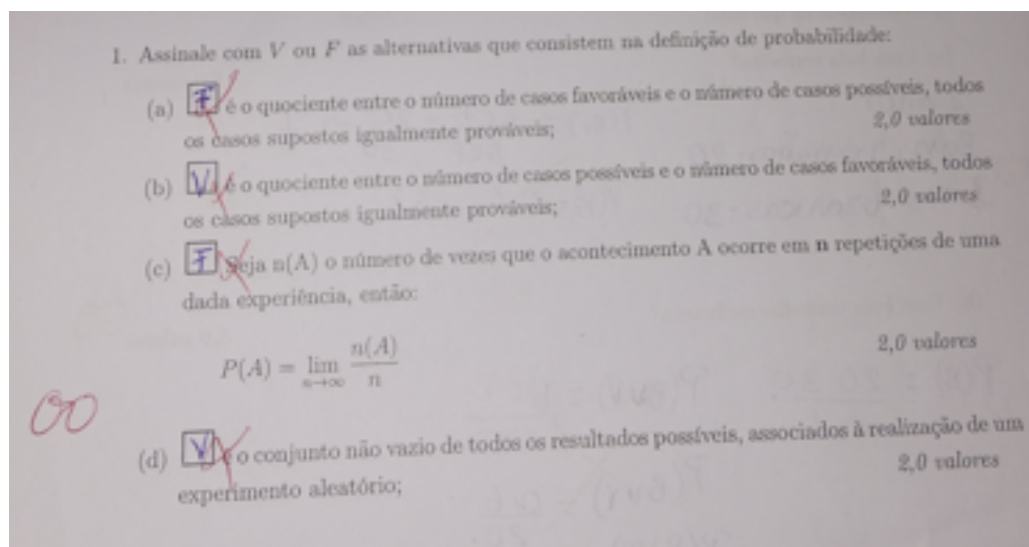
$$D_n = \max\{0.0157, 0.0367, 0.0388, 0.0413, 0.0305, 0.0343, \dots\}$$

Supondo que o maior valor seja:

$$D_n \approx 0.0413$$

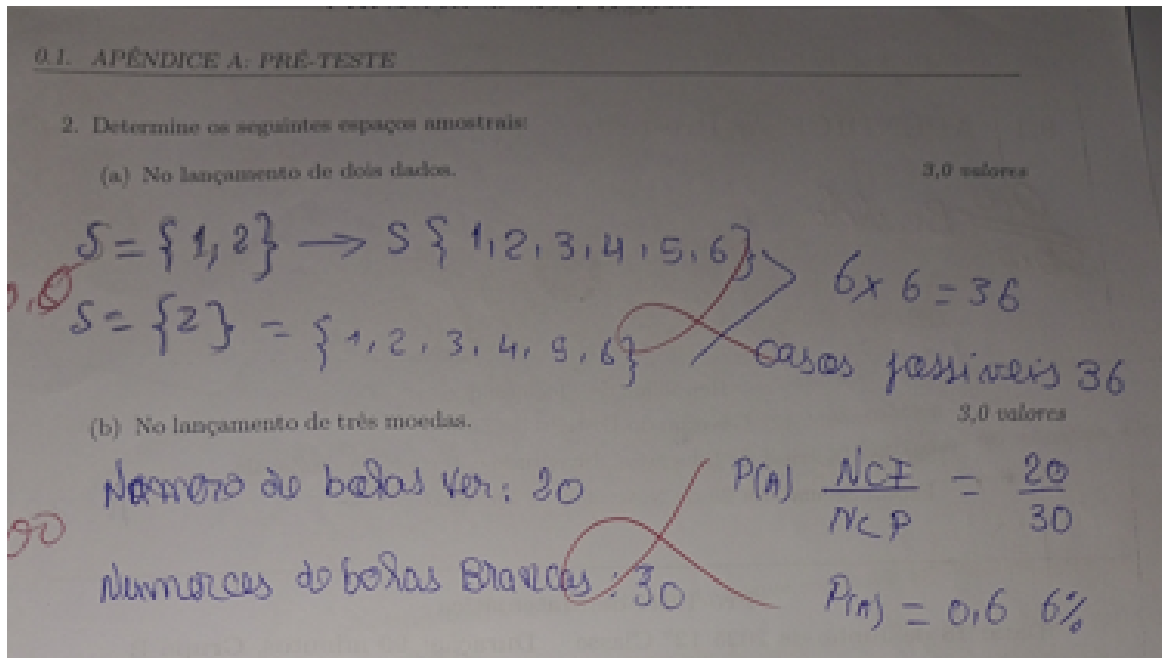
Com o valor de  $D_n$ , Nota-se que  $D_n$  é menor que 0,05, que é o valor crítico da distribuição. Portanto, rejeitamos a hipótese nula de que os dados vêm de uma distribuição normal. É possível empregar as mesmas fórmulas para analisar os dados do pós-teste.

### 5.3 Dificuldades apresentadas pelos alunos no pré-teste.



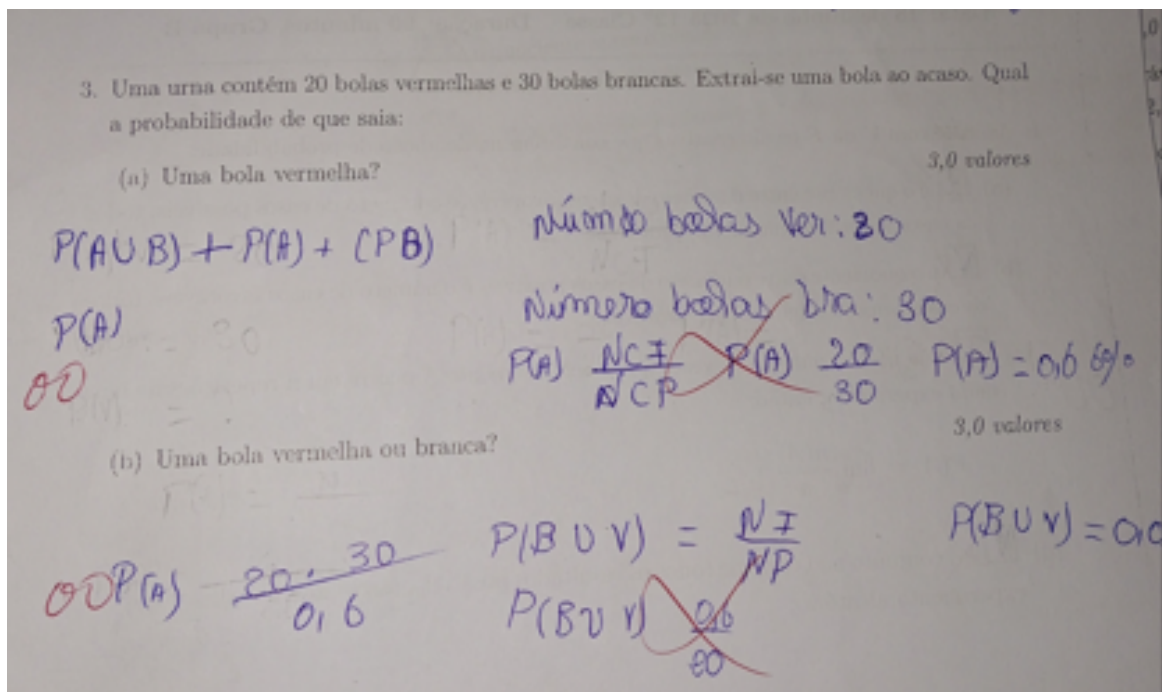
**Figura 5.4:** Dificuldades na primeira pergunta do pré-teste

De acordo com a figura 5.6 acima, nota-se que os alunos apresentaram dificuldades em identificar e reconhecer a definição de Laplace e frequentista de probabilidade.



**Figura 5.5:** Dificuldades na segunda pergunta do pré-teste

De acordo com a figura 5.7, conclui-se que os alunos apresentaram dificuldades na determinação do espaço amostral de dois dados e de três moedas.



**Figura 5.6:** Dificuldades na terceira pergunta do pré-teste

Conforme a imagem 5.8, os alunos apresentaram dificuldades para calcular a probabilidade de extrair uma bola vermelha da urna e de obter a probabilidade da união de dois eventos incompatíveis ou disjuntos.

## 5.4 Descrição das aulas Leccionadas

As aulas foram dadas na sexta-feira, dia 20 de Junho de 2025, (terceiro e quarto tempos) no Grupo 1 e (quinto e sexto tempos) no Grupo 2. Os alunos foram divididos em duas salas, visto que eram 107 alunos. O grupo 1 foi composto por 53 alunos, com cerca de 29 do sexo feminino e 24 do sexo masculino; o grupo 2, por 54 alunos, sendo 17 do sexo masculino e 37 do sexo feminino.

Leccionei uma aula sobre introdução à probabilidade, que ocorreu em um ambiente agradável. A participação dos alunos foi notável, com todos os estudantes dos dois grupos demonstrando uma participação dinâmica.

A aula tinha como objectivos de aprendizagem:

- Identificar probabilidade, espaço amostral e eventos;
- Reconhecer os axiomas da probabilidade na resolução dos exercícios;
- Determinar o espaço amostral de um dado, uma moeda.
- Calcular a probabilidade de um dado evento.

Apesar de ser a primeira interacção com os alunos e de apenas observarem o professor da escola em acção, a aula foi bastante interativa e dinâmica. Isso pode ser observado nas fotos abaixo



**Figura 5.7:** Leccionação da aula sobre introdução à probabilidade



Figura 5.8: Leccionação da aula sobre introdução à probabilidade

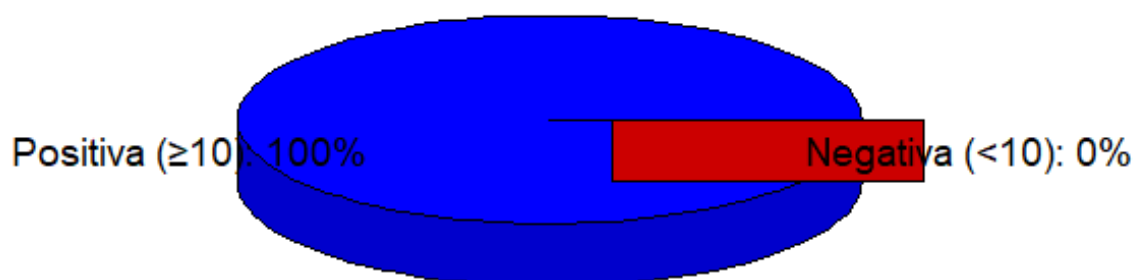


Figura 5.9: Leccionação da aula sobre introdução à probabilidade

## 5.5 Análise Descritiva dos Resultados do pós-teste

Os resultados abaixo dizem respeito ao pós-teste, aplicado após a leccionação de aulas sobre Introdução à Probabilidade na disciplina de Matemática da 12ª classe, na Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico. Eis os resultados:

### 5.5.1 Aproveitamento do pós-teste



**Figura 5.10:** Análise do aproveitamento do pós-teste

Com este gráfico circular extraído do pacote estatístico RStudio, afirma-se que cerca de 100% dos alunos tiveram um aproveitamento positivo no pós-teste. Isso indica que houve muitos resultados positivos nesse teste, resultando em um aproveitamento satisfatório. Com esse desempenho, conclui-se que o nível das dificuldades apresentadas pelos estudantes no primeiro teste sobre Introdução à Probabilidade foi reduzido para 0,0%.

## 5.6 Análise Inferencial dos resultados do pós-teste

Vamos, em primeiro lugar, testar as variáveis para verificar se seguem ou não a distribuição normal. Isso nos ajuda a seleccionar o pacote de testes a seguir, sejam paramétricos ou não paramétricos. Visto que o tamanho da amostra é maior que 30, utilizaremos o teste de Kolmogorov-Smirnov.

### 5.6.1 Teste de Normalidade das variáveis em análise

Passo 1: Hipóteses a testar

$H_0$  : As variáveis seguem uma distribuição normal;

$H_1$  : As variáveis não seguem uma distribuição normal.

**Passo 2: Regra de decisão**

Rejeita-se a hipótese nula quando o valor de *significância* for menor ou igual ao nível de significância ( $\alpha = 0,05$ ).

**Passo 3: Cálculo do valor de significância.**

Teste	GL	Estatística	Significância
Shapiro-Wilk	107	0.7525095	<0,001
Kolmogorov-Smirnov	107	0.2345048	<0,001

**Figura 5.11:** Teste de Normalidade das variáveis em análise

De acordo com os resultados ilustrados na tabela acima, observa-se que o valor de significância  $< 0,001$  é menor que o nível de significância estabelecido de  $0,05$ . Nestas condições, rejeita-se a hipótese nula. Portanto, ao nível de significância de  $5\%$ , existe uma forte evidência estatística que nos permite afirmar que as notas do pós-teste não seguem uma distribuição normal. Como ilustra o gráfico abaixo.

Encontrando a Diferença Máxima nos dados do pos teste teremos:

$$D_n = \max\{0.074, 0.117, 0.232\} \approx 0.232$$

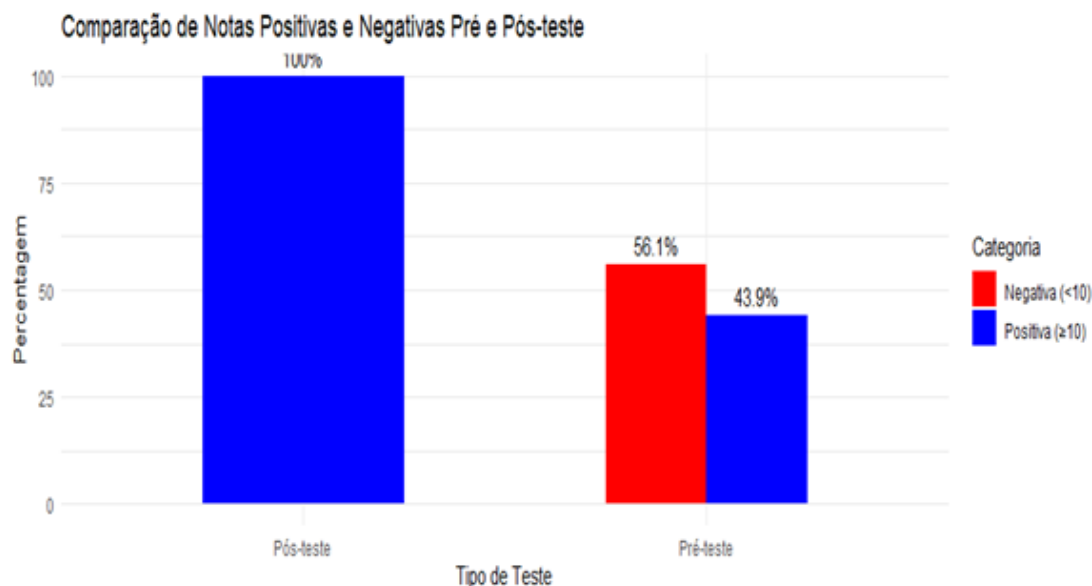
Para um nível de significância  $\alpha = 0.05$  e um tamanho de amostra  $n = 107$ , o valor crítico para a estatística do teste K-S pode ser encontrado em tabelas K-S ou calculado usando a fórmula:

$$D_{\text{crítico}} = \frac{1.36}{\sqrt{n}} = \frac{1.36}{\sqrt{107}} = 0.131$$

Como  $0.232 > 0.131$ , rejeitamos a hipótese nula. Portanto, os dados não seguem uma distribuição normal ao nível de significância de  $0,05$ .

## 5.7 Análise comparativa do pré-teste e pós-teste

Apresenta-se, de forma gráfica, a evolução dos alunos de dois grupos antes e depois da lecionação.



**Figura 5.12:** Análise Comparativa do pré-teste e pós-teste em percentagem

No gráfico comparativo de aproveitamento pedagógico, gerado no pacote estatístico RStudio, cerca de 56,1% dos alunos apresentaram notas negativas no pré-teste, enquanto apenas 43,9% obtiveram aproveitamento positivo. Essa situação revela uma tendência preocupante, evidenciada pela significativa proporção de resultados negativos em comparação aos positivos.

No mesmo gráfico, observa-se uma drástica redução dos resultados negativos, que passaram de 56,0% para 0,0% após a lecionação. Além disso, há uma clara tendência de diminuição das dificuldades na matéria relacionada à introdução à probabilidade, com um aproveitamento positivo de 100%.

## 5.8 Resultados apresentados pelos alunos no pós-teste

1. Assinale com *V* ou *F* as alternativas as alternativas correctas:

(a)  A probabilidade de qualquer acontecimento  $A$  do conjunto  $P(E)$  é um número compreendido entre zero e um; 2,0 valores

(b)  A probabilidade é o quociente entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, todos os casos supostos igualmente prováveis; 2,0 valores

(c)  A probabilidade de acontecimento certo é 1; 2,0 valores

(d)  O Espaço Amostral é o conjunto não vazio de todos os resultados possíveis, associados à realização de um experimento aleatório; 2,0 valores

**Figura 5.13:** Primeira pergunta do pós-teste

Após a lecionação, observou-se uma melhoria significativa na compreensão e identificação dos conceitos de probabilidade, espaço amostral e axiomas de probabilidade. Durante a aula, muitos alunos demonstraram um sólido domínio dos conteúdos, o que resultou em bom aproveitamento no pós-teste. Consulte a figura 5.17.

2. Determine os seguintes espaços amostrais: 2,0 valores

(a) No lançamento de uma moeda e um dado.

$K = \{K; C\}$      $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2,0  $\Omega = \{(K; 1); (K; 2); (K; 3); (K; 4); (K; 5); (K; 6); (C; 1); (C; 2); (C; 3); (C; 4); (C; 5); (C; 6)\}$

$n = 12$

3

**Figura 5.14:** Segunda pergunta do pós-teste

Observa-se uma melhoria na determinação do espaço amostral, um resultado que não se verificou no pré-teste. Muitos alunos demonstraram a capacidade de identificar correctamente o espaço amostral no lançamento de um dado e de uma moeda.

3. Um saco contém 12 bolas, sendo 3 brancas, 5 azuis e 4 pretas. Tirando uma bola ao acaso, diga qual a probabilidade de sair: 2,5 valores

(a) Uma bola branca?

$n(B) = 3$   
 $n(A) = 5$   
 $n(P) = 4$   
 $P(B) = ?$   
 $3 = n(B) + n(A) + n(P) = 3 + 5 + 4 = 12$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{12} = 0,25$

(b) Uma bola azul? 2,5 valores

$n(A) = 5$   
 $n(S) = 12$   
 $P(A) = ?$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{12} = 0,41$

(c) Uma bola branca ou azul? 3,0 valores

$P(B \cup A) = P(B) + P(A) = 0,25 + 0,41 = 0,66$

**Figura 5.15:** Terceira pergunta do pós-teste

Observa-se uma melhoria no cálculo básico da probabilidade de realização de um evento qualquer, tanto durante a aula como na realização do pós-teste.

## 5.9 Análise comparativa do pré-teste e pós-teste no grupo amostral através do teste de Wilcoxon

Este teste é utilizado para comparar as medianas de populações em amostras emparelhadas. Seu objetivo é fornecer suporte ao nível de significância das possíveis diferenças entre os pares (grupos) para a variável em análise, considerando a mediana populacional.[16]

Foi aplicado o teste de Wilcoxon com o objectivo de compreender a evolução dos resultados do pré-teste e pós-teste no grupo, caracterizando uma situação de amostras dependentes ou emparelhadas. Finalmente, avaliou-se se há uma diferença significativa nas notas antes e depois da intervenção.

Este teste não paramétrico é adequado para comparar duas amostras relacionadas, permitindo avaliar as mudanças nos desempenhos dos alunos entre as duas avaliações (antes e depois da intervenção), não exigindo que os dados sigam uma distribuição normal, tornando-o adequado para a análise dos dados colectados.

### Passo 1: Determinação das Hipóteses

$H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$  – Não existe diferença significativa entre as medianas no pré-teste e no pós-teste.

$H_1 : \tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$  – Existe diferença significativa entre as medianas no pré-teste e no pós-teste.

### Passo 2: Regra de decisão

Rejeita-se a  $H_0$  quando existe diferença das medianas do pré-teste e do pós-teste.

### Passo 3: Cálculo do valor de *media*

Teste	N	Média	Mediana	Desvio padra	Minimo	Q1	Q3	Maximo
Pré-teste	107	9,278037	9.0	4.635579	0.0	6	12.25	18
Pós-teste	107	18.616822	19.5	1.910225	10.5	18	20.00	20

**Figura 5.16:** Teste de Classificações Assinadas por Wilcoxon

Já aplicado este teste, conforme ilustra a tabela 5.16, conclui-se que as medianas são diferentes. Temos evidências estatísticas para rejeitar a hipótese nula. Com isso, conclui-se que houve uma evolução significativa entre o pré-teste e o pós-teste, isto é, houve uma redução das dificuldades sobre o tema "Introdução à Probabilidade".

# Capítulo 6

## Conclusão e Recomendações

Neste capítulo, apresentam-se as conclusões e as recomendações de acordo com os objectivos traçados e os resultados obtidos.

### 6.1 Conclusão

No trabalho, foi feita uma revisão da teoria da probabilidade e da estatística, abordando conceitos como: espaço amostral, evento, definição de probabilidade no espaço finito (Laplace, Axiomatizada e Frequentista) e no espaço infinito; espaço de probabilidade; variáveis aleatórias; teorema de Bayes e suas aplicações em diversas áreas; definição de estatística, população e amostra, tipos de dados e estatística descritiva.

Com o objectivo de melhorar a compreensão do tema do presente trabalho, apresentamos demonstrações detalhadas de alguns teoremas e propriedades, bem como explicações dos exemplos e as respectivas resoluções.

No trabalho, abordamos as metodologias de ensino de probabilidade e estatística, incluindo a abordagem tradicional, caracterizada pelo uso da aula expositiva, na qual o professor é o centro do processo de aprendizagem, colocando o aluno como receptor do conhecimento; e a abordagem inovadora, que envolve os alunos de forma activa no processo de ensino-aprendizagem (PEA), através da investigação por parte de ambos os intervenientes do processo educativo.

Após a realização da pesquisa, concluiu-se que os alunos da 12<sup>a</sup> classe da Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico, em relação ao tema "Introdução à Probabilidade", que se enquadra no contexto do trabalho "Ensino de Probabilidade e Estatística", apresentaram dificuldades relacionadas a:

- Identificar e reconhecer a definição de probabilidade;
- Determinar o espaço amostral no lançamento de dois dados e o lançamento de três moedas;

- Calcular a probabilidade de um evento específico, bem como a probabilidade da união de dois eventos;

Cerca de 56% dos alunos no pré-teste obtiveram notas negativas, enquanto 44% apresentaram um aproveitamento positivo. No pós-teste, nenhum aluno obteve nota negativa, o que indica que 100% dos alunos tiveram um desempenho positivo. Com esta pesquisa, podemos afirmar que os alunos da Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico enfrentaram diversas dificuldades na matéria de introdução à probabilidade, o que levou o pesquisador a adoptar estratégias para melhorar a sua compreensão. Como e o caso da apresentação e manipulação do material didático pelos alunos, no uso do método de elaboração conjunta, priorizou-se a resolução de muitos exercícios diversificados.

## 6.2 Recomendações

Diante das dificuldades encontradas nos alunos da 12.<sup>a</sup> classe na Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico, através desta pesquisa, o pesquisador recomenda:

Aos professores de Matemática que:

- Promovam o uso de material didático palpável durante as aulas de introdução à probabilidade, como: moeda, dado, cartas, etc;
- Encorajem a resolução de diversos exercícios relacionados com o tema. Para tal, o professor pode elaborar fichas de exercícios correspondentes a cada unidade temática, permitindo que os alunos consolidem os conhecimentos adquiridos durante as aulas.
- Promovam o uso de abordagens inovadoras, pois integram os alunos de forma activa no processo de ensino e aprendizagem, sendo mais eficazes nos dias actuais.

## 6.3 Trabalhos Futuros

- Investigar a importância do uso de softwares estatísticos, como o SPSS e o Excel, no ensino de estatística, comparando o aproveitamento dos alunos que utilizam estes softwares com aqueles que não os utilizam;
- Investigar a formação contínua dos professores de Matemática em relação ao ensino de probabilidade e estatística, tendo em conta a sua formação ou programa de formação.

# Bibliografia

- [1] AFONSO, A., AND NUNES, C. *Probabilidades e Estatística*. Universidade de Évora, 2019.
- [2] BENTO, J. G. S. Perfil da automedicação feita por usuários em uma farmácia comunitária no município de natal/rn.
- [3] BONINI-ROCHA, A. C., DE OLIVEIRA, L. F., ROSAT, R. M., AND RIBEIRO, M. F. M. Satisfação, percepção de aprendizagem e desempenho em vídeo aula e aula expositiva. *Ciências Cognição* 19, 1 (2014).
- [4] BORBA, R., SOUZA, L., AND CARVALHO, J. Desafios do ensino na educação básica de combinatória, estatística e probabilidade. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana–Em Teia* 9, 1 (2018), 1–24.
- [5] BUSSAB, W. D. O., AND MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. Editora Saraiva, 2010.
- [6] CABRAL, M. A. P. *Introduc, ~ao ‘a Teoria da Medida e Integral de Lebesgue*. 2016.
- [7] CHILAÚLE, A., AND MACHANGO, O. *Matemática 12ª Classe*. Texto Editores, Lda - Moçambique, 2006.
- [8] CORREA, S. M. B. B. *Probabilidade e Estatística*. Belo Horizonte: POC Minas Virtual, 2003.
- [9] COSTA, C. S. *Um olhar interdisciplinar para o Teorema de Bayes na escola básica através da resolução de problemas*. PhD thesis, PUC-Rio, 2024.
- [10] DE FARIAS, A. M. L., AND DA COSTA LAURENCEL, L. *Probabilidade*. UFF, 2007.
- [11] DE OLIVEIRA, G. S., AND DO LAGO PEREIRA, S. Implementação de classificação bayesiana.
- [12] ESMERALDA GONÇALVES, N. M. L. *Estatística descritiva*. Escola Editores, 2013.
- [13] FERREIRA, P. M. *Estatística e Probabilidade*. Fortaleza, 2012.
- [14] FONSECA, J. *Estatística Matemática*. Editores Sílabo, Lda., 2001.
- [15] FREI, F. Perspectivas do uso de planilhas eletrônicas no ensino de estatística. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática* 12, 1 (2021), 1–16.

- [16] FÁVERO, L. P. L., BELFIORE, P., SILVA, A. J., AND CHAN, J. *Título do Livro*. Editora, 2009.
- [17] GIORDANO, C. C., AND DA SILVA, D. S. C. Metodologias ativas em educação matemática: a abordagem por meio de projetos na educação estatística. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática* 6, 2 (2017).
- [18] GUEDES, T. A., MARTINS, A. B. T., ACORSI, C. R. L., AND JANEIRO, V. Estatística descritiva. *Projeto de ensino aprender fazendo estatística* (2005).
- [19] HAZZAN, S. *Combinatória e Probabilidade*. Actual Editora, 2013.
- [20] LEOTTI, V. B., BIRCK, A. R., AND RIBOLDI, J. Comparação dos testes de aderência à normalidade kolmogorov-smirnov, anderson-darling, cramer–von mises e shapiro-wilk por simulação. *Anais do 11º Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agrônômica* (2005).
- [21] LIBÂNEO, J. C. *Didática*. Editora Cortez, 2013.
- [22] MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. Edusp, 2006.
- [23] MAHALUCA, F. A. *Estatística Aplicada*. Health Sciences, 2016.
- [24] MARTINS, M. E. G. Introdução à probabilidade e à estatística, 2005.
- [25] MASSON, T. J., MIRANDA, L. F. D., MUNHOZ JR, A. H., AND CASTANHEIRA, A. M. P. Metodologia de ensino: aprendizagem baseada em projetos (pbl). In *Anais do XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), Belém, PA, Brasil* (2012), vol. 13, sn.
- [26] MELO, E. W. S. D. História da probabilidade e o conhecimento de futuros professores de matemática. B.S. thesis, 2017.
- [27] MULEMBA, N. *Manual de Estatística e Probabilidade*. ICAM, 2018.
- [28] MURTELLA, BENTO E ANTUNES, M. *Probabilidades e Estatística*. Escolar Editora, 2012.
- [29] NUNES, J. D. M. Sim-ciber: simulações probabilísticas para quantificação de riscos e impactos de ciberataques utilizando relatórios estatísticos.
- [30] OLIVEIRA, M. F. D. *Metodologia Científica: Um manual para a realização de pesquisas em administração*. UFG, Catalão, 2011.
- [31] OLIVEIRA, W. *Estatística*. Wemerson Oliveira, 2024.
- [32] PRODANOV, C. C., AND FREITAS, E. C. *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico*, 2 ed. ASPEUR, Rio Grande do Sul, Brasil, 2013.
- [33] SILVESTRE, A. *Análise de dados e estatística descritiva*. Escolar Editora, 2007.

# Apêndice A

## Evidências e resultados processados em R

### A.1 Pré-teste



República de Moçambique  
Governo do Distrito de Zavala  
Serviço Distrital de Educação, Juventude e Tecnologia de Zavala  
Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico

---

#### Pré-Teste de Matemática

**Data: 18 de Junho de 2025 12<sup>a</sup> Classe    Duração: 90 minutos, Grupo B**

---

1. Assinale com  $V$  ou  $F$  as alternativas que consistem na definição de probabilidade:

- (a)  é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, todos os casos supostos igualmente prováveis; *2,0 valores*
- (b)  é o quociente entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, todos os casos supostos igualmente prováveis; *2,0 valores*

- (c)  Seja  $n(A)$  o número de vezes que o acontecimento  $A$  ocorre em  $n$  repetições de uma dada experiência, então:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} \qquad 2,0 \text{ valores}$$

- (d)  é o conjunto não vazio de todos os resultados possíveis, associados à realização de um experimento aleatório; 2,0 valores

2. Determine os seguintes espaços amostrais:

- (a) No lançamento de dois dados. 3,0 valores

- (b) No lançamento de três moedas. 3,0 valores

3. Uma urna contém 20 bolas vermelhas e 30 bolas brancas. Extraí-se uma bola ao acaso. Qual a probabilidade de que saia:

- (a) Uma bola vermelha? 3,0 valores

- (b) Uma bola vermelha ou branca? 3,0 valores

---

Elaborado por: Benildo Florêncio João Gule, Estudante de Licenciatura em Matemática, UEM.

### A.1.1 Grelha dos objectivos das questões do pré-teste

Questão	Objectivos
1	Identificar a definição de probabilidade;
2	Determinar os espaços amostrais de dois dados e de três moedas
3	Calcular a probabilidade de sair uma bola vermelha, branca e uma branca ou vermelha

**Tabela A.1:** Definição dos objectivos das perguntas do Pré-Teste



República de Moçambique  
 Governo do Distrito de Zavala  
 Serviço Distrital de Educação, Juventude e Tecnologia de Zavala  
 Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico

**Correcção do Pré-Teste de Matemática**

**Data: 11 de Maio de 2025 12ª Classe Duração: 90 minutos, Grupo B**

1. Assinale com  $V$  ou  $F$  as alternativas que consistem na definição de probabilidade:

(a)  $V$  é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, todos os casos supostos igualmente prováveis; 2,0 valores

(b)  $F$  é o quociente entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, todos os casos supostos igualmente prováveis; 2,0 valores

(c)  $V$  Seja  $n(A)$  o número de vezes que o acontecimento  $A$  ocorre em  $n$  repetições de uma dada experiência, então:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} \quad \text{2,0 valores}$$

(d)  $F$  é o conjunto não vazio de todos os resultados possíveis, associados à realização de um experimento aleatório; 2,0 valores

2. Determine os seguintes espaços amostrais:

(a) No lançamento de dois dados. 3,0 valores

**Resolução A.1.1.** *Determine o espaço amostral no lançamento de dois dados. No lançamento de dois dados, observa-se o seguinte espaço amostral:*

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

(b) No lançamento de três moedas.

2,0 valores

**Resolução A.1.2.** *Determine o espaço amostral no lançamento de três moedas. Sabemos que uma moeda tem duas faces que são cara (C) e coroa (K):*

$$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K), (K, K, K)\}.$$

3. Uma urna contém 20 bolas vermelhas e 30 bolas brancas. Extraí-se uma bola ao acaso. Qual a probabilidade de que saia:

(a) Uma bola vermelha?

3,0 valores

**Resolução A.1.3.** *Notemos que  $\Omega = 20 + 30 = 50$  bolas  $\implies n(\Omega) = 50$ .*

*Evento  $V$ :  $V = 20$  bolas  $\implies n(V) = 20$*

*Portanto,*

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} \implies P(V) = \frac{20}{50} \implies P(V) = \frac{2}{5} \implies P(V) = 0,4.$$

(b) Uma bola vermelha ou branca?

3,0 valores

**Resolução A.1.4.** *Evento  $V \cup B = 50$  bolas  $\implies n(V \cup B) = 50$*

$$P(V \cup B) = P(V) + P(B) - P(V \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - 0 = \frac{5}{5} = 1$$

---

Elaborado por: Benildo Florêncio João Gule

## A.2 Plano de Aula

**Disciplina:** Matemática

**Classe:** 12<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> Trimestre

**Tipo de Aula:** Nova

**Duração:** 45 minutos

**Data de Execução:** 20/06/2025 e 27/06/2027

**Turma:** B1.4

**Unidade Temática VIII:** Breve Introdução às probabilidades

**Tema:** Introdução a cálculo de probabilidade

**Objectivos Específicos:**

- Identificar probabilidade, espaço amostral e eventos;
- Determinar o espaço amostral para o lançamento de dois dados e o lançamento de três moedas;
- Reconhecer os axiomas e teoremas da probabilidade na resolução dos exercícios.

**Método predominante:** Elaboração conjunta

**Materiais de apoio ao ensino:** Quadro, giz, apagador, moedas, dado.

**Pré-Requisitos:**

1. Conhecimentos sobre teoria de conjunto.
2. Operações com números inteiros, fracções e decimais.

<b>Tempo</b>	<b>Função Didáctica</b>	<b>Método Didáctico</b>	<b>Conteúdos Didácticos</b>	<b>Actividades do Professor</b>	<b>Actividades do Aluno</b>
<b>5 Minutos</b>	Introdução e Motivação	Elaboração Conjunta	Introdução a cálculo de probabilidade	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Orienta a saudação e faz o controle de presenças.</li> <li>• Apresenta uma questão de reflexão: "Como podemos definir probabilidade de uma forma simples."</li> <li>• Anuncia o tema da aula.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saúda o professor e confirma a presença.</li> <li>• Reflecte sobre a questão proposta e apresenta as possíveis respostas.</li> <li>• Participa da discussão inicial.</li> </ul>

Tempo	Função Didáctica	Método Didáctico	Conteúdos Didácticos	Actividades do Professor	Actividades do Aluno
20 Minutos	Mediação e Assimilação	Elaboração Conjunta, Expositivo	Introdução a cálculo de probabilidade	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modera a participação dos alunos.</li> <li>• Define espaço amostral e como se representa.</li> <li>• Determina o espaço amostral no lançamento de um dado.</li> <li>• Explica a aula e apresenta alguns exemplos no quadro;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresenta suas ideias sobre espaço amostral e como se representa. O espaço amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de uma experiência e é representado por <math>E</math>, <math>S</math> ou <math>\Omega</math>.</li> <li>• Apresenta o espaço amostral no lançamento de um dado. <math>S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}</math></li> </ul>

Tempo	Função Didática	Método Didático	Conteúdos Didáticos	Actividades do Professor	Actividades do Aluno
15 Minutos	Domínio e Consolidação	Elaboração Conjunta, Trabalho Independente	Introdução a cálculo de probabilidade ( Exercícios de Aplicação)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Orienta a resolução dos exercícios.</li> <li>• 1. Determina o espaço amostral do lançamento simultâneo de uma moeda e um dado;</li> <li>• 2. Calcula a probabilidade de sair cara e um número par.</li> <li>• Acompanha a actividade e fornece suporte.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolve os exercícios de forma individual.</li> <li>• 1.apresenta o espaço amostral</li> <li>• 2. <math>P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12} = 0,25</math>.</li> <li>• Anota as soluções e dúvidas.</li> </ul>

<b>Tempo</b>	<b>Função Didáctica</b>	<b>Método Didáctico</b>	<b>Conteúdos Didácticos</b>	<b>Actividades do Professor</b>	<b>Actividades do Aluno</b>
<b>5 Minutos</b>	Controlo e Avaliação	Elaboração Conjunta, Trabalho Independente	Introdução a cálculo de probabilidade ( TPC)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Orienta questões de síntese sobre o aprendizado da aula.</li> <li>• 1. De que tratamos na aula de hoje?</li> <li>• Apresenta o trabalho de casa (TPc).</li> <li>• 1. Calcula a probabilidade de sair coroa e um número menor que 7 no dado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Responde às questões de síntese.</li> <li>• Copia o TPC no caderno.</li> </ul>

## A.3 Pós-Teste



República de Moçambique  
Governo do Distrito de Zavala  
Serviço Distrital de Educação, Juventude e Tecnologia de Zavala  
Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico

---

### Pós-teste de Matemática

**Data: 24 de Junho de 2025 12ª Classe Duração: 90 minutos, Grupo B**

---

1. Assinale com  $V$  ou  $F$  as alternativas as alternativas correctas:

- (a)  A probabilidade de qualquer acontecimento  $A$  do conjunto  $P(E)$  é um número compreendido entre zero e um; *2,0 valores*
- (b)  A probabilidade é o quociente entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, todos os casos supostos igualmente prováveis; *2,0 valores*
- (c)  A probabilidade de acontecimento certo é 1; *2,0 valores*
- (d)  O Espaço Amostral é o conjunto não vazio de todos os resultados possíveis, associados à realização de um experimento aleatório; *2,0 valores*

2. Determine os seguintes espaços amostrais:

- (a) No lançamento de uma moeda e um dado. *2,0 valores*

(b) No lançamento de duas moedas.

*2,0 valores*

3. Um saco contém 12 bolas, sendo 3 brancas, 5 azuis e 4 pretas. Tirando uma bola ao acaso, diga qual a probabilidade de sair:

(a) Uma bola branca?

*2,5 valores*

(b) Uma bola azul?

*2,5 valores*

(c) Uma bola branca ou azul?

*3,0 valores*

---

Elaborado por: Benildo Florêncio João Gule, Estudante de Licenciatura em Matemática, UEM.

### A.3.1 Grelha dos objetivos das questões do pré-teste

Questão	Objectivos
1	Reconhecer os axiomas de probabilidade;
2	Determinar os espaços amostrais de uma moeda e um dado
3	Calcular a probabilidade de sair uma bola branca, azul e uma branca ou azul

**Tabela A.3:** Definição dos objetivos das perguntas do Pós-Teste



República de Moçambique  
 Governo do Distrito de Zavala  
 Serviço Distrital de Educação, Juventude e Tecnologia de Zavala  
 Escola Secundária 25 de Novembro de Quissico

#### Correcção do Pós-Teste de Matemática

**Data: 24 de Junho de 2025 12ª Classe Duração: 90 minutos, Grupo B**

1. Assinale com  $V$  ou  $F$  as alternativas as alternativas correctas:

- (a)  $\boxed{V}$  A probabilidade de qualquer acontecimento  $A$  do conjunto  $P(E)$  é um número compreendido entre zero e um; *2,0 valores*
- (b)  $\boxed{F}$  A probabilidade é o quociente entre o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, todos os casos supostos igualmente prováveis; *2,0 valores*
- (c)  $\boxed{V}$  A probabilidade de acontecimento certo é 1; *2,0 valores*
- (d)  $\boxed{V}$  O Espaço Amostral é o conjunto não vazio de todos os resultados possíveis, associados à realização de um experimento aleatório; *2,0 valores*

2. Determine os seguintes espaços amostrais:

- (a) No lançamento de uma moeda e um dado. *2,0 valores*

**Resolução A.3.1.** *Determine o espaço amostral no lançamento de uma moeda e um dado teremos:*

$$\Omega = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)\}$$

(b) No lançamento de duas moedas. 2,0 valores

**Resolução A.3.2.** *Determine o espaço amostral no lançamento de duas moedas. Sabemos que uma moeda tem duas faces que são cara (C) e coroa (K):*

$$\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}.$$

3. Um saco contém 12 bolas, sendo 3 brancas, 5 azuis e 4 pretas. Tirando uma bola ao acaso, diga qual a probabilidade de sair:

(a) Uma bola branca? 2,5 valores

**Resolução A.3.3.** *Notemos que  $\Omega = 12$  bolas  $\implies n(\Omega) = 12$ .*

*Evento B: B = 3 bolas  $\implies n(B) = 3$*

*Portanto,*

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \implies P(B) = \frac{3}{12} \implies P(B) = \frac{1}{4} \implies P(B) = 0,25.$$

(b) Uma bola azul? 2,5 valores

**Resolução A.3.4.** *Evento A = 5 bolas  $\implies n(A) = 5$*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \implies P(A) = \frac{5}{12} \implies P(A) = 0,42.$$

(c) Uma bola branca ou azul? 2,5 valores

**Resolução A.3.5.** *Evento  $B \cup A = 8$  bolas  $\implies n(B \cup A) = 8$*

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) - P(B \cap A) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} - 0 = \frac{8}{12} = 0,67$$

## A.4 Descrição da variável Sexo em R

```
library(plotrix)

# Dados
frequências <- c(66, 41)
nomes <- c("Mulher", "Homem")
cores <- c("#FF69B4", "#1E90FF") # Mulher = Hot Pink, Homem = Dodger Blue

# Gráfico circular 3D sem título
pie3D(frequências,
      labels = paste0(round(frequências/sum(frequências)*100,1), "%"),
      explode = 0.1,
      col = cores,
      labelcex = 1.2)

# Legenda mais à direita
legend(x = 1.5, y = 0.5, legend = nomes, fill = cores, cex = 1.1, xpd = TRUE)
```

## A.5 Aproveitamento pedagógico de Pre-Teste gerado em R

```
# --- Dados ---
frequências <- c(47, 60)
nomes <- c("Positiva (>10)", "Negativa (<10)")
cores <- c("green", "red") # Verde para positiva, Vermelho para negativa

# Aumentar espaço para a legenda
par(mar = c(5, 4, 4, 8))

# --- Gráfico circular 3D ---
pie3D(frequências,
      labels = paste0(round(frequências / sum(frequências) * 100, 1), "%"),
      explode = 0.1,
      col = cores,
      labelcex = 1.5) # Tamanho das percentagens

# --- Legenda à direita ---
legend(x = 1.7, y = 0.5, legend = nomes, fill = cores, cex = 1.3, xpd = TRUE)
```

## A.6 Teste de Normalidade das variáveis em análise em R

```
# --- Criar vector de notas ---
nota_preteste <- c(0, 0, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 4.5, 4, 4, 4, 4, 4,
                  4.5, 4.5, 5, 6, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6,
                  8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 8, 9, 9, 9, 9, 9,
                  9, 10, 10, 10, 10, 10.5, 11, 11, 11.5,
                  12, 12.5, 13, 13.5, 14.5, 15, 15.5,
                  0, 2, 2, 2.5, 6, 6.5, 7.5, 8, 8, 8,
                  2, 8, 8, 8.5, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9,
                  10, 10.5, 10.5, 11, 11, 11, 11.5,
                  12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14,
                  14, 14.5, 15, 15, 15.5, 16, 16,
                  16.5, 16.5, 16.5, 16.75, 17, 18, 18, 18, 18)

# --- Número de observações (GL ajustado) ---
gl <- length(nota_preteste) # Total de observações: 107

# --- 1. Teste Shapiro-Wilk para normalidade ---
shapiro_result <- shapiro.test(nota_preteste)

# --- 2. Teste Kolmogorov-Smirnov ---
ks_result <- ks.test(nota_preteste, "pnorm",
                    mean = mean(nota_preteste),
                    sd = sd(nota_preteste))

# Verifica se houve aviso de empates no teste KS
if ("ties" %in% names(ks_result)) {
  warning("Empates detectados no teste Kolmogorov-Smirnov. Considere usar ou")
}

# --- 3. Criar tabela de resultados ---
tabela_normalidade <- data.frame(
  Teste = c("Shapiro-Wilk", "Kolmogorov-Smirnov"),
  GL = c(gl, gl), # Graus de liberdade: 107 para ambos
  Estatistica = c(round(shapiro_result$statistic, 4), round(ks_result$statistic, 4)),
  significância = c(round(shapiro_result$p.value, 4), round(ks_result$p.value, 4))
)
```

```
# Exibir tabela de resultados
print(tabela_normalidade)
```

## A.7 Aproveitamento pedagógico de Pós-Teste gerado em R

```
library(plotrix)

# --- Criar vector de notas do Pós-teste ---
nota_pósteste <- c(20,20,20,20,20,18,13.5,20,20,18,19.5,20,19,18,20,20,20,18,
                  20,16,17,18,20,18,20,16,20,18,20,20,18,20,20,18,17.5,18,1
                  19,18,20,20,20,20,20,20,20,18,20,20,20,19.5,19,20,20,19,2
                  19,19.5,18,19.5,16.5,20,20,16.5,18,16,17,20,20,20,18,19,1
                  14,15.5,17,18.5,10.5,20,20,14,20,16,19.5,18,13,20,19,20,1

# --- Contar positivas e negativas ---
positiva <- sum(nota_posteste >= 10)
negativa <- sum(nota_posteste < 10)

# --- Preparar dados para o gráfico ---
frequências <- c(positiva, negativa)
nomes <- c("Positiva (10)", "Negativa (<10)")
cores <- c("blue", "red") # Azul para positiva, Vermelho para negativa

# --- Calcular percentagens ---
percentagens <- round(frequências / sum(frequências) * 100, 1)
labels <- paste0(nomes, ": ", percentagens, "%") # Rótulos com percentagem

# --- Ajustar espaço para legenda ---
par(mar = c(5, 4, 4, 8))

# --- Gráfico circular 3D com percentagens ---
pie3D(frequências,
      labels = labels,
      explode = 0.1,
      col = cores,
      labelcex = 1.2,
```

```
main = "Distribuição das Notas do Pós-teste")
```

## A.8 Teste de Normalidade das variáveis em análise gerado em R

```
# --- Dados completos do Pós-teste ---
pos_teste <- c(
  20, 20, 20, 20, 20, 18, 13.5, 20, 20, 18,
  19.5, 20, 19, 18, 20, 20, 20, 18, 19.5, 20,
  19.5, 20, 16, 17, 18, 20, 18, 20, 16, 20,
  18, 20, 20, 18, 20, 20, 18, 17.5, 18, 16.5,
  15, 16.5, 19, 18, 20, 20, 20, 20, 20, 20,
  20, 18, 20, 20, 20, 19.5, 19, 20, 20, 19,
  20, 19, 19, 19.5, 19, 19.5, 18, 19.5, 16.5,
  20, 20, 16.5, 18, 16, 17, 20, 20, 20, 18,
  19, 15, 18, 14, 19.5, 14, 15.5, 17, 18.5,
  10.5, 20, 20, 14, 20, 16, 19.5, 18, 13, 20,
  19, 20, 18, 20, 20, 20, 20, 20, 20
)

# -----
# Teste de Shapiro-Wilk
# -----
shapiro <- shapiro.test(pos_teste)

# -----
# Teste de Kolmogorov-Smirnov
# (KS exige padronização e comparação com  $N(0,1)$ )
# -----
ks <- ks.test(scale(Pós_teste), "pnorm")

# -----
# Criar tabela final
# -----
tabela_testes <- data.frame(
  Teste = c("Shapiro-Wilk", "Kolmogorov-Smirnov"),
  Estatistica = c(shapiro$statistic, ks$statistic),
  p_value = c(shapiro$p.value, ks$p.value),
```

```
gl = c(length(Pós_teste), length(Pós_teste)), # Graus de liberdade
Nivel_significância = "0.05",
Conclusao = c(
  ifelse(shapiro$sp.value < 0.05, "Rejeita H0: não normal", "Não rejeita H0: não normal"),
  ifelse(ks$sp.value < 0.05, "Rejeita H0: não normal", "Não rejeita H0: não normal")
)
)

# Imprimir tabela final
print(tabela_testes)
```

## A.9 Análise Comparativa do pré-teste e pós-teste em percentagem gerado em R

```
# --- Carregar bibliotecas necessárias ---
library(ggplot2)
library(dplyr)

# --- Classificar notas ---
classificar <- function(x) {
  ifelse(x >= 10, "Positiva (10)", "Negativa (<10)")
}

# --- Criar dataframe resumido ---
# Supondo que 'nota_preteste' e 'nota_posteste' já estão definidos
df <- data.frame(
  Teste = rep(c("Pré-teste", "Pós-teste"), each = length(nota_preteste)),
  Categoria = c(classificar(nota_preteste), classificar(nota_posteste))
)

# --- Contar frequência de cada categoria e calcular percentagem ---
df_resumo <- df %>%
  group_by(Teste, Categoria) %>%
  summarise(frequência = n(), .groups = 'drop') %>%
  group_by(Teste) %>%
  mutate(Percentagem = round(frequência / sum(frequência) * 100, 1))
```

```
# --- Gráfico de barras 2D com percentagem ---
ggplot(df_resumo, aes(x = Teste, y = Percentagem, fill = Categoria)) +
  geom_bar(stat = "identity", position = "dodge", width = 0.5) +
  scale_fill_manual(values = c("Positiva (>10)" = "blue", "Negativa (<10)" =
  geom_text(aes(label = paste0(Percentagem, "%")),
            position = position_dodge(width = 0.5),
            vjust = -0.5, size = 4) +
  labs(title = "Comparação de Notas Positivas e Negativas Pré e Pós-teste",
        x = "Tipo de Teste",
        y = "Percentagem",
        fill = "Categoria") +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 100)) # Limitar a altura máxima para não ficar
```

## A.10 Teste de Wilcoxon Pareado em R

```
# --- Dados ---
nota_preteste <- c(0, 0, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 4.5, 4, 4, 4,
                  4, 4, 4.5, 4.5, 5, 6, 5, 5, 5, 5,
                  5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 9, 9, 9,
                  9, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10,
                  10, 10, 10.5, 11, 11, 11.5, 12,
                  12.5, 13, 13.5, 14.5, 15, 15.5,
                  0, 2, 2, 2.5, 6, 6.5, 7.5, 8,
                  8, 8, 2, 8, 8, 8.5, 9, 9, 9,
                  9, 9, 9, 9, 9, 10, 10.5, 10.5,
                  11, 11, 11, 11.5, 12, 12, 12,
                  12, 13, 13, 13, 14, 14, 14,
                  14.5, 15, 15, 15.5, 16, 16,
                  16.5, 16.5, 16.5, 16.75, 17,
                  18, 18, 18, 18)

nota_posteste <- c(20, 20, 20, 20, 20, 18, 13.5, 20, 20, 18,
                  19.5, 20, 19, 18, 20, 20, 20, 18,
                  19.5, 20, 19.5, 20, 16, 17, 18,
                  20, 18, 20, 16, 20, 18, 20, 20,
                  18, 20, 20, 18, 17.5, 18, 16.5,
                  15, 16.5, 19, 18, 20, 20, 20,
```

```

20, 20, 20, 20, 18, 20, 20,
20, 19.5, 19, 20, 20, 19,
20, 19, 19, 19.5, 19, 19.5,
18, 19.5, 16.5, 20, 20, 16.5,
18, 16, 17, 20, 20, 20, 18,
19, 15, 18, 14, 19.5,
14, 15.5, 17, 18.5, 10.5, 20,
20, 14, 20, 16, 19.5, 18,
13, 20, 19, 20, 18, 20,
20, 20, 20, 20)

```

## Função de Resumo

```

# --- Função de resumo ---
resumo <- function(x){
  data.frame(
    N = length(x),
    Media = mean(x),
    Mediana = median(x),
    Desvio_Padrao = sd(x),
    Minimo = min(x),
    Q1 = quantile(x, 0.25),
    Q3 = quantile(x, 0.75),
    Maximo = max(x)
  )
}

```

## Tabela Resumo

```

# --- Tabela final ---
tabela_resumo <- rbind(
  "Pré-teste" = resumo(nota_preteste),
  "Pós-teste" = resumo(nota_posteste)
)

tabela_resumo

```

## A.11 Anexo: Credencial

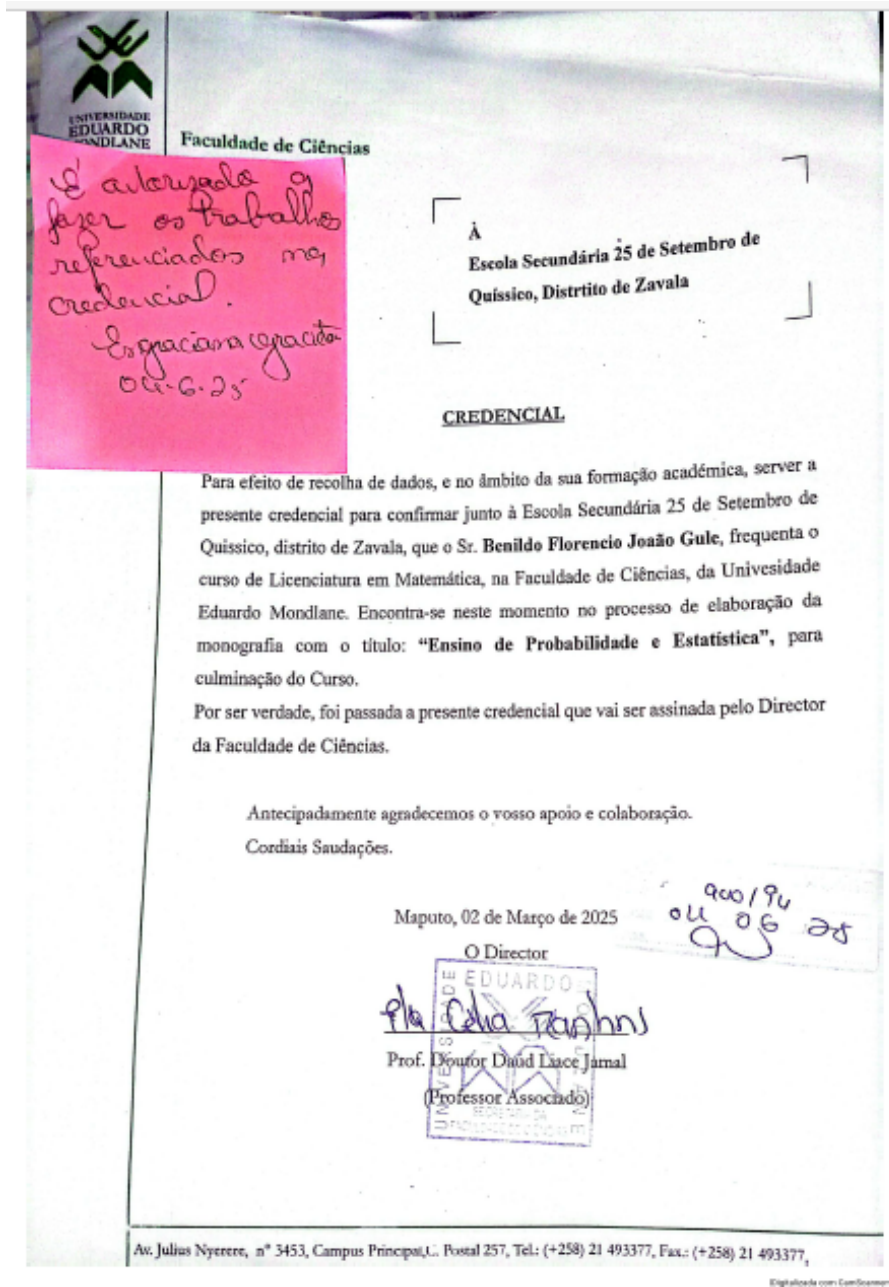


Figura A.1: Credencial