UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

# TRABALHO DE LICENCIATURA

## TEMA

# SOBRE ALGUNS CRITÉRIOS DE C-ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

AUTOR: JOSÉ ANTONIO NHAVOTO
SUPERVISOR: PROF. DOUTOR MANUEL JOAQUIM ALVES



MAPUTO, MAIO DE 2007

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA

TEMA

# SOBRE ALGUNS CRITÉRIOS DE C- ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

**Autor:** José António Nhavoto

**Supervisor:** Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves

Maputo, Maio de 2007

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA

TEMA

# SOBRE ALGUNS CRITÉRIOS DE C- ESTABILIDADE PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

**Autor:** José António Nhavoto, estudante finalista do curso de Informática

**Supervisor:** Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves, Professor Associado em Equações Diferenciais no Departamento de Matemática e Informática

Maputo, 2007

# DECLARAÇÃO SOB PALAVRA DE HONRA

Declaro que esta dissertação nunca foi apresentada para obtenção de qualquer grau e que ela constitui o resultado da minha investigação pessoal, estando indicados no texto e na bibliografia as fontes que utilizei ao longo do mesmo.

José António Nhavoto

José António Nhavoto

# Conteúdo

# AGRADECIMENTOS

A concretização do presente trabalho contou com o apoio, disponibilidade e simpatia de muitas pessoas, às quais quero agora agradecer por tudo o que com elas aprendi. Neste sentido terei, necessariamente, de agradecer aos professores do Departamento de Matemática e Informática (DMI) que, ao longo destes cinco anos, me facultaram inúmeros ensinamentos teóricos e práticos, sem os quais não poderia estar a realizar esta tese de licenciatura.

Agradeço especialmente

- À minha esposa, pela paciência, disponibilidade em me ceder tempo sempre que precisei, pelo seu amor e amizade.
- Aos meus familiares pela sua compreensão, boa disposição, incentivo e ajuda com que sempre me presentearam ao longo destes anos.
- Aos meus colegas, conhecidos e amigos do DMI pelo apoio moral e pela paciência que sempre me deram em momentos de maior aflição.
- Aos Trabalhadores e Corpo Técnico do DMI.
- Ao Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves, meu Professor e Supervisor, pelo acompanhamento ao longo de todo este percurso. Pelo seu apoio, disponibilidade, seus comentários teóricos, sugestões e indicações bibliográficas.

Com todos gostaria de partilhar a satisfação que é ver este trabalho concretizado, sendo que a eles devo, sem dúvida, muito do que cresci e aprendi ao longo da sua realização.

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais e à minha esposa Caldina Nhavoto.

# SIMBOLOGIA

- $\mathbb{R}^n$ é o espaço de vectores $n$-dimensionais, com a norma $|\cdot|$
- $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ denota a norma no espaço $\mathbf{X}$; se estiver claro sobre o espaço $\mathbf{X}$ a que nos referimos, então escreveremos simplesmente $\|\cdot\|$
- $\dim \mathbf{M}$ denota a dimensão da multivariedade linear $\mathbf{M}$
- $\|\mathcal{A}\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}$ denota a norma do operador linear limitado $\mathcal{A} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}$
- $\mathcal{A}^*$ é o operador conjugado em relação ao operador linear $\mathcal{A}$
- $R(\mathcal{A})$ é o contradomínio do operador $\mathcal{A}$
- $D(\mathcal{A})$ é o domínio do operador $\mathcal{A}$
- $\equiv$ significa "identicamente igual"
- $\stackrel{\mathrm{def}}{=}$ significa "igual por definição"
- $\mathbf{L}_p[0,1] \equiv \mathbf{L}_p$ $(1 \le p < \infty)$ é o espaço de classes equivalentes de funções $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$ somáveis em $p$ grau, cuja norma é

  $$\|x\|_{\mathbf{L}_p} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left( \int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

  e a relação de semi-ordenamento $\le$: $x \le y$, se $x(t) \le y(t)$ para quase todo $t \in [0,1]$

- $\mathbf{L}_\infty[0,1] \equiv \mathbf{L}_\infty$ é o espaço de funções $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$ (classes equivalentes) mensuráveis e limitadas na essência, cuja norma é

  $$\|x\|_{\mathbf{L}_\infty} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{0 \le t \le 1} |x(t)|$$

  e a relação de semi-ordenamento está definida como em $\mathbf{L}_1$

- $W_p^n[0,1] \equiv W_p^n$ é o espaço de funções $n-1$ vezes diferenciáveis $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$ com derivada $x^{(n-1)}$ absolutamente contínua tal, que $x^{(n)} \in \mathbf{L}_p$,

$$\|x\|_{W_p^n} \stackrel{\text{def}}{=} \|x^{(n)}\|_{\mathbf{L}_p} + \sum_{i=0}^{n-1} |x^{(i)}(0)|$$

- $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ é o produto directo dos espaços lineares $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$
- $Ker\,\mathcal{A}$ é o núcleo do operador $\mathcal{A}$
- $ind\,\mathcal{A}$ é o índice do operador $\mathcal{A}$
- $\mathcal{O}$ é o operador nulo
- $E$ é a matriz unitária
- $f(t,\cdot)$ significa que $t$ está fixo e $f$ considera-se como uma função sómente do segundo argumento
- $f(\cdot,s)$ significa que $s$ está fixo e $f$ considera-se como uma função sómente do primeiro argumento
- $\blacksquare$ denota o fim da demonstração ou exemplo.

# INTRODUÇÃO

A Teoria Matemática de Estabilidade para equações diferenciais é parte fundamental da Matemática e da Mecânica Teórica e tem os seus primórdios nos finais do século XIX, sendo seu fundador o matemático Lyapunov, que dedicou à este tema um ciclo de trabalhos, onde se destaca a sua tese de doutoramento "Problema geral sobre a estabilidade do movimento". Nesta tese Lyapunov mostra os *...casos nos quais a primeira aproximação, realmente, resolve a questão da estabilidade...*

O problema de estabilidade do movimento de sistemas com um número finito de graus de liberdade reduz-se, segundo Lyapunov, à investigação da estabilidade da solução trivial (não perturbada) $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{0.0.1}$$

onde $a_{ik}(t)$, $f_i(t)$ são da classe $C(I)$, isto é, os coeficientes do sistema e os membros livres são funções contínuas no intervalo $I = \{t : a < t < \infty\}$. Ao introduzir as denotações

$$x = col[x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad A(t) = [a_{ik}(t)] \quad \text{e} \quad f(t) = col[f_1(t), f_n(t), \ldots, f_n(t)],$$

podemos reescrever o sistema (0.0.1) duma forma mais cómoda:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

onde $A(t) \in C(I)$ e $f(t) \in C(I)$.

O presente trabalho consiste na introdução, quatro capítulos, conclusão, recomendações e bibliografia citada.

No primeiro capítulo faz-se uma abordagem sobre as propriedades gerais dos sistemas de equações diferenciais. De seguida estuda-se a fórmula de Ostrogradskiĭ–Liouville. A função de Cauchy é aqui estudada. Procede-se neste capítulo a formulação e demonstração do lema de Grönwall–Bellman. Seguidamente são enunciados e demonstrados alguns teoremas fundamentais para o tema em estudo.

No segundo capítulo começa-se pela introdução do conceito de estabilidade (nomeadamente, estável, assimptoticamente estável e exponencialmente estável). De seguida estabelecem-se alguns teoremas sobre estabilidade de sistemas diferenciais (lineares e não lineares) e faz-se a análise de casos de estabilidade para sistemas diferenciais lineares. Por fim, faz-se um estudo da estabilidade de sistemas diferencias lineares quase-lineares. Aqui, a maior parte dos exemplos são acompanhados de uma ilustração gráfica.

O terceiro capítulo é dedicado a alguns critérios clássicos de estabilidade, nomeadamente de Hurwitz, Lienard-Chipard e Mikhailov. Neste capítulo, os exemplos do critério de Hurwitz fazem-se acompanhar por um software elaborado pelo autor.

No quarto e último capítulo estabelece-se o modo de construção de um domínio de estabilidade e lida-se com a equação modelo incluindo o modelo de construção dessa equação. O W−método é estudado neste capítulo. A parte mais importante deste capítulo é o último ponto que trata dos critérios de $\mathbf{C}-$ estabilidade.

Finalmente, apresentam-se as conclusões e recomendações deste trabalho.

# Capítulo 1

# Função de Cauchy para sistemas de equações diferenciais

## 1.1 Propriedades gerais de soluções de sistemas diferenciais lineares

Vejamos o sistema diferencial linear [7]

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k(t) + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.1.1}$$

onde $a_{ik}$, $f_i$ são da classe $C(I)$, isto é, os coeficientes do sistema e os membros livres são funções contínuas no intervalo $I \stackrel{\text{def}}{=} \{t : a < t < \infty\}$. Introduzindo a denotação matricial

$$x = col[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad A(t) = [a_{ik}(t)], \quad f(t) = col[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)],$$

podemos reescrever o sistema (1.1.1) duma forma mais cómoda [2], [4], [7], [19]:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \tag{1.1.2}$$

onde $A(t) \in C(I)$, $f(t) \in C(I)$.

Para o sistema linear (1.1.2) cumpre-se o seguinte teorema de existência e unicidade de solução:

**Teorema 1.1.1.** *Para qualquer sistema de valores $t_0 \in I$, $x_0 = col[x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]$, existe a solução $x = x(t)$ do sistema (1.1.2), definida para todos $t \in I$ e que satisfaz a condição inicial $x(t_0) = x_0$, sendo esta solução, com tais propriedades, única em $I$.*

**Demonstração.** Seja $X(t) = [x_{ik}(t)]$ (det $X(t) \neq 0$) a matriz fundamental do respectivo sistema diferencial homogéneo [2], [4], [19]

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{1.1.3}$$

isto é, a matriz consiste em $n$ soluções linearmente independentes

$$x^{(1)}(t) = col[x_{11}(t), x_{21}(t), \ldots, x_{n1}(t)],$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots$$

$$x^{(n)}(t) = col[x_{1n}(t), x_{2n}(t), \ldots, x_{nn}(t)].$$

Vamos mostrar que a matriz $X(t)$ satisfaz a equação matricial

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t). \tag{1.1.4}$$

Realmente, como a função $x_{ik}(t)$ satisfaz a $i$–ésima equação do sistema (1.1.3), então temos

$$\dot{x}_{ik}(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{is}(t)x_{sk}(t). \tag{1.1.5}$$

Consequentemente, e recordando a regra de multiplicação de matrizes [3], [4], [19], obtemos

$$\dot{X}(t) = \dot{x}_{ik}(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{is}(t)x_{sk}(t) = A(t)X(t). \quad \blacksquare$$

Se $X(t)$ é a matriz fundamental do sistema (1.1.3), então a solução geral deste sistema pode escrever-se na forma

$$x(t) = X(t)c, \tag{1.1.6}$$

onde $c = col[c_1, c_2, \ldots, c_n]$ é uma certa constante matriz-coluna. Suponhamos que a solução $x = x(t)$ satisfaz a condição inicial $x(t_0) = x_0$. Colocando, em (1.1.6), $t = t_0$ teremos

$$x(t_0) = X(t_0)c \Longrightarrow c = X^{-1}(t_0)x(t_0).$$

Consequentemente,

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0).$$

Introduzindo a matriz de Cauchy[1]

$$C(t, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} X(t)X^{-1}(t_0),$$

[1]Augustin Louis Cauchy (1789–1857) — matemático francês

obtemos

$$x(t) = C(t, t_0)x(t_0). \tag{1.1.7}$$

Em particular, se a matriz fundamental $X(t)$ é normada quando $t = t_0$, isto é, $X(t_0) = E$, onde $E$ é a matriz unidade, então a fórmula (1.1.7) tem a forma

$$x(t) = X(t)x(t_0).$$

**Observação 1.1.1.** *A matriz de Cauchy não depende da escolha da matriz fundamental* $X(t)$.

Realmente, se $\breve{X}(t)$ é uma outra matriz fundamental do sistema (1.1.1), então temos $\breve{X}(t) = X(t)B$, onde $B$ é uma matriz constante não singular. Daqui, $\breve{X}^{-1}(t) = B^{-1}X^{-1}(t)$ e, consequentemente,

$$\breve{C}(t, t_0) = \breve{X}(t)\breve{X}^{-1}(t_0) = X(t)BB^{-1}X^{-1}(t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = C(t, t_0).$$

## 1.2 Fórmula de Ostrogradskiĭ-Liuoville

Seja $X(t) = [x_{ik}(t)]$ a matriz fundamental do sistema diferencial (1.1.3) e $W(t) = \det X(t)$ é o determinante de Wronskiĭ[2] [2]. Usando a regra de derivação do determinante obtemos

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{x}_{i1}(t) & \dots & \dot{x}_{ik}(t) & \dots & \dot{x}_{in}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Daqui, e como

$$\dot{x}_{ik}(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{is}(t)x_{sk}(t), \qquad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

temos

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{is}(t) \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1k}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1}(t) & \dots & x_{sk}(t) & \dots & x_{sn}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nk}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{is}(t)\delta_{is}W(t),$$

[2]Joseh Hoëne Wronskiĭ (1778-1853) — matemático e filósofo francês

onde $\delta_{is} = 0$, se $i \neq s$, e $\delta_{is} = 1$, se $i = s$. Assim,

$$\frac{dW}{dt} = W(t)\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) = S_p A(t) W(t).$$

Logo,

$$\frac{dW}{W(t)} = S_p A(t) d(t).$$

Integrando a última equação de $t_0$ até $t$, onde $t_0 \in I$, $t \in I$, obtemos a fórmula de Ostrogradskiĭ[3]-Liouville[4]

$$W(t) = W(t_0)\exp\int_{t_0}^{t} S_p A(t_1)dt_1.$$

## 1.3 Função de Cauchy

Consideremos a equação diferencial linear

$$\mathcal{L}x \stackrel{\text{def}}{=} x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \cdots + p_n x = f, \tag{1.3.1}$$

onde $p_i = p_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x = x(t)$, $f = f(t)$.

Como é sabido, a solução geral desta equação tem a forma

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x_k(t) + v(t),$$

onde $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ é o sistema fundamental de soluções (sfs), isto é, $n$ soluções linearmente independentes da equação homogénea

$$x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \cdots + p_n x = 0, \tag{1.3.2}$$

$v(t)$ é solução particular de (1.3.1). A determinação de $v(t)$ é mais complicada. No caso geral a solução particular $v(t)$ determina-se pelo método de variação de constantes arbitrárias (método de Lagrange[5]) [1]. O método de Lagrange requer muitos cálculos e não é cómodo, pois ao mudar-se a parte direita $f(t)$ precisamos realizar novamente todos os cálculos. Uma modificação do método de Lagrange é a solução de (1.3.1) com ajuda da função de Cauchy [13].

[3]Mikhail Vasilevich Ostrogradskiĭ (1801–1862)—matemático ucraniano
[4]Joseph Liouville (1809–1882) — matemático francês
[5]Joseph Louis de Lagrange (1736–1813) — matemático francês

**Definição 1.3.1.** *Chama-se **função de Cauchy** $C(t,s)$ a função tal que para qualquer parte direita $f(t)$ o integral [15]*

$$v(t) = \int_a^t C(t,s)f(s)ds \tag{1.3.3}$$

*é solução particular da equação (1.3.1).*

A função $C(t,s)$ constrõe-se segundo o sfs da equação (1.3.1). Neste parágrafo iremos analisar a forma da função de Cauchy, demonstraremos algumas das suas propriedades mais importantes e mostraremos que o integral (1.3.3) é solução da equação (1.3.1), qualquer que seja $f(t)$.

Seja $x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)$ o sfs da equação (1.3.1),

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_0(t) & x_1(t) & \ldots & x_{n-1}(t) \\ x_0'(t) & x_1'(t) & \ldots & x_{n-1}'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{(n-1)}(t) & x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

o seu wronskiano (ou determinante de Wronskiĭ [4]). Vamos definir a função $C(t,s)$ do seguinte modo:

$$C(t,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} x_0(s) & x_1(s) & \ldots & x_{n-1}(s) \\ x_0'(s) & x_1'(s) & \ldots & x_{n-1}'(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{(n-2)}(s) & x_1^{(n-2)}(s) & \ldots & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \\ x_0(t) & x_1(t) & \ldots & x_{n-1}(t) \end{vmatrix}. \tag{1.3.4}$$

**Teorema 1.3.1.** *Para qualquer $s \in [a,b]$, onde $s$ é fixo, a função $C(t,s) = k(t)$ é solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_n(t)x(t) = 0, \\ x^{(k)}(s) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n-2, \quad x^{(n-1)}(s) = 1. \end{cases}$$

**Demonstração.** Utilizando o teorema de Laplace[6] [3], vamos escrever a função $C(t,s)$ na forma

$$C(t,s) = \frac{1}{W(s)} \sum_{k=0}^{n-1} x_k(t)x_k^*(s), \tag{1.3.5}$$

[6]Pierre Simon de Laplace (1749–1857) — matemático francês

onde $x_0^*(s), x_1^*(s), \dots, x_{n-1}^*(s)$ são os complementares algébricos dos elementos da última linha do determinante em (1.3.4). Se $s$ é fixo então, como segue das relações (1.3.5), $k(t)$ é uma combinação linear de soluções da equação homogénea:

$$C(t,s) = k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k(t),$$

onde $\alpha_k = \dfrac{x_k^*(s)}{W(s)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Como qualquer combinação linear de soluções da equação homogénea é novamente solução desta equação, então $k(t)$ é solução de (1.3.5).

Vamos agora mostrar que $k(t)$ satisfaz as condições iniciais. Calculemos os valores de $k(t)$ e suas derivadas no ponto $t = s$:

$$k(s) = C(s,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} x_0(s) & x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \\ x_0'(s) & x_1'(s) & \dots & x_{n-1}'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0(s) & x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \end{vmatrix} = 0,$$

$$k'(s) = \left.\frac{\partial C(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s} = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} x_0(s) & x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \\ x_0'(s) & x_1'(s) & \dots & x_{n-1}'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0'(s) & x_1'(s) & \dots & x_{n-1}'(s) \end{vmatrix} = 0,$$

$$k''(s) = \left.\frac{\partial C(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s} = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} x_0(s) & x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \\ x_0'(s) & x_1'(s) & \dots & x_{n-1}'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n-2)}(s) & x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \\ x_0''(s) & x_1''(s) & \dots & x_{n-1}''(s) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$k^{(n-2)}(s) = \left.\frac{\partial^{(n-2)} C(t,s)}{\partial t^{(n-2)}}\right|_{t=s} = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} x_0(s) & x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \\ x_0'(s) & x_1'(s) & \dots & x_{n-1}'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n-2)}(s) & x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \\ x_0^{(n-2)}(s) & x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{vmatrix} = 0.$$

Como

$$k^{(n-1)}(s) = \left.\frac{\partial^{(n-1)}C(t,s)}{\partial t^{(n-1)}}\right|_{t=s} = \frac{1}{W(s)}\begin{vmatrix} x_0(s) & x_1(s) & \dots & x_{n-1}(s) \\ x_0'(s) & x_1'(s) & \dots & x_{n-1}'(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(n-2)}(s) & x_1^{(n-2)}(s) & \dots & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \\ x_0^{(n-1)}(s) & x_1^{(n-1)}(s) & \dots & x_{n-1}^{(n-1)}(s) \end{vmatrix},$$

então

$$k^{(n-1)}(s) = \frac{W(s)}{W(s)} = 1. \blacksquare$$

Do Teorema 1.3.1 segue que $C(t,s)$, para qualquer $s \in [a,b]$, $s$ é fixo, é solução da equação homogénea (1.3.2), e satisfaz as condições

$$C(s,s) = 0, \quad \left.\frac{\partial C(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s} = 0, \ \dots, \ \left.\frac{\partial^{(n-2)}C(t,s)}{\partial t^{(n-2)}}\right|_{t=s} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{(n-1)}C(t,s)}{\partial t^{(n-1)}}\right|_{t=s} = 1. \qquad (1.3.6)$$

Vamos agora mostrar que, para qualquer função $f(t)$ da equação (1.3.1), a função

$$v(t) = \int_a^t C(t,s)f(s)ds$$

é solução particular desta equação.

**Teorema 1.3.2.** *A solução $v(t)$ do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + p_n(t)x(t) = f(t), \\ x^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

*tem a forma*

$$v(t) = \int_a^t C(t,s)f(s)ds.$$

**Demonstração.** Vamos, primeiro, verificar que $\mathcal{L}v = f$. Usando a fórmula de derivação do integral dependente de parâmetro [1] temos:

$$v'(t) = \int_a^t \frac{\partial C(t,s)}{\partial t} f(s)ds + C(t,t)f(t).$$

Da propriedade (1.3.6) da função de Cauchy segue que $C(t,t)=0$, logo

$$v'(t)=\int\limits_a^t \frac{\partial C(t,s)}{\partial t}f(s)ds.$$

De modo análogo

$$v^{(k)}(t)=\int\limits_a^t \frac{\partial^k C(t,s)}{\partial t^k}f(s)ds, \quad k=2,3,\ldots,n-1,$$

e

$$v^{(n)}(t)=\int\limits_a^t \frac{\partial^n C(t,s)}{\partial t^n}f(s)ds+\left.\frac{\partial^{n-1}C(t,s)}{\partial t^{n-1}}\right|_{s=t}f(t)=\int\limits_a^t \frac{\partial^n C(t,s)}{\partial t^n}f(s)ds+f(t).$$

Colocando a função $v(t)$ e as suas derivadas na parte esquerda da equação (1.3.1), e agrupando as parcelas, obtemos

$$(\mathcal{L}v)(t)=f(t)+\int\limits_a^t\left[\frac{\partial^n C(t,s)}{\partial t^n}+p_1(t)\frac{\partial^{n-1}C(t,s)}{\partial t^{n-1}}+\cdots+p_n(t)C(t,s)\right]f(s)ds.$$

Como a função de Cauchy, para qualquer $s$ fixo, é solução do problema homogéneo, então

$$\frac{\partial^n C(t,\cdot)}{\partial t^n}+p_1(t)\frac{\partial^{n-1}C(t,\cdot)}{\partial t^{n-1}}+\cdots+p_n(t)C(t,\cdot)=0.$$

Deste modo, $\mathcal{L}v=f$, isto é,

$$v(t)=\int\limits_a^t C(t,s)f(s)ds$$

é solução da equação (1.3.1). Facilmente verifica-se que

$$v(a)=v'(a)=\cdots=v^{(n-1)}(a)=0. \quad \blacksquare$$

Do Teorema 1.3.2 segue que a solução geral da equação (1.3.1) tem a forma

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k x_k(t)+\int\limits_a^t C(t,s)f(s)ds.$$

**Exemplo 1.3.1.** Determine a solução particular da equação

$$x''' = e^t, \qquad t \in [0,1].$$

**Resolução.** Temos $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = t^2$ que é o sfs,

$$C(t,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ 0 & 1 & 2s \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix} = \frac{(s-t)^2}{2},$$

onde

$$W(s) = \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ 0 & 1 & 2s \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Logo

$$v(t) = \int_0^t \frac{(s-t)^2}{2} e^s ds = \frac{2e^t - (t^2+2t+2)}{2}. \blacksquare$$

## 1.4 Lema de Grönwall–Bellman

**Lema 1.4.1 (de Grönwall[7]– Bellman[8]).** *Sejam* $u(t) \geq 0$ *e* $f(t) \geq 0$ *se* $t \geq t_0$ *e* $u(t) \in C_{[t_0,\infty]}$, $f(t) \in C_{[t_0,\infty]}$ *e suponhamos que para* $t \geq t_0$ *se cumpre a desigualdade*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(s)u(s)ds, \tag{1.4.1}$$

*onde* $c$ *é uma constante positiva. Neste caso, para* $t \geq t_0$, *cumpre-se a desigualdade*

$$u(t) \leq c \exp \int_{t_0}^t f(s)ds. \tag{1.4.2}$$

**Demonstração.** Da desigualdade (1.4.1) obtemos

$$\frac{u(t)}{c + \int_{t_0}^t f(s)u(s)ds} \leq 1$$

[7]Thomas Hakon Grönwall (1877–1932)— matemático sueco

[8]Richard Ernest Bellman (1920–1984)— matemático norte-americano

e

$$\frac{f(t)u(t)}{c+\int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds} \leq f(t). \tag{1.4.3}$$

Tendo em conta que

$$\frac{d}{dt}\left[c+\int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds\right] = f(t)u(t),$$

então, integrando a desigualdade (1.4.3) de $t_0$ até $t$ teremos

$$\ln\left[c+\int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds\right] - \ln c \leq \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Daqui, e fazendo uso da desigualdade (1.4.1), obtemos

$$u(t) \leq c+\int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds \leq c\exp\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds. \quad \blacksquare$$

**Observação 1.4.1.** *Nas fórmulas* (1.4.1) *e* (1.4.2), *fazendo* $c \to +0$, *verificamos que o Lema 1.4.1 mantém-se correcto, se* $c \equiv 0$.

**Lema 1.4.2** (**de Grönwall – Bellman**). *Suponhamos que a função* $u(t)$ *contínua e positiva para quaisquer valores* $t, \tau \in ]a, b[$, *satisfaz a desigualdade integral*

$$u(t) \leq u(\tau) + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)|ds|, \tag{1.4.4}$$

*onde* $f(t) \in C_{]a,b[}$ *e* $f(t) \geq 0$ *se* $a < t < b$. *Então, se* $a < t_0 \leq t < b$, *é correcta a avaliação*

$$u(t_0)\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds\right] \leq u(t) \leq u(t_0)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds\right]. \tag{1.4.5}$$

**Demonstração.** Da desigualdade (1.4.4), se $t \geq \tau$, temos

$$u(t) \leq u(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} f(s)u(s)ds.$$

Daqui, e com base no Lema 1.4.1, obtemos

$$u(t) \leq u(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{t} f(s)ds\right].$$

De modo análogo, da desigualdade (1.4.4), se $t \leq \tau$, obtemos

$$u(t) \leq u(\tau) + \int_{t}^{\tau} f(s)u(s)ds. \tag{1.4.6}$$

Daqui, usando o método de demonstração do Lema 1.4.1, teremos

$$\frac{u(t)}{u(\tau) + \int_{t}^{\tau} f(s)u(s)ds} \leq 1$$

e

$$\frac{-f(t)u(t)}{u(\tau) + \int_{t}^{\tau} f(s)u(s)ds} \geq -f(t).$$

Integrando a última desigualdade de $t$ até $\tau$ obtemos

$$\ln u(\tau) - \ln\left[u(\tau) + \int_{t}^{\tau} f(s)u(s)ds\right] \geq -\int_{t}^{\tau} f(s)ds,$$

isto é,

$$u(t) \leq u(\tau) + \int_{t}^{\tau} f(s)u(s)ds \leq u(\tau) \exp\int_{t}^{\tau} f(s)ds.$$

Trocando $t$ por $\tau$ e $\tau$ por $t$, da última desigualdade se $t \geq \tau$ obtemos

$$u(\tau) \leq u(t) \exp\int_{\tau}^{t} f(s)ds$$

e, consequentemente,

$$u(t) \geq u(\tau) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} f(s)ds\right]. \tag{1.4.7}$$

Colocando, nas desigualdades (1.4.6) e (1.4.7), $\tau = t_0$ obtemos a avaliação (1.4.5). ■

**Lema 1.4.3.** *Sejam* $u(t) \geq 0$ *e* $f(t) \geq 0$ *se* $t \geq t_0$, $u(t) \in C_{[t_0,\infty]}$, $f(t) \in C_{[t_0,\infty]}$ *e suponhamos que é justa a desigualdade*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)\phi(u(s))ds, \tag{1.4.8}$$

*onde* $c$ *é uma constante positiva e* $\phi(u)$ *é uma função contínua, não decrescente se* $0 < u < \overline{u}$ $(\overline{u} \leq \infty)$ *e suponhamos que*

$$\psi(u) = \int_{c}^{u} \frac{dv}{\phi(v)}, \quad 0 < u < \overline{u}. \tag{1.4.9}$$

*Então, se*

$$\int_{t_0}^{t} f(s)ds \leq \psi(\overline{u} - 0), \quad t_0 \leq t < \infty, \tag{1.4.10}$$

*é justa a desigualdade*

$$u(t) \leq \psi^{-1}\left[\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right], \tag{1.4.11}$$

*onde* $\psi^{-1}(u)$ *é função inversa de* $\psi(u)$. *Em particular, se* $\overline{u} = \infty$ *e* $\psi(\infty) = \infty$, *então a desigualdade* (1.4.11) *cumpre-se sem quaisquer limitações.*

**Demonstração.** Tendo em conta que $\phi(u)$ é crescente, da desigualdade (1.4.8) obtemos

$$\phi(u(t)) \leq \phi\left[c + \int_{t_0}^{t} f(s)\phi(u(s))ds\right]. \tag{1.4.12}$$

Daqui,

$$\frac{f(t)\phi(u(t))}{\phi\left[c + \int_{t_0}^{t} f(s)\phi(u(s))ds\right]} \leq f(t).$$

Integrando a desigualdade (1.4.12) segundo a variável $t$ de $t_0$ até $t$, se $t \geq t_0$, obtemos

$$\int_{t_0}^{t} \frac{f(s)\phi(u(t))dt}{\phi[c + \int_{t_0}^{t} f(s)\phi(u(s))ds]} \leq \int_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{1.4.13}$$

Seja

$$w(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\phi(u(s))ds,$$

então

$$w'(t) = f(t)\phi(u(t)).$$

Consequentemente, a fórmula (1.4.13) toma a forma

$$\int_{t_0}^{t} \frac{w'(t)}{\phi(w(t))}dt = \int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{ds}{\phi(s)} \leq \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Daqui, com base na fórmula (1.4.9), e tendo em conta que $w(t_0) = c > 0$ e $w(t) \geq c > 0$, teremos

$$\psi(w(t)) - \psi(w(t_0) \leq \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

ou, como $\psi(w(t_0)) = \psi(c) = 0$, então

$$\psi(w(t)) \leq \int_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{1.4.14}$$

Tendo em conta que

$$\psi'(u) = \frac{1}{\phi(u)} > 0 \quad \text{se} \quad 0 < u < \overline{u},$$

a função $v = \psi(u)$ possui uma inversa crescente contínua $u = \psi^{-1}(v)$, definida na região $\psi(+0) < v < \psi(\overline{u} - 0)$, onde $\psi(+0) < 0$. Por isso, se a desigualdade (1.4.10) tem lugar, então da desigualdade (1.4.14) obtemos

$$c + \int_{t_0}^{t} f(s)\phi(u(s))ds = w(t) \leq \psi^{-1}\left[\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right].$$

Daqui, e tendo em conta a desigualdade (1.4.13), obtemos a desigualdade (1.4.11). ∎

**Consequência 1.4.1.** *Se $\phi(u) = u$, então tem lugar a desigualdade* (1.4.2).

**Consequência 1.4.2.** *Se $\phi(u) = u^m$ $(m > 0, \quad m \neq 1)$ e cumpre-se a desigualdade*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)[u(s)]^m ds, \quad se \quad t \geq t_0,$$

*então*

$$u(t) \leq \left[ c^{1-m} + (1+m) \int_{t_0}^{t} f(s)ds \right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad se \quad 0 < m < 1$$

*e*

$$u(t) \leq \frac{1}{\left[ 1 - (m-1)c^{m-1} \int_{t_0}^{t} f(s)ds \right]^{\frac{1}{m-1}}},$$

*se* $m > 1$ *e* $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds < \frac{1}{(m-1)c^{m-1}}$ $\quad (t_0 \leq t)$.

# Capítulo 2

# ESTABILIDADE DE SISTEMAS DIFERENCIAIS

## 2.1 Noções principais sobre a teoria de estabilidade

Suponhamos que temos um sistema de equações diferenciais [7], [8]

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1.1}$$

onde $f_i(x_k)$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ é contínua, e seja $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a solução do sistema que para $t = t_0$ satisfaz as condições $\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Definição 2.1.1.** *A solução $\varphi_i(t)$ do sistema* (2.1.1) *chama-se* ***estável segundo Lyapunov***[1], *quando $t \to +\infty$, se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que para qualquer solução $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, do sistema* (2.1.1), *cujos valores iniciais $\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, satisfaçam as desigualdades*

$$|x_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta(\varepsilon), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*forem válidas as desigualdades*

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1.2}$$

*para qualquer $t \geq t_0$.*

[1]Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918) — matemático russo

**Definição 2.1.2.** *Se existir, pelo menos, uma solução $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, para a qual as desigualdades (2.1.2) não se verificam, por mais pequeno que seja $\delta > 0$, então diremos que $\varphi_i(t)$ é* ***instável****.*

**Definição 2.1.3.** *Se a solução $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, é estável e satisfaz as condições*

$$\lim_{t \to +\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

*quando $|x_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta$, então diremos que a solução $\varphi_i(t)$ é* ***assimptoticamente estável****.*

**Definição 2.1.4.** *A solução $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, é* ***exponencialmente estável*** *se existem as constantes positivas $N$ e $\gamma$ tais que para cada $\varphi_i(t_0)$ é válida a desigualdade*

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| \le N |x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| \exp(-\gamma(t - t_0)), \quad t > t_0.$$

**Exemplo 2.1.1.** Cada solução da equação

$$\dot{x} = 0 \tag{2.1.3}$$

é estável [8]. Realmente, a solução $x_1(t)$ desta equação, que satisfaz a condição inicial $x_1(t_0) = x_1^0$, é $x_1(t) = x_1^0 = \text{const}$. Examinemos uma outra solução $x_2(t)$ da equação (2.1.3) que satisfaz a condição inicial $x_2(t_0) = x_2^0$. Vemos que $x_2(t) = x_2^0 = \text{const}$. Para estas soluções teremos $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0|$, para todo $t$. Por conseguinte, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|x_2^0 - x_1^0| < \delta$, então para as soluções $x_2(t)$ e $x_1(t)$ cumpre-se a desigualdade $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| < \varepsilon = \delta(\varepsilon)$, para todo $t \ge t_0$. Por outro lado, qualquer solução da equação (2.1.3) é estável, contudo não existe estabilidade assimptótica:

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| \not\to 0, \qquad \text{quando } t \to \infty. \ \blacksquare$$

**Exemplo 2.1.2.** Cada solução da equação

$$\dot{x} + x = 0 \tag{2.1.4}$$

é assimptoticamente estável [8]. Na realidade, a solução geral da equação (2.1.4) tem a forma $x(t) = Ce^{-t}$. As soluções $x_1(t)$, $x_2(t)$ da equação (2.1.4), que satisfazem as condições iniciais $x_1(t) = x_1^0$, $x_2(t) = x_2^0$, são

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)} \qquad \text{e} \quad x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)}.$$

Daqui,

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| e^{-(t-t_0)} \to 0, \qquad \text{quando } t \to \infty, \ t > t_0. \ \blacksquare$$

O estudo da estabilidade da solução $\varphi_i(t)$ do sistema (2.1.1) pode ser reduzido ao estudo da estabilidade da solução nula $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de um certo sistema, análogo ao sistema (2.1.1),

$$\dot{x}_i(t) = \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1.5}$$

O ponto $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, chama-se **ponto de equilíbrio**.

**Definição 2.1.5.** *O ponto de equilíbrio $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, do sistema (2.1.5) é estável segundo Lyapunov se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para qualquer $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cujos valores iniciais $x_i(t_0) = x_i^0$ satisfaçam as desigualdades $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sejam verdadeiras as desigualdades $|x_i(t)| < \varepsilon$, para qualquer $t \geq t_0$.*

**Definição 2.1.6.** *O ponto de equilíbrio $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, diz-se instável se existir, pelo menos, uma solução $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, para a qual a desigualdade $|x_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, não se verifica, por mais pequeno que seja $\delta > 0$, para qualquer $t \geq t_0$.*

**Definição 2.1.7.** *Se, além de se verificarem as desigualdades $|x_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, também forem satisfeitas as condições $\lim_{t \to +\infty} |x_i(t)| = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então diz-se que a estabilidade é assimptótica.*

**Exemplo 2.1.3.** A solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= \phantom{-}x, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

que satisfaz as condições $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ é estável [7]. A solução do sistema (2.1.6), que satisfaz as condições dadas, é $x(t) = 0$, $y(t) = 0$. Qualquer solução deste sistema que satisfaça as condições $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ tem a forma

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \qquad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Escolhamos um valor arbitrário $\varepsilon > 0$ e mostremos que existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|x_0 - 0| < \delta$, $|y_0 - 0| < \delta$, então cumprem-se as desigualdades

$$|x_0 - 0| = |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon,$$

$$|y_0 - 0| = |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon,$$

para qualquer $t \geq 0$. Então, segundo a definição de Lyapunov, significa que a solução nula $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ é estável. Evidentemente,

$$\begin{aligned} |x_0 \cos t - y_0 \sin t| &\leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|, \\ |x_0 \sin t + y_0 \cos t| &\leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0|, \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

para qualquer $t$. Logo, se $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, então

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon, \tag{2.1.8}$$

para qualquer $t$. Por conseguinte, se considerarmos, por exemplo, $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, e se tivermos $|x_0| < \delta$, $|y_0| < \delta$, então atendendo à (2.1.7), as desigualdades (2.1.8) verificam-se para qualquer $t \geq 0$, isto é, a solução nula do sistema (2.1.6) é de facto estável, mas não é assimptoticamente estável. ■

**Exemplo 2.1.4.** A solução $\varphi(t) = t$, com a condição inicial $x(0) = 0$, da equação

$$\dot{x} = 1 + t - x \tag{2.1.9}$$

é estável e assimptoticamente estável [7]. Nota-se facilmente que a equação (2.1.9) é uma equação linear não homogénea. A sua solução geral é $x(t) = Ce^{-t} + t$. A condição inicial $x(0) = 0$ é satisfeita pela solução $\varphi(t) = t$ da equação (2.1.9). A condição inicial $x(0) = x_0$ da equação (2.1.9) pode ser escrita na forma

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)e^{-t}.$$

Daqui, resulta que, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (por exemplo, $\delta = \varepsilon$) tal que para qualquer solução $x(t)$ da equação (2.1.9), cujos valores iniciais satisfaçam a condição $|x_0 - 0| < \delta$, cumpre-se a desigualdade

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0|e^{-t} < \varepsilon,$$

para qualquer $t \geq 0$. Por conseguinte, a solução é estável. Além disso, uma vez que

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \to +\infty} |x_0 - 0|e^{-t} = 0,$$

a solução $\varphi(t) = t$ é assimptoticamente estável. ■

## 2.2 Teoremas gerais sobre estabilidade de sistemas diferenciais

Suponhamos que temos um sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2.1}$$

e seja $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função continuamente diferenciável de seus argumentos e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ certas funções do tempo $t$ que satisfazem o sistema de equações (2.2.1). A derivada total de $v$ em ordem ao tempo é:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.2.2}$$

Se o segundo membro da equação (2.2.1) não contém $t$, então tal sistema chama-se **autónomo** ou **estacionário** [8].

**Teorema 2.2.1 (de Lyapunov sobre estabilidade).** *Se para o sistema de equações diferenciais* (2.2.1) *existe uma função* $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *que é definida positivamente para* $t \geq t_0$, *cuja derivada total* $\frac{dv}{dt}$ *em ordem ao tempo, determinada de acordo com o sistema* (2.2.1), *não é positiva, então a solução nula do sistema (2.2.1) é estável.*

**Teorema 2.2.2 (de Lyapunov sobre estabilidade assimptótica).** *Se, para o sistema de equações diferenciais* (2.2.1) *existe uma função de sinal definido* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *cuja derivada total* $\frac{dv}{dt}$ *em ordem ao tempo, determinada de acordo com o sistema* (2.2.1), *seja uma função de sinal definido, oposto ao de* $v$, *então a solução trivial* $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *é assimptoticamente estável.*

As funções $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ chamam-se **funções de Lyapunov** [7], [8].

Os gráficos abaixo indicados, que ilustram os exemplo apresentados, foram produzidos usando um software disponível no site [21].

**Exemplo 2.2.1.** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y, \\ \dot{y} &= & -x. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

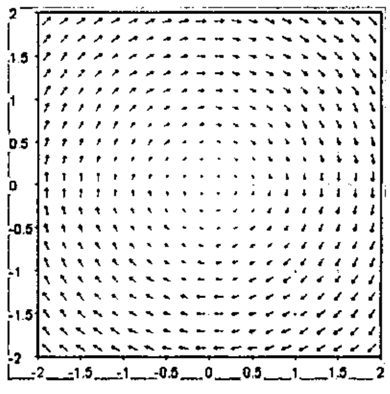


Fig. 2.1

Na qualidade de $v(x, y)$ escolhemos a função $v = x^2 + y^2$, que como se vê está definida positivamente. A sua derivada total em ordem ao tempo, de acordo com o sistema (2.2.3), é

$$\frac{dv}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy \equiv 0.$$

Do Teorema 2.2.1 resulta que o ponto estacionário $(0,0)$ do sistema (2.2.3) é estável. No entanto, a estabilidade não é assimptótica: as trajectórias do sistema (2.2.3) são circunferências (Fig. 2.1) e não tendem para $(0,0)$, quando $t \to +\infty$. ■

**Exemplo 2.2.2.** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - 3y, \\ \dot{y} &= x - y. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Na qualidade da função $v$ escolhemos $v = x^2 + 3y^2$. Ela está definida positivamente e a sua derivada $\frac{dv}{dt}$, tomada de acordo com o sistema (2.2.4), é igual a

$$\frac{dv}{dt} = 2x(-2x - 3y) + 6y(x - y) = -(2x^2 + 6y^2) \leq 0.$$

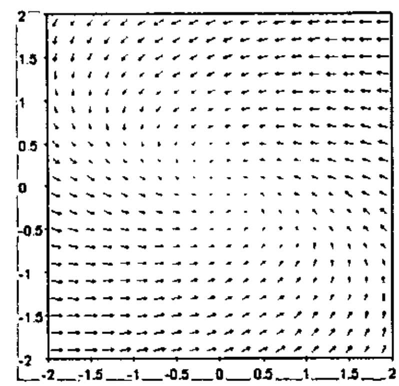

**Fig. 2.2**

Como $v$ e $\frac{dv}{dt}$ têm sinais opostos e $\frac{dv}{dt} = 0$ se $x = 0$ e $y = 0$, então segundo o Teorema 2.2.2 a solução trivial do sistema (2.2.4) é assimptoticamente estável (a Fig. 2.2 ilustra claramente está situação). ■

**Exemplo 2.2.3.** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -5y - 2x^3, \\ \dot{y} &= 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Facilmente vemos que a função $v = x^2 + y^2$ satisfaz as condições do Teorema 2.2.2:

(1) $v(x,y) \geq 0$,

(2) $\frac{dv}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leq 0$,

isto é, $\frac{dv}{dt} < 0$ e $\frac{dv}{dt} = 0$ somente para $x = 0$, $y = 0$ e, por conseguinte, a função é negativa. Vemos que, a solução $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ é assimptoticamente estável (a Fig. 2.3 ilustra claramente esta situação). ■

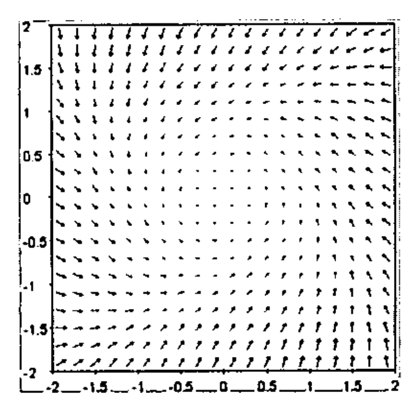

**Fig. 2.3**

**Teorema 2.2.3 (de Lyapunov sobre instabilidade).** *Suponhamos que para o sistema de equações diferenciais* (2.2.1) *existe uma função* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *diferenciável em torno da* *origem das coordenadas tal que* $v(0,0,\ldots 0,) = 0$. *Se a sua derivada total* $\dfrac{dv}{dt}$, *determinada de acordo com o sistema* (2.2.1), *for uma função definida positivamente e se existirem pontos próximos da origem das coordenadas, nos quais a função* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *toma valores positivos, então o ponto de equilíbrio* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *é instável.*

**Teorema 2.2.4** (de Chetaev[2] sobre instabilidade [8]). *Suponhamos que para o sistema de equações diferenciais* (2.2.1) *existe uma função* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *continuamente diferenciável em torno do ponto de equilíbrio* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *que satisfaz, numa vizinhança deste ponto, as seguintes condições:*

(1) *em qualquer vizinhança, por mais pequena que seja, do ponto de equilíbrio* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *existe um domínio* $\Omega_1$, *no qual* $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$, *sendo* $v = 0$ *nos pontos fronteiriços de* $\Omega_1$ *que são internos para* $\Omega$ *(Fig. 2.4);*

(2) *o ponto de equilíbrio* $O(0, 0, \ldots, 0)$ *é um ponto de fronteira do domínio* $\Omega_1$;

(3) *no domínio* $\Omega_1$, *a derivada* $\dfrac{dv}{dt}$, *determinada de acordo com o sistema* (2.2.1), *está definida positivamente.*

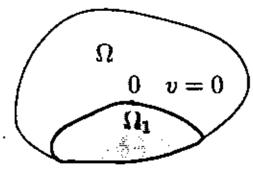


**Fig. 2.4**

*Então, o ponto de equilíbrio* $x_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *do sistema* (2.2.1) *é instável.*

**Exemplo 2.2.4.** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ \ x, \\ \dot{y} &= -y. \end{cases}$$

Tomando a função $v(x, y) = x^2 - y^2$, verifica-se que

$$\frac{dv}{dt} = 2x^2 + 2y^2 > 0.$$

Uma vez que existem pontos tão próximos quanto se queira da origem das coordenadas, nos quais $v > 0$ (por exemplo, $v = x^2 > 0$ ao longo da recta $y = 0$), estão satisfeitas as condições do Teorema 2.2.3 e o ponto de equilíbrio $O(0, 0)$ é, em virtude disso, instável (Fig. 2.5). ■

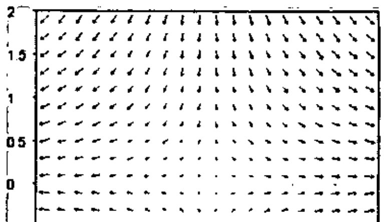


**Fig. 2.5**

[2]Nikolai Guryevich Chetaev (1902–1959)—matemático russo

**Exemplo 2.2.5.** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y, \\ \dot{y} &= y^2 + x. \end{cases}$$

Seja $v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$. Aqui, o domínio $v > 0$ é, por exemplo, $x > 0,\ y > 0$. No domínio $v > 0$ teremos

$$\frac{dv}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Em virtude do Teorema 2.2.4, a solução $x \equiv 0,\ y \equiv 0$ é instável (a Fig. 2.6 ilustra claramente esta situação). ■

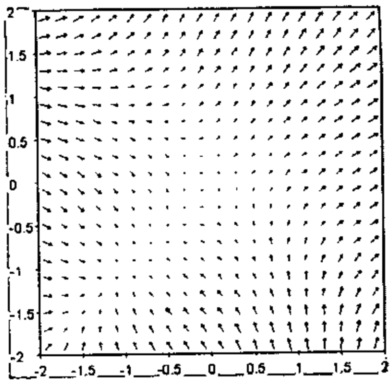


**Fig. 2.6**

**Teorema 2.2.5.** *As soluções de um sistema de equações diferenciais lineares*

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

*são todas estáveis ou todas instáveis.*

Esta afirmação não é verdadeira para sistemas não lineares, que podem ter simultaneamente soluções estáveis e soluções instáveis. Este caso é ilustrado no exemplo que segue.

**Exemplo 2.2.6.** Consideremos a equação não linear

$$\dot{x}(t) = 1 - x^2(t). \tag{2.2.5}$$

Esta equação admite, claramente, as soluções $\varphi(t) = 1$ e $\varphi(t) = -1$ [7]. A solução $\varphi(t) = -1$ desta equação é instável [7], [8], enquanto a solução $\varphi(t) = 1$ é assimptoticamente estável. Na realidade, quando $t \to +\infty$ todas as soluções da equação (2.2.5)

$$x(t) = \frac{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} + (1 - x_0)}$$

tendem para 1. Isto significa que a solução $\varphi(t) = 1$ desta equação é assimptoticamente estável. ■

## 2.3 Estabilidade de sistemas diferenciais lineares homogéneos

Consideremos um sistema de duas equações lineares homogéneas

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \tag{2.3.1}$$

ou [7], [8], [19]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

O ponto $(0, 0)$, onde anula-se o segundo membro do sistema (2.3.2), é o ponto de equilíbrio. Façamos a mudança $x_1 = x$ e $x_2 = y$. Procuramos a solução na forma [8]

$$x(t) = \alpha_1 e^{kt}, \quad y(t) = \alpha_2 e^{kt}.$$

Para definir $k$ obtemos a equação característica [2], [7], [8], [19]

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0, \tag{2.3.3}$$

e determinamos as suas raízes $k_1$ e $k_2$. Assim, distinguem-se os seguintes casos:

**Caso 1.** *As raízes $k_1$ e $k_2$ da equação característica (2.3.3) são reais e distintas.*

Neste caso a solução geral do sistema (2.3.2) tem a forma [1], [2]

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}, \\ y(t) &= B_1 e^{k_1 t} + B_2 e^{k_2 t}, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

onde dois dos quatro coeficientes são arbitrários.

(a) Se $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, então $x$ e $y$ tendem para zero quando $t \to +\infty$, portanto o ponto $(0, 0)$ é assimptoticamente estável (nó estável, Fig. 2.7).

(b) Se $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, então $x$ e $y$ tendem para $\infty$ quando $t \to +\infty$, portanto o ponto $(0, 0)$ é instável (nó instável, Fig. 2.8).

(c) Se $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, o ponto $(0,0)$ é instável (ponto sela, Fig. 2.9).

(d) Se $k_1 = 0$, $k_2 > 0$, o ponto $(0,0)$ é instável.

(e) Se $k_1 = 0$, $k_2 < 0$, o ponto $(0,0)$ é estável, mas não assimptoticamente.

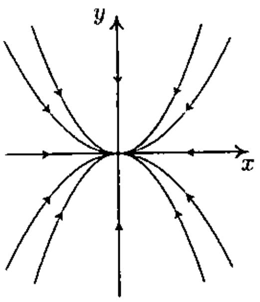


Fig. 2.7

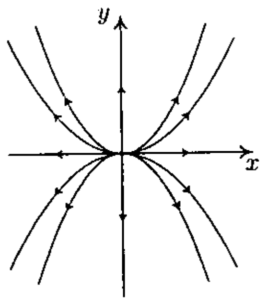


Fig. 2.8

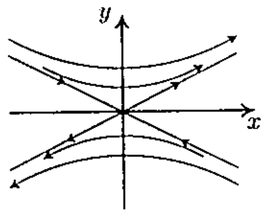


Fig. 2.9

**Caso 2.** *As raízes da equação característica (2.3.3) são complexas* $k_1 = p + qi$, $k_2 = p - qi$.

Neste caso a solução geral tem a forma [1], [2]

$$x(t) = e^{pt}(A_1 \cos qt + A_2 \sin qt),$$

$$y(t) = e^{pt}(B_1 \cos qt + B_2 \sin qt).$$

(a) Se $p < 0$, $q \neq 0$, o ponto $(0,0)$ é assimptoticamente estável (foco estável, Fig. 2.10).

(b) Se $p > 0$, $q \neq 0$, o ponto $(0,0)$ é instável (foco instável, Fig. 2.11).

(c) Se $p = 0$, $q \neq 0$, o ponto $(0,0)$ é estável (centro, Fig. 2.12).

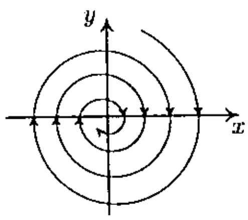


Fig. 2.10

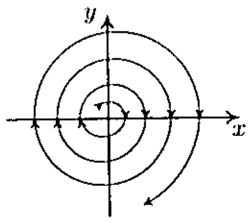


Fig. 2.11

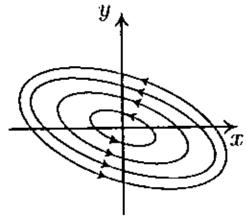


Fig. 2.12

**Caso 3.** *A raiz é dupla:* $k_1 = k_2 = k$.
A solução tem a forma [1], [2]

$$x(t) = e^{kt}(A_1 + A_2 t),$$

$$y(t) = e^{kt}(B_1 + B_2 t).$$

(a) Se $k < 0$, o ponto $(0, 0)$ é assimptoticamente estável (nó estável, Fig. 2.13).

(b) Se $k > 0$, o ponto $(0, 0)$ é instável (nó instável, Fig. 2.14).

(c) Se $k = 0$, o ponto $(0, 0)$ é estável.

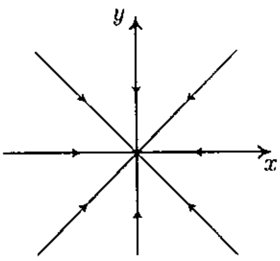


**Fig. 2.13**

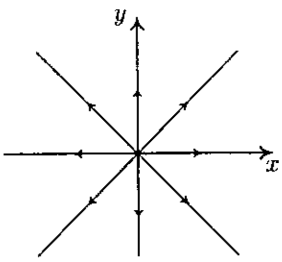


**Fig. 2.14**

**Exemplo 2.3.1.** Determinar o carácter do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x. \end{cases}$$

**Solução.** Neste caso a equação característica é

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad k^2 + 1 = 0.$$

As raízes da equação característica $k_{1,2} = \pm i$ são puramente imaginárias. Assim, o ponto de equilíbrio é estável e está no centro (a Fig. 2.15 ilustra com clareza esta situação). ∎

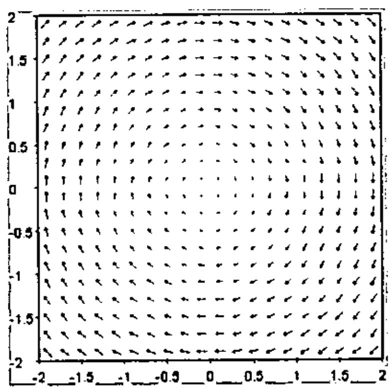


**Fig. 2.15**

**Exemplo 2.3.2** Caracterizar o ponto de equilíbrio $(0,0)$ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x+y, \\ \dot{y} &= -2x+y. \end{cases}$$

**Solução.** A equação característica é

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad k^2-4k+5=0.$$

Como as raízes da equação característica são complexas ($k_1 = 2-i$ e $k_2 = 2+i$) e porque $p = 2 > 0$, então o ponto $(0,0)$ é um foco instável (a Fig. 2.16 ilustra com clareza esta situação). ∎

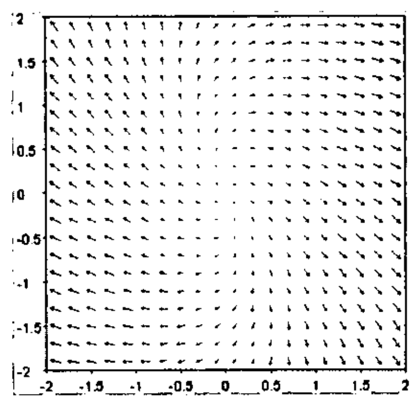


Fig. 2.16

**Exemplo 2.3.1.** Investigar o ponto de equilíbrio da equação de oscilações elásticas [7]

$$\frac{d^2x}{dt} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \beta^2 x = 0 \tag{2.3.5}$$

em função do parâmetro $\alpha$ ($\alpha > 0$) que representa o atrito e a resistência do meio.

**Solução.** A equação (2.3.5) é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \\ \dot{y} = -\beta^2 x - 2\alpha y. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Daqui,

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -\beta^2 & -2\alpha-k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad k^2+2\alpha k+\beta^2 = 0.$$

Logo,

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}, \quad \text{onde} \quad \Delta = \alpha^2 - \beta^2. \tag{2.3.7}$$

Distinguem-se os casos:

(a) $\alpha = 0$ (não existe resistência do meio).
Da equação (2.3.7) resulta $k_{1,2} = \pm i\beta$. O ponto de equilíbrio é estável, trata-se de um centro (todos os movimentos são periódicos).

(b) $\alpha > 0$, $\Delta < 0$.
As raízes $k_1$, $k_2$ são complexas conjugadas, com Re $k_j < 0$ $(j = 1, 2)$. Logo, o ponto de equilíbrio é um foco estável (as oscilações são amortecidas).

(c) $\alpha < 0$ ("atrito negativo"), $\Delta < 0$.
As raízes $k_1$, $k_2$ são complexas conjugadas, com Re $k_j > 0$ $(j = 1, 2)$. Logo, o ponto de equilíbrio é um foco instável.

(d) $\alpha > 0$, $\Delta \geq 0$ (a resistência do meio é grande, $\alpha \geq \beta$).
As raízes $k_1$, $k_2$ são reais negativas. O ponto de equilíbrio é um nó estável (todas as soluções são movimentos amortecidos e não oscilantes).

(e) $\alpha < 0$, $\Delta \geq 0$ (grande "atrito negativo").
As raízes $k_1$, $k_2$ são reais positivas. O ponto de equilíbrio é um nó instável. ■

**Teorema 2.3.1.** *Sejam $k_1$ e $k_2$ as raízes da equação característica*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0, \quad ou \quad k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \tag{2.3.8}$$

*do sistema linear*

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \tag{2.3.9}$$

*onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Então o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é:*

*(a) assimptoticamente estável se as partes reais de $k_1$ e $k_2$ são ambas negativas;*

*(b) estável, mas não assimptoticamente estável, se as partes reais de $k_1$ e $k_2$ são ambas nulas.*

*(c) instável se $k_1$ e/ou $k_2$ têm a parte real positiva.*

Em geral, para o sistema de equações lineares homogéneo de coeficientes constantes [8]

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.3.10}$$

a equação característica é

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.11}$$

Neste caso tem lugar o seguinte teorema:

**Teorema 2.3.2.**

*(a) Se as partes reais de todas as raízes da equação característica* (2.3.11) *do sistema* (2.3.10) *são negativas, então o ponto de equilíbrio* $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *é assimptoticamente estável.*

*(b) Se a parte real de pelo menos uma raíz da equação (2.3.11) é positiva,* Re $k_i = p_i > 0$, *então o ponto de equilíbrio* $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *do sistema (2.3.10) é instável.*

**Exemplo 2.3.2.** Verifique a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & -x & + & z, \\ \dot{y} = & -2y & - & z, \\ \dot{z} = & y & - & z. \end{cases}$$

**Solução.** Escrevendo a equação característica do sistema obtemos

$$\begin{vmatrix} -1-k & 0 & 1 \\ 0 & -2-k & -1 \\ 0 & 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0,$$

ou $(1+k)(k^2+3k+3) = 0$. As raízes desta equação são $k_1 = -1$ e $k_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e têm a parte real negativa. Logo, o ponto de equilíbrio deste sistema é assimptoticamente estável. ■

## 2.4 Estabilidade de sistemas diferenciais lineares com matriz quase-constante

**Teorema 2.4.1.** *Consideremos o sistema* [2], [4], [19]

$$\dot{x} = Ax, \tag{2.4.1}$$

*onde $A$ é uma matriz de dimensão $n \times n$. Suponhamos que* (2.4.1) *é estável quanto $t \longrightarrow +\infty$. Então o sistema*

$$\dot{y} = [A + B(t)]y, \tag{2.4.2}$$

*onde $B(t) \in C_{[t_0,+\infty]}$ e*

$$\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\|dt < \infty, \tag{2.4.3}$$

*é também estável quando $t \longrightarrow +\infty$.*

**Demonstração.** Sem limitação da sua essência façamos $t_0 = 0$. Suponhamos que $X(t)$ é a matriz fundamental do sistema (2.4.1) tal que $X(0) = E$. Considerando a expressão $B(t)y$ como o membro livre na equação (2.4.2) e aplicando o método de Lagrange de variação de constantes [1], [19] obtemos que cada solução $y(t)$ satisfaz a equação integral

$$y(t) = X(t)y(0) + \int_0^t X(t-s)B(s)y(s)ds, \quad t \geq 0. \tag{2.4.4}$$

Daqui,

$$\|y(t)\| \leq \|X(t)\|\|y(0)\| + \int_0^t \|X(t-s)\|\|B(s)\|\|y(s)\|ds.$$

Como o sistema (2.4.1) é estável, então a matriz $X(t)$ é limitada, isto é, $\|X(t)\| \leq k$, se $t \geq 0$. Deste modo,

$$\|y(t)\| \leq k\|y(0)\| + \int_0^t k\|B(s)\|\|y(s)\|ds.$$

Usando o lema de Grönwall–Bellman, teremos

$$\|y(t)\| \leq k\|y(0)\| \exp\left(k\int_0^t \|B(s)\|ds\right) \leq k\|y(0)\| \exp\left(k\int_0^\infty \|B(s)\|ds\right) < \infty.$$

Consequentemente, o sistema (2.4.2) é estável quando $t \rightarrow +\infty$. ■

**Teorema 2.4.2.** *Se a matriz $A$ é constante e o sistema*

$$\dot{x} = Ax \tag{2.4.5}$$

*é assimptoticamente estável quando $t \to +\infty$, então o sistema linear*

$$\dot{y} = [A + B(t)]y, \tag{2.4.6}$$

*onde $B(t) \in C_{[t_0,\infty]}$ e $B(t) \to 0$ se $t \to \infty$, é também assimptoticamente estável.*

**Demonstração.** Pelo facto do sistema (2.4.5) ser assimptoticamente estável, então as raízes características $\lambda_j(A)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, da matriz $A$ possuem partes reais negativas. Colocamos

$$\alpha = \max_j \mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.4.7}$$

e escolhemos um $\varepsilon > 0$ tal que é válida a desigualdade

$$\alpha + 2\varepsilon < 0. \tag{2.4.8}$$

Na equação (2.4.6) fazemos a mudança de variável

$$y = e^{At}z. \tag{2.4.9}$$

Então,

$$\dot{y} = e^{At}\dot{z} + Ae^{At}z = [A + B(t)]e^{At}z$$

e, consequentemente,

$$\dot{z} = e^{-At}B(t)e^{At}z.$$

Passando à equação integral teremos

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-As}B(s)e^{As}z(s)ds.$$

Daqui, tendo em conta que $y(t_0) = e^{At_0}z(t_0)$ e na base da fórmula (2.4.9), para a solução $y(t)$ obtemos a equação integral

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B(s)y(s)ds.$$

Fazendo a avaliação segundo a norma, se $t \geq t_0$, obtemos

$$\|y(t)\| \leq \|e^{A(t-t_0)}\|\|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|e^{A(t-s)}\|\|B(s)\|\|y(s)\|ds.$$

Temos, para $t \geq 0$,

$$\|e^{tA}\| \leq ce^{(\alpha+\varepsilon)t},$$

onde $c = c(\varepsilon)$ é uma certa constante positiva. Assim,

$$\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\|e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-s)}\|B(s)\|\|y(s)\|ds,$$

ou

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} + \int_{t_0}^{t} c\|B(s)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)s}\|y(s)\|ds.$$

Daqui, usando o lema de Grönwall–Bellman, teremos

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\|e^{-(\alpha+\varepsilon)t_0} \exp\left(\int_{t_0}^{t} c\|B(s)\|ds\right).$$

Consequentemente,

$$\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\|e^{(\alpha+\varepsilon)(t-t_0)+c\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|ds}. \tag{2.4.10}$$

Usando a regra de L'Hospital[3] [1], e tendo em conta as condições do teorema, obtemos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} \|B(s)\|ds}{t-t_0} = \lim_{t\to\infty} \frac{\|B(s)\|}{1} = 0.$$

Por isso mesmo,

$$\int_{t_0}^{t} \|B(s)\|ds < \varepsilon(t-t_0)$$

se $t \geq T$. Daqui, a desigualdade (2.4.10) toma a forma

$$\|y(t)\| \leq c\|y(t_0)\|e^{(\alpha+2\varepsilon)(t-t_0)},$$

se $t > T$, logo, devido à (2.4.8), para qualquer solução $y(t)$ do sistema (2.4.6) é justa a igualdade

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Deste modo, o sistema (2.4.6) é assimptoticamente estável. ■

[3] Guillaume François A. de L'Hospital (1661–1704) — matemático francês

# Capítulo 3

# CRITÉRIOS CLÁSSICOS DE ESTABILIDADE

## 3.1 Critério de Hurwitz

Consideremos a equação diferencial linear com coeficientes reais constantes [7], [8]

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \qquad a_0 > 0. \tag{3.1.1}$$

A solução nula $y \equiv 0$ da equação (3.1.1) é assimptoticamente estável se todas as raízes da equação característica [7], [8]

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{3.1.2}$$

tiverem a parte real negativa.

Do ponto de vista de aplicação, grande importância jogam as condições necessária e suficiente para que todas as raízes da equação algébrica (3.1.1) se encontrem à esquerda do eixo imaginário (no caso das equações de 1º e 2º graus esta condição é também suficiente). As condições necessária e suficiente para que sejam negativas as partes reais da equação (3.1.2) foram estabelecidas por Hurwitz[1].

**Critério 3.1.1 (de Hurwitz).** *Para que todas as raízes da equação (3.1.2) tenham partes reais negativas é necessário e suficiente que sejam positivos todos os menores principais da matriz*

[1] Adolf Hurwitz (1859–1919) — matemático alemão

*de Hurwitz* [7], [8]

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

**Definição 3.1.1.** *Diremos que o polinómio $f(\lambda)$, de grau $n \geq 1$, é **estável** [8], se todas as suas raízes $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ têm as partes reais negativas:* $\mathrm{Re}\ \lambda_j < 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, *isto é, todas as raízes do polinómio encontram-se no semi-plano esquerdo.*

A matriz de Hurwitz compõe-se do seguinte modo: na diagonal principal situam-se os coeficientes do polinómio (3.1.2), a partir de $a_1$ até $a_n$. As colunas são compostas, alternadamente, pelos coeficientes de índice ímpar e pelos coeficientes de índice par (contando-se, entre estes últimos, o coeficiente $a_0$). Todos os restantes elementos da matriz, correspondentes a índices menores que 0 ou maiores que $n$, são nulos. Deste modo, os menores principais da matriz de Hurwitz têm a forma

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

O algoritmo para construir a matriz de Hurwitz (na linguagem Visual Basic 6.0) está ilustrado abaixo.

```
Sub Build_Matrices()
    For n=1 To System_DIM  'System_DIM é o grau da equação
        For m = 1 To System_DIM
            If (n Mod 2 = 0) Then
                If (2*m-n>= 0 And 2*m-n<= System_DIM) Then
                    Matrix_A(m, n)=Val(Text3(2 * m - n)) 'Text3(.) é
                    onde estão guardados os coeficientes da equação
                Else
                    Matrix_A(m, n) = 0
                End If
            Else
                If (2*m - n>0 And 2*m-n<= System_DIM) Then
                    Matrix_A(m, n)=Val(Text3(2 * m - n))
                Else
                    Matrix_A(m, n) = 0
                End If
```

```
            End If
        Next m
    Next n
End Sub
```

A condição de Hurwitz tem o seguinte enunciado: *para a estabilidade assimptótica da solução* $y = 0$ *da equação (3.1.2) é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as desigualdades*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0. \tag{3.1.4}$$

Notemos que, uma vez que $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, então a condição $\Delta_n > 0$ pode ser substituída pela exigência $a_n > 0$. Se encontrarmos um menor principal negativo, então conclui-se que a solução é instável e não é necessário prosseguir os cálculos. O algoritmo para as condições necessária e suficiente de Hurwitz para a estabilidade assimptótica da equação (3.1.1) está indicado a seguir.

```
Sub respostas()
    Dim c As Integer
    c = 0
    For i = 0 To System_DIM - 1
        Label1(i).Caption = "D" & System_DIM - i
    Next i
    For k = 0 To System_DIM - 1
        Text2(k).Visible = True
    Next k
    'Para mostrar a solução: estável/instável
    For n = 0 To System_DIM
        If (CDbl(Text2(j).Text) < 0) Then
            c = c + 1
        End If
    Next n
    If c > 0 Then
        Label4.Caption = "A solução nula da ED é instável."
    Else
        Label4.Caption = "A solução nula da ED é assimptoticamente estável."
    End If
End Sub
```

Neste algoritmo `Text2(j).Text` é onde estão guardados os valores de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$. Os cálculos podem ser efectuados do seguinte modo: começa-se por escrever o menor principal $\Delta_n$ de maior dimensão. Depois calculamos, sucessivamente, os menores $\Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-2}$, e etc.

O algoritmo completo que permite testar a estabilidade da solução nula de uma dada equação diferencial está ilustrado abaixo.

```
-----------------------------------------------------------------
Private Sub Form_Load()
    Me.Left = (Screen.Width - Me.Width) / 2
```

```
        Me.Top = (Screen.Height - Me.Height) / 2
        For n = 1 To 6
            Combo1.AddItem n 'Coloca opções 1-6
        Next n Combo1.Text = 2 'Dimensão padrão
        Call Hide_Show_Textboxes
    End
    ----------------------------------------------------------------
    Sub Private Sub Combo1_Click()
        Call Hide_Show_Textboxes
    ----------------------------------------------------------------
    Sub Hide_Show_Textboxes()
        System_DIM = Val(Combo1.Text) 'dimensão da equação
        For n = 0 To 24 'Esconde a matriz
            Text1(n).Visible = False
        Next n
        'Esconde os campos dos Coeficientes
        For n = 0 To 5
            Text3(n).Visible = False
        Next n
        'Esconde os valores dos determinantes
        For n = 0 To 4
            Text2(n).Visible = False
        Next n
        For n = 0 To 5 'Esconde os y
            Label11(n).Visible = False
        Next n
        ' Mostra os y necessários
        For n = 0 To System_DIM
            Label11(n).Visible = True
        Next n
        'Esconde os D que acompanham os determinantes
        For i = 0 To 4
            Label1(i).Visible = False
        Next i
        'Esconde os a0..a5 que acompanham os coeficientes da equação
        For i = 0 To 5
            Label5(i).Visible = False
        Next i
        'Esconde onde aparece a solução
        Label4.Visible = False
        For n
        = 0 To System_DIM
            Text3(n).Visible = True
        Next n
        'Mostra os D que acompanham os determinantes
        For i = 0 To System_DIM - 1
            Label1(i).Visible = True
        Next i
        'Esconde os a0..a5 que acompanham os coeficientes da equação
```

```
    For i = 0 To System_DIM
        Label5(i).Visible = True
    Next i
    For i = 0 To 4  '9
        Label13(i).Visible = False
    Next i
    For i = 0 To System_DIM - 1
        Label13(i).Visible = True
    Next i
    Label4.Visible = True
    For i = 0 To System_DIM - 1
            Label13(i).Caption = "(" & System_DIM - i & ")"
    Next i
End Sub
---------------------------------------------------------------
'Constrói a matriz de Hurwitz
Sub Build_Matrices() For n = 1 To
System_DIM
    For m = 1 To System_DIM
        If (n Mod 2 = 0) Then
            If (2 * m - n >= 0 And 2 * m - n <= System_DIM) Then
                Matrix_A(m, n) = Val(Text3(2 * m - n))
            Else
                Matrix_A(m, n) = 0
            End If
        Else
            If (2 * m - n > 0 And 2 * m - n <= System_DIM) Then
                Matrix_A(m, n) = Val(Text3(2 * m - n))
            Else
                Matrix_A(m, n) = 0
            End If
        End If
    Next m
Next n
End Sub
----------------------------------------------------------------
Private Sub cmdShow_Click()
    Dim c, i As Integer
    c = 0
    For i = 0 To System_DIM
        If Text3(i).Text = "" Then
                c = c + 1
        End If
    Next i
    'verifica se todos coeficientes foram introduzidos
    If c > 0 Then
        message$ = "Ocorreu um erro. Verifique se todos os campos foram preenchidos."
        response = MsgBox(message$, vbCritical)
    Else
```

```
        'Continua se não encontrar nenhum campo não preenchido
            For n = 0 To System_DIM - 1
                For k = 0 To 5 * (System_DIM - 1) Step 5
                    Text1(n + k).Visible = True
                Next k
            Next n
        Call Build_Matrices
        Call Build_Triangular_Matrix
        i = 0
        'Copia e mostra os coeficientes da matriz de Hurwitz
        For n = 1 To System_DIM
            For m = 1 To System_DIM
                Text1((n - 1) * 5 + (m - 1)).Text = Matrix_A(n, m)
                i = i + 1
            Next m
        Next n
    End If End Sub
    ------------------------------------------------------------------
    Sub Build_Triangular_Matrix() 'Cria matriz Triangular e calcula
                                  'determ.
        For n = 1 To 10
            For m = 1 To 10
                Triangular_A(m, n) = Matrix_A(m, n)
            Next
        Next
        'Triangulariza a matriz Matrix_A
        For k = 1 To System_DIM - 1
        If Triangular_A(k, k) = 0 Then
            For n = k To System_DIM
                If Triangular_A(n, k) <> 0 Then line_1 = n: Exit For
            Next n
            For m = k To System_DIM
            temporary_1 = Triangular_A(k, m)
            Triangular_A(k, m) = Triangular_A(line_1, m)
            Triangular_A(line_1, m) = temporary_1
            Next m
        End If
        For n = k + 1 To System_DIM
            If Triangular_A(n, k) <> 0 Then 'Se for zero, não mudar
                multiplier_1 = Triangular_A(n, k) / Triangular_A(k, k)
                For m = k To System_DIM + 1
                    Triangular_A(n, m) = Triangular_A(n, m) - Triangular_A(k, m) *
                                         multiplier_1
                Next m
            End If
        Next n
        Next k
    'Calcula determ.
    For k = 0 To System_DIM - 1
```

```
        Determinant_1 = 1
        For n = 1 To System_DIM - k
            Determinant_1 = Determinant_1 * Triangular_A(n, n)
        Next n
            Text2(k).Text = CStr(Determinant_1) 'Mostras os val. dos determinantes
    Next k
        Call respostas
    End Sub
    -------------------------------------------------------------------
    Private Sub cmdClear_Click() 'Apaga todos os campos
        Dim i As Integer
        For i = 0 To System_DIM
            Text3(i).Text = ""
        Next i
        For n = 1 To System_DIM
            For m = 1 To System_DIM
                'Text1((n - 1) * 10 + (m - 1)).Text = ""
                Text1((n - 1) * System_DIM + (m - 1)).Text = ""
                i = i + 1
            Next m
        Next n
        For i = 0 To System_DIM - 1
            Text2(i).Text = ""
        Next i
        For k = 0 To System_DIM - 1
            Label1(k).Caption = ""
        Next k
        Label4.Caption = ""
        Combo1.Text = 2
    End Sub
    -------------------------------------------------------------------
    'Para sair do programa
    Private Sub cmdQuit_Click()
        End
    End Sub
    -------------------------------------------------------------------
    Sub respostas()
        Dim c As Integer
        c = 0
        For i = 0 To System_DIM - 1
            Label1(i).Caption = "D" & System_DIM - i
        Next i
        For k = 0 To System_DIM - 1
            Text2(k).Visible = True
        Next k
        'Para mostrar a solução: estável/instável
        For n = 0 To System_DIM
            If (CDbl(Text2(j).Text) < 0) Then
                c = c + 1
```

```
        End If
    Next n
    If c > 0 Then
        Label4.Caption = "A solução nula da ED é instável."
    Else
        Label4.Caption = "A solução nula da ED é assimptoticamente estável."
    End If
End Sub
```

Basicamente, a forma gráfica do algoritmo anterior, ilustrada na Fig. 3.1, funciona do seguinte modo. Inicialmente escolhe-se o grau e seguidamente preenchem-se os coeficientes da equação. Ao clicar no botão **Matriz de Hurwitz** aparece a matriz de Hurwitz e os determinantes na ordem decrescente assim como a classificação da solução da equação.

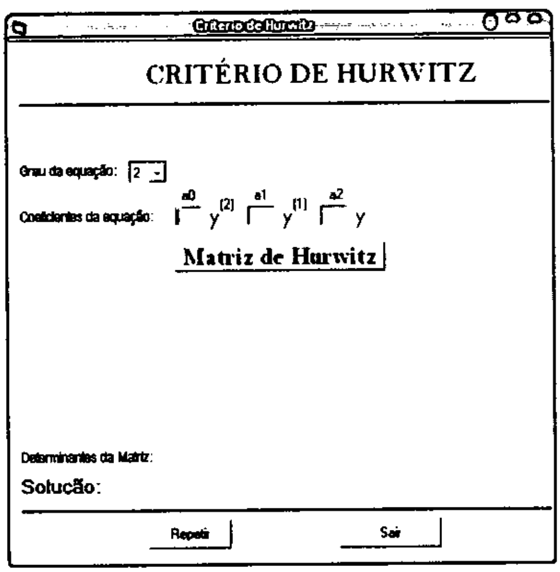


**Fig. 3.1**

**Exemplo 3.1.1.** Ao investigarmos a estabilidade da solução nula da equação

$$y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0,$$

determinamos a equação característica

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Neste caso, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$ e assim,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -40 < 0.$$

Como $\Delta_4 < 0$, então a solução nula é instável. A Fig. 3.2 mostra a forma computacional deste exemplo. ■

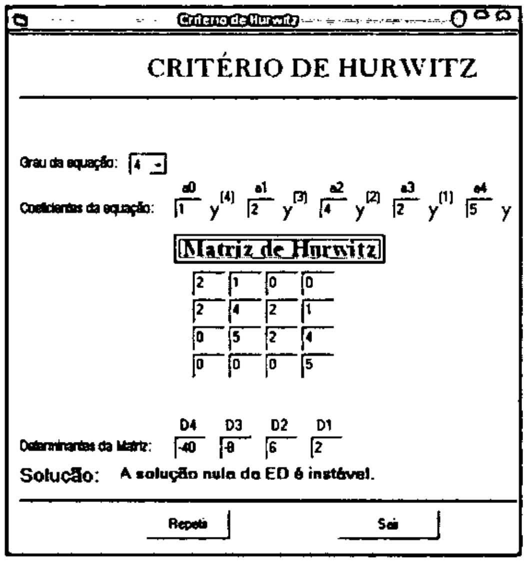


Fig. 3.2

**Exemplo 3.1.2.** Ao examinar a estabilidade da solução nula da equação

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0,$$

vê-se claramente que a equação característica tem a forma

$$\lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Aqui, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$ e $a_5 = 3$. Assim, os menores principais da matriz de Hurwitz serão:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 > 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_1 = 1 > 0.$$

Daqui, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$ e, por conseguinte, a solução nula $y \equiv 0$ é assimptoticamente estável. A Fig. 3.3 mostra a forma computacional deste exemplo. ■

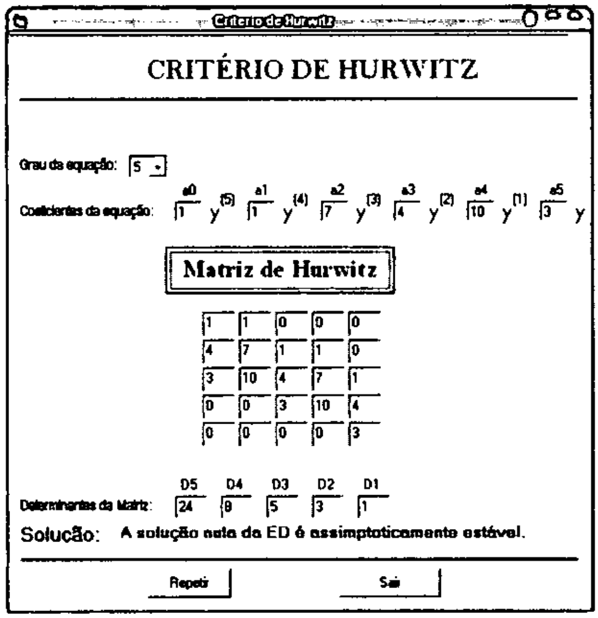


Fig. 3.3

## 3.2 Critério de Lienard–Chipard

Consideremos a equação diferencial linear com coeficientes reais constantes [7], [8]

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \qquad (a_0 > 0), \tag{3.2.1}$$

e a equação característica [7], [8] da equação (3.2.1)

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{3.2.2}$$

Se os coeficientes da equação (3.2.1) são números constantes, então as condições (3.1.4) verificam-se facilmente. Se os coeficientes da matriz (3.1.3) contêm parâmetros literais, então o cálculo dos determinantes para $k$ grande é muito trabalhoso.

Pode-se mostrar que se as condições (3.1.4) forem cumpridas, então todos os coeficientes do polinómio (3.2.2) são positivos:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \ldots, a_n > 0. \tag{3.2.3}$$

As condições (3.2.3) são necessárias, mas não são suficientes para que todas as raízes da equação (3.2.2) se situem no semi-plano esquerdo $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Embora se cumpram as condições (3.2.3), as desigualdades (3.1.4) não são independentes. Assim, por exemplo, para $n = 5$ as condições de Hurwitz reduzem-se às desigualdades $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Os trabalhos de Lienard e Chipard dão a possibilidade de determinar outras condições de estabilidade, nos quais o número de desigualdades de determinantes são menor que os das condições (3.1.4).

**Critério 3.2.1.** *Para que o polinómio*

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

*tenha todas as raízes com as partes reais negativas, é necessário e suficiente que:*

*1) todos os coeficientes do polinómio $f(\lambda)$ sejam positivos:*

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \ldots, \quad a_n > 0;$$

*2) tenham lugar as desigualdades*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \ldots.$$

Aqui, $\Delta_k$ é o determinante de Hurwitz de ordem $k$. Do Critério 3.2.1 concluímos que, se todas condições se cumprem, a solução trivial da equação (3.2.1) é assimptoticamente estável.

**Exemplo 3.2.1.** Na equação $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$, com equação característica $\lambda^4 + 7\lambda^3 + 12\lambda^2 + 23\lambda + 10 = 0$, onde $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = 12$, $a_3 = 23$ e $a_4 = 10$, estão cumpridas as primeiras condições do critério de Lienard–Chipard. Como

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 23 & 12 & 7 \\ 0 & 10 & 23 \end{vmatrix} = 140 > 0, \quad \Delta_1 = 1 > 0,$$

isto é, cumprem-se as condições 2), então a solução trivial é assimptoticamente estável. ■

## 3.3 Critério de Mikhailov

Consideremos uma equação diferencial de ordem $n$ com coeficientes constantes reais [8]

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{3.3.1}$$

O problema sobre a estabilidade de solução da equação diferencial (3.3.1) reduz-se ao problema da disposição de raízes da equação característica [7], [8]

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{3.3.2}$$

no plano complexo. Este problema resolve-se usando o critério de Mikhailov, que permite determinar a disposição das raízes da equação (3.3.2) no plano complexo e, por conseguinte, investigar a estabilidade da solução nula da equação (3.3.2).

Seja dado o polinómio característico

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{3.3.3}$$

Considerando $\lambda = i\omega$, obtemos

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \tag{3.3.4}$$

onde

$$\left.\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \cdots \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.3.5}$$

A grandeza $f(i\omega)$, conforme (3.3.4) e (3.3.5), para o parâmetro dado $\omega$, pode ser representado no plano complexo $uOv$ na forma vectorial. Quando o parâmetro $\omega$ varia no intervalo $(-\infty, +\infty)$ o outro extremo deste vector descreve uma certa curva chamada curva de Mikhailov (Fig. 3.4).

Ao variar $\omega$ de $-\infty$ até $+\infty$ o vector $f(i\omega)$ gira num certo ângulo $\varphi$. Se o polinómio $f(\lambda)$ tem $m$ raízes com as partes reais positivas e as restantes $n-m$ raízes com as partes reais negativas, então

$$\varphi = (n-m)\pi + m(-\pi) = (n-2m)\pi. \tag{3.3.6}$$

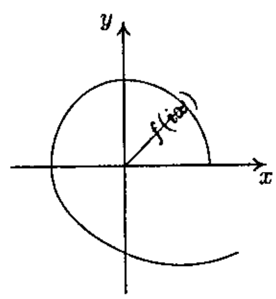


**Fig. 3.4**

**Observação 3.3.1.** *Uma vez que a função $u(\omega)$ é par, então a curva de Mikhailov é simétrica em relação ao eixo $uOv$, portanto é suficiente construir uma parte da curva de Mikhailov que corresponde à variação do parâmetro $\omega$ de 0 a $+\infty$. Assim, a fórmula tomará a forma*

$$\varphi = (n-m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n-2m)\frac{\pi}{2}. \tag{3.3.7}$$

Para a estabilidade da solução da equação (3.3.1) é necessário e suficiente que todas as raízes da equação característica $f(\lambda) = 0$ tenham as partes reais negativas, isto é, na fórmula (3.3.6) tem-se $m = 0$. Daqui, segue o seguinte critério:

**Critério 3.3.1** (de Mikhailov). *Para a estabilidade da solução nula da equação (3.3.1) é necessário e suficiente que:*

*(1) o ângulo de rotação do vector $f(i\omega)$, quando $\omega$ varia de 0 a $+\infty$, seja igual a $\varphi = n\frac{\pi}{2}$, isto é, que o vector efectue $\frac{n}{4}$ voltas no sentido anti-horário;*

*(2) o hodógrafo de $f(i\omega)$, quando $\omega$ varia de 0 a $+\infty$, não passe pela origem $(0,0)$.*

Por outras palavras, para a estabilidade da solução da equação (3.3.1) é necessário e suficiente que a curva de Mikhailov percorra consecutivamente $n$ quadrantes da direita para a esquerda, rodando sempre à volta da origem das coordenadas.

Do exposto anteriormente resulta que, para a estabilidade da equação (3.3.1) é necessário (e quando a curva corre da direita para a esquerda também é suficiente) que todas as raízes das equações $u(\omega) = 0$ e $v(\omega) = 0$ sejam reais e intercaladas umas com as outras, isto é, que entre cada duas raízes de uma equação deve encontrar-se uma raíz da outra.

**Exemplo 3.3.1.** Examinando a estabilidade da solução nula da equação

$$y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + y = 0,$$

determinamos a equação característica

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Daqui, resulta

$$f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1,$$
$$u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1,$$
$$v(\omega) = -\omega^3 + \omega = \omega(1-\omega)(1+\omega).$$

Construímos uma tabela dos valores das funções $u = u(\omega)$ e $v = v(\omega)$, quando $0 \leq \omega < +\infty$.

| $\omega$ | 0 | $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | 1 | 0 | $-2$ | 0 |
| $v$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

Neste caso temos $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \dfrac{v}{u} = 0$. A curva de Mikhailov está representada na Fig. 3.5.

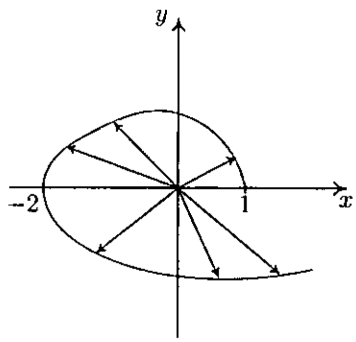


**Fig. 3.5**

O ângulo de rotação do raio-vector é igual a $\varphi = 4 \cdot \dfrac{\pi}{2} = (n - 2m)\dfrac{\pi}{2}$. Daqui, uma vez que $n - 2m = 4$, $n = 4$, conclui-se que $m = 0$, pelo que todas as raízes do polinómio característico se situam no semi-plano esquerdo do plano complexo. Por conseguinte, a solução nula é assimptoticamente estável. ■

# Capítulo 4

# $W$–MÉTODO. D E C ESTABILIDADE

## 4.1 Definições básicas

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dois espaços de Banach, $\mathcal{A} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}$ é um operador linear limitado, $\mathcal{A}^*$ é um operador conjugado em relação ao operador $\mathcal{A}$.

Diremos que o operador $\mathcal{A}$ (a equação $\mathcal{A}x = y$) é *normalmente solúvel*, se o seu contradomínio $R(\mathcal{A})$ é fechado, isto é, $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ [6]. Se o operador $\mathcal{A}$ (a equação $\mathcal{A}x = y$) é normalmente solúvel e dim $Ker\,\mathcal{A} < \infty$, dim $Ker\,\mathcal{A}^* < \infty$, então diremos que ele (ela) é *noetheriano(a)*. Se o operador $\mathcal{A}$ (a equação $\mathcal{A}x = y$) é noetheriano(a) e o seu índice, isto é,

$$ind\,\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dim\, Ker\,\mathcal{A} - \dim\, Ker\,\mathcal{A}^*$$

é igual à zero, então ele (ela) chama-se operador (equação) de *Fredholm* [6], [13].

O operador linear $\mathcal{C}$, que actua do produto directo $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ de espaços lineares $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ no espaço linear $\mathbf{Y}$, define-se pelo par de operadores $\mathcal{C}_1 : \mathbf{X}_1 \mapsto \mathbf{Y}$ e $\mathcal{C}_2 : \mathbf{X}_2 \mapsto \mathbf{Y}$ tal, que $\mathcal{C}\{x_1, x_2\} = \mathcal{C}_1 x_1 + \mathcal{C}_2 x_2$, $x_1 \in \mathbf{X}_1$, $x_2 \in \mathbf{X}_2$, onde $\mathcal{C}_1 x_1 = \mathcal{C}\{x_1, 0\}$, $\mathcal{C}_2 x_2 = \mathcal{C}\{0, x_2\}$. Tal operador denotaremos por $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$.

O operador linear $\mathcal{F}$, que actua do espaço linear $\mathbf{X}$ no produto directo $\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2$ dos espaços lineares $\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$, define-se pelo par de operadores $\mathcal{F}_1 : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}_1$, $\mathcal{F}_2 : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}_2$ tal, que $\mathcal{F}x = \{\mathcal{F}_1 x, \mathcal{F}_2 x\}$, $x \in \mathrm{X}$. Este operador denotaremos por $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$. Segundo [13], a equação $\mathcal{L}x = f$ chama-se *equação linear diferencial funcional abstracta*, onde $\mathcal{L} : \mathbf{D} \mapsto \mathbf{B}$ é operador linear limitado, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ são espaços de Banach, sendo o espaço $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ isomorfo ao espaço de Banach $\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$.

Seja $\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda, Y\} : \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{D}$ um isomorfismo algébrico e $\mathcal{J}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} [\delta, r] : \mathbf{D} \mapsto \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$. As normas nos espaços $\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{D}$ definiremos do seguinte modo:

$$\|\{z, \beta\}\|_{\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n} \stackrel{\text{def}}{=} \|z\|_{\mathbf{B}} + |\beta|, \quad \|x\|_{\mathbf{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \|\delta x\|_{\mathbf{B}} + |rx|.$$

Neste caso os espaços $\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{D}$ são isométricos.

Tendo em consideração que os operadores limitados $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}^{-1}$ são mutuamente invertíveis, então

$$x = \Lambda\delta x + Yrx, \quad x \in \mathbf{D}, \tag{4.1.1}$$

$$\delta(\Lambda z + Y\beta) = z, \quad r(\Lambda z + Y\beta) = \beta, \ \{z, \beta\} \in \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n.$$

Destas igualdades conclui-se que

$$\Lambda\delta + Yr = I, \ \delta\Lambda = I, \ \delta Y = \mathcal{O}, \ r\Lambda = \mathcal{O}, \ rY = I.$$

Vamos identificar o operador $\mathbf{Y} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{D}$ com o vector $(y_1, \ldots, y_n)$, $y_i \in \mathbf{D}$, $i = 1, \ldots, n$ tal, que

$$Y\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_i, \quad \beta = col\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}.$$

Aplicando o operador $\mathcal{L}$ à ambas as partes da igualdade (4.1.1) obtemos a decomposição

$$\mathcal{L}x = Q\delta x + Arx. \tag{4.1.2}$$

Aqui $Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}\Lambda : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é a "parte principal", $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}Y : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{B}$ é a "parte finita" do operador $\mathcal{L}$. O operador $Q : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é de Fredholm [6] só e sómente só, quando ele admite a representação $Q = P^{-1} + V$ $\left(Q = P_1^{-1} + V_1\right)$, onde $P^{-1} : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é operador inverso em relação ao operador limitado $P : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$, $V : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é um operador finito ($P_1^{-1} : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é operador inverso em relação ao operador limitado $P_1 : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$, $V_1 : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é operador completamente contínuo). O operador $Q = I + V$ é também um operador de Fredholm se uma certa potência do operador $V$ é completamente contínuo. Segundo [13], o operador $Q = I + V$ chamaremos operador *canónico de Fredholm*, se o operador $V : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ fôr completamente contínuo.

**Teorema 4.1.1.** *O operador $\mathcal{L} : \mathbf{D} \mapsto \mathbf{B}$ é noetheriano só e sómente só, quando a sua parte principal $Q : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é noetheriana. Neste caso tem lugar a igualdade $ind\,\mathcal{L} = ind\,Q + n$.*

**Teorema 4.1.2.** *Seja $\mathcal{L} : \mathbf{D} \mapsto \mathbf{B}$ um operador de Noether, $ind\,\mathcal{L} = n$. A dimensão do núcleo do operador $\mathcal{L}$ não é menor do que $n$, sendo igual a $n$ só e sómente só, quando a equação $\mathcal{L}x = f$ é solúvel no espaço $\mathbf{D}$, qualquer que seja $f \in \mathbf{B}$.*

O espaço D define-se pela igualdade $\mathbf{D} = \mathcal{W}\mathbf{B} \oplus \mathcal{U}\mathbb{R}^N$. Se o operador $\mathcal{L}$ actua do espaço D no espaço B e o operador $\mathcal{L}\mathcal{W} : \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}$ é invertível ou, pelo menos, é um operador de Fredholm, então a equação $\mathcal{L}x = f$ deixa de ser singular.

Seja $\ell = [\ell_1, \ldots, \ell_m] : \mathbf{D} \mapsto \mathbb{R}^m$ um vector-funcional linear limitado, $\alpha = col\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Ao sistema de equações

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \alpha \tag{4.1.3}$$

chamaremos *problema linear de fronteira.* Este problema podemos escrever numa forma mais compacta:

$$[\mathcal{L}, \ell]x = \{f, \alpha\}.$$

O caso específico do problema (4.1.3), quando $\ell \equiv r$, chamaremos *problema principal de fronteira.*

Se $R(\mathcal{L}) = \mathbf{B}$, $\dim Ker\,\mathcal{L} = n$, então a questão sobre a resolubilidade do problema (4.1.3) resume-se à resolubilidade do sistema linear de equações algébricas com matriz $\ell\mathcal{X} = (\ell_i x_j)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, onde $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ é o *vector fundamental* da equação $\mathcal{L}x = 0$. Realmente, a solução geral da equação $\mathcal{L}x = f$ é

$$x = v + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{4.1.4}$$

onde $v$ é a solução particular desta equação, $c_1, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias. Aplicando o vector funcional $\ell$ à ambas as partes de (4.1.4) obtemos

$$\alpha_i = \ell_i x = \ell_i \left( v + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right) = \ell_i v + \sum_{j=1}^{n} c_j \ell_i x_j, \quad i = 1, \ldots, m.$$

O problema (4.1.3) é únicamente solúvel, para quaisquer $f \in \mathbf{B}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^m$, só e sómente só, quando o sistema

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \ell_i x_j = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

é únicamente solúvel, qualquer que seja $\beta_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i - \ell_i v \in \mathbb{R}^1, i = 1, \ldots, m$. As condições necessária e suficiente para tal solubilidade são: $m = n$ e $\det \ell\mathcal{X} \neq 0$. A expressão $\det \ell\mathcal{X}$ chama-se *determinante* do problema (4.1.3).

Suponhamos que o problema (4.1.3) é únicamente solúvel, qualquer que seja $f \in \mathbf{B}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Denotemos $\{\mathcal{G}, \mathcal{X}\} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathcal{L}, \ell]^{-1}$. Então, a solução $x \in \mathbf{D}$ do problema (4.1.3) tem a representação

$$x = \mathcal{G}f + \mathcal{X}\alpha,$$

onde $\mathcal{G}$ é *operador de Green* para o problema de fronteira (4.1.3), $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ é o vector fundamental da equação $\mathcal{L}x = 0$, que satisfaz a condição $l\mathcal{X} = E$, $E$ é matriz unitária de dimensão $n \times n$.

Aplicando o vector funcional $\ell$ à ambas as partes da igualdade (4.1.1) obtemos a decomposição $\ell x = \Phi\delta x + \Psi r x$, onde $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \ell\Lambda : \mathbf{B} \mapsto \mathbb{R}^n$ é um vector funcional limitado, $\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \ell Y : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é um operador finito.

## 4.2 Construção de domínio de estabilidade

A teoria de estabilidade de equações diferenciais considera o problema de estabilidade com respeito ao segundo membro $f$ da equação [15]

$$\mathcal{L}x = f.$$

Denotemos por $\mathbf{Y}$ a multivariedade linear de funções $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas em qualquer intervalo finito $[0, b]$, por $\mathbf{Z}$ uma multivariedade linear de funções somáveis $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ em qualquer intervalo finito $[0, b]$. Suponhamos que $\mathcal{L}_0 : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ e suponhamos que o problema de Cauchy $\mathcal{L}_0 x = z$, $x(0) = \alpha$ tem uma solução única $x \in \mathbf{Y}$ para cada $\{z, \alpha\} \in \mathbf{Z} \times \mathbb{R}^n$ e a solução tem a representação [15]

$$x(t) = \int_0^t W(t,s)z(s)\,ds + U(t)\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{W}z)(t) + (\mathcal{U}x(0))(t) \tag{4.2.1}$$

na forma explícita. Chamaremos à equação $\mathcal{L}_0 x = z$ de **equação modelo**. Seja $\mathbf{B} \subset \mathbf{Z}$ uma multivariedade linear de elementos $z \in \mathbf{Z}$. Então, (4.2.1) define para cada $\{z, \alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$ o elemento $x \in \mathbf{Y}$ da equação $\mathcal{W}\mathbf{B} + \mathcal{U}\mathbb{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$. A multivariedade $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ consiste de todas as soluções da equação modelo $\mathcal{L}_0 x = z$ para todo $z \in \mathbf{B}$.

Junto com $\mathcal{L}_0 x = z$ considere-se a equação $\mathcal{L}x = f$ com o operador linear de Volterra[1][14] $\mathcal{L} : \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ supondo que o problema de Cauchy $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \alpha$ tem a solução única $x \in \mathbf{Y}$ e para esta solução é válida a fórmula de Cauchy

$$x(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds + X(t)x(0) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{C}f)(t) + (\mathcal{X}x(0))(t).$$

[1]Vito Volterra (1860–1940) — matemático italiano

A forma explicita dos operadores $\mathcal{C} : \mathbf{Z} \to \mathbf{Y}$ e $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbf{Y}$ pode ser desconhecida. Todas as soluções de $\mathcal{L}x = f$ para todo $f \in \mathbf{B}$ consistem na multivariedade linear

$$\mathrm{D}(\mathcal{L}, \mathrm{B}) = \mathcal{C}\mathrm{B} + \mathcal{X}\mathbb{R}^n.$$

Diremos que a equação $\mathcal{L}x = f$ possui $\mathrm{D}_0$-propriedade (a equação é $\mathrm{D}_0$-estável) se as multivariedades $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathrm{B})$ e $\mathrm{D}(\mathcal{L}, \mathrm{B})$ coincidem.

A igualdade $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathrm{B}) = \mathrm{D}(\mathcal{L}, \mathrm{B})$ garante a existência de mesmas propriedades das soluções de $\mathcal{L}x = f$. Vamos clarificar o que foi dito com exemplos.

**Exemplo 4.2.1.** [15] Seja $\mathcal{L}_0 x \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} + x$. Então o elemento $x \in \mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathrm{B})$ tem a forma

$$x(t) = e^{-t} \int\limits_0^t e^s z(s) ds + e^{-t}\alpha.$$

Seja $\mathbf{B}^0$ uma multivariedade dos elementos $z \in \mathbf{Z}$ tal que $\sup\limits_{t \leq 0} ||z(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty$, e $\mathbf{B}^\gamma$ a multivariedade de funções da forma $z(t) = e^{-\gamma t} y(t)$, onde $y \in \mathbf{B}^0$, $0 < \gamma$. Então a $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathrm{B})$-propriedade de $\mathcal{L}x = f$ garante a limitação de qualquer solução $\left(\sup\limits_{t \leq 0} ||z(t)||_{\mathbb{R}^n} < \infty\right)$, se $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0$ e a existência da estimação exponencial $||x(t)||_{\mathbb{R}^n} \leq M_x e^{-\gamma t}$, se $\mathbf{B} = \mathbf{B}^\gamma$. Desta forma $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}^0)$- estabilidade garante a estabilidade de Lyapunov de soluções de $\mathcal{L}x = f$ e $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}^\gamma)$- estabilidade garante a estabilidade exponencial. ■

**Exemplo 4.2.2.** [15] Seja

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array} \right\} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} z_1(t) \\ z_2(t) \end{array} \right\}.$$

Então os componentes $x_1$ e $x_2$ do elemento $x = \mathrm{col}\{x_1, x_2\}$ de $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathrm{B})$ são definidos por

$$x_1(t) = e^{-t} \int_0^t e^s z_1(s)\, ds + e^{-t}\alpha_1, \quad x_2(t) = e^t \int_0^t e^{-s} z_2(s)\, ds + e^t \alpha_2.$$

Neste caso a $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}^\gamma)$- estabilidade garante a estabilidade exponencial de soluções de $\mathcal{L}x = f$ em relação ao primeiro componente. ■

Seja $\mathbf{V}$ um espaço de Banach de funções $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^1$ com a norma $|| \cdot ||_{\mathbf{V}}$. Diremos que a equação $\mathcal{L}x = f$ é $\mathbf{V}$- estável, se a solução $x$ do problema de Cauchy $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \alpha$

pertence a $\mathbf{V}$ para cada $\{f,\alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$ e esta solução depende continuamente de $f$ e $\alpha$: para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||x - x_1||_{\mathbf{V}} < \varepsilon$, se $||f - f_1||_{\mathbf{B}} < \delta$, $||\alpha - \alpha_1||_{\mathbb{R}^n} < \delta$, onde $x_1$ é a solução do problema de Cauchy $\mathcal{L}x = f_1$, $x(0) = \alpha_1$.

A $\mathbf{V}$ - estabilidade significa que $\mathrm{D}(\mathcal{L},\mathrm{B}) \subset \mathbf{V}$ e os operadores $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{V}$ e $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbf{V}$ são limitados.

Além da continuidade de $\mathrm{D}(\mathcal{L},\mathrm{B}) \subset \mathbf{V}$, existe uma constante $k > 0$ tal que $||x||_{\mathbf{V}} \leq k||x||_{\mathrm{D}(\mathcal{L},\mathrm{B})}$. Realmente, seja

$$k = \max\{||\mathcal{C}||_{\mathbf{B}\to\mathbf{V}}, ||\mathcal{X}||_{\mathbb{R}^n\to\mathbf{V}}\}.$$

Se $x \in \mathrm{D}(\mathcal{L},\mathrm{B})$, $x = \mathcal{L}f + \mathcal{X}\alpha$,

$$||x||_{\mathbf{V}} \leq k(||f||_{\mathbf{B}} + ||\alpha||_{\mathbb{R}^n}) = k(||\mathcal{L}x||_{\mathbf{B}} + ||\alpha||_{\mathbb{R}^n}) = k||x||_{\mathrm{D}(\mathcal{L},\mathrm{B})}.$$

**Lema 4.2.1.** *Seja $\mathcal{L} : \mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B}) \to \mathbf{B}$ e limitado, a equação $\mathcal{L}x = f$ é $\mathrm{D}_0$ - estável e $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B}) \subset \mathbf{V}$ contínuo. Então a equação é $\mathbf{V}$ - estável.*

**Demonstração.** É suficiente provar a limitação de $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{V}$ e $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbf{V}$. Uma vez que a equação é $\mathrm{D}_0$- estável os operadores $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})$ e $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})$ são limitados. $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B}) \subset \mathbf{V}$ é contínuo devido as condições. Consequentemente,

$$||\mathcal{C}f||_{\mathbf{V}} \leq k||\mathcal{C}f||_{\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})} \leq k||\mathcal{C}||_{\mathbf{B}\to\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})}||f||_{\mathbf{B}}.$$

Aqui,

$$||\mathcal{C}||_{\mathbf{B}\to\mathbf{V}} \leq k||\mathcal{C}||_{\mathbf{B}\to\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})}.$$

A limitação de $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \to \mathbf{V}$ é obtida de modo análogo. ∎

**Lema 4.2.2.** *Suponhamos que $\mathcal{L} : \mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B}) \to \mathbf{B}$ é limitado. Suponhamos adicionalmente que a equação $\mathcal{L}x = f$ é $\mathbf{V}$ - estável. Se o operador $\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}$ é definido em todo o $\mathbf{V}$ e $(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathbf{V} \subset \mathbf{B}$, a equação $\mathcal{L}x = f$ é $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})$ - estável.*

**Demonstração.** Uma vez que $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B}) \subset \mathrm{D}(\mathcal{L},\mathrm{B})$, é suficiente provar que a solução $x \in \mathbf{V}$ do problema de Cauchy pertence a $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})$. Reescrevendo o problema na forma

$$\mathcal{L}_0 x = (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})x + f, \quad x(0) = \alpha,$$

vemos que qualquer solução do problema satisfaz à equação

$$x = \mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})x + \mathcal{W}f + \mathcal{U}\alpha.$$

Uma vez que $\mathcal{W} : \mathbf{B} \to \mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})$, qualquer solução $x \in \mathbf{V}$ da última equação, e, consequentemete, do problema de Cauchy, pertence a $\mathrm{D}(\mathcal{L}_0,\mathrm{B})$. ∎

## 4.3 Escolha e construção da equação modelo

Suponhamos que temos a equação [6], [13]

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{4.3.1}$$

onde $f$ e a matriz $A$, de ordem $n \times n$, são localmente somáveis em $[0, +\infty)$. Como é conhecido [13], [15] a solução geral $x$ da equação (4.3.1) define-se segundo a fórmula de Cauchy

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)ds,$$

onde $C(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} X(t)X^{-1}(s)$ é a matriz de Cauchy da equação (4.3.1), $X$ é a matriz fundamental das soluções da equação homogénea $\mathcal{L}x = 0$, sendo $X(0) = E$, onde $E$ é matriz unitária de ordem $n \times n$. A igualdade $x = \mathcal{C}f + X\alpha$, onde $\mathcal{C}$ é o operador de Cauchy, define para cada par $f \in \mathbf{L}_\infty, \alpha \in \mathbb{R}^n$, o elemento $x$ da multivariedade linear $\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{L}_\infty)$ de todas as soluções da equação (4.3.1). Esta multivariedade $\mathbf{D}$ torna-se um espaço de Banach se a norma fôr definida segundo a igualdade

$$\|x\|_{\mathbf{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathcal{L}x\|_{\mathbf{L}_\infty} + |\alpha|.$$

Daqui em diante vamos considerar que as colunas da matriz $A$ e a função $f$ pertencem ao espaço $\mathbf{L}_\infty$. Denote-se por $U$ a matriz fundamental da equação modelo

$$(\mathcal{L}_0x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + A_0(t)x(t) = z(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{4.3.2}$$

onde $z$ e as colunas da matriz $A_0$ pertencem ao espaço $\mathbf{L}_\infty$. O operador de Cauchy $\mathcal{W}$ desta equação define-se pela igualdade

$$(\mathcal{W}z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t W(t,s)z(s)\,ds,$$

onde $W(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} U(t)U^{-1}(s)$ é a matriz de Cauchy da equação (4.3.2). A igualdade $x = \mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha$ define, para cada par $z \in \mathbf{L}_\infty, \alpha \in \mathbb{R}^n$, o elemento $x$ da multivariedade linear $\mathbf{D}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}_\infty)$ de todas as soluções da equação (4.3.2). Esta multivariedade $\mathbf{D}_0$ torna-se em espaço de Banach se a norma fôr definida segundo a igualdade

$$\|x\|_{\mathbf{D}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathcal{L}_0x\|_{\mathbf{L}_\infty} + |\alpha|.$$

Suponhamos, que o operador $\mathcal{W}$ actua de $\mathbf{L}_\infty$ em $\mathbf{C}$. Como se sabe [16] a condição

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t |W(t,s)|\,ds < \infty \tag{4.3.3}$$

é necessária e suficiente para que o operador $\mathcal{W}$ actue de $\mathbf{L}_\infty$ em $\mathbf{C}$.

Se a condição (4.3.3) cumpre-se, para qualquer $z \in \mathbf{L}_\infty$, cada solução $x = \mathcal{W}z + Ux(0)$ da equação $\mathcal{L}_0 x = z$ pertence ao espaço $\mathbf{C}$. Neste caso diremos, que a equação (4.3.2) é $\mathbf{C}$ *estável* [12]. Como está demonstrado [5], [18], [20], nestas condições para a matriz de Cauchy $W(t,s)$ da equação (4.3.2), para certos $M > 0$ e $\beta > 0$, cumpre-se a desigualdade

$$|W(t,s)| \leq Me^{-\beta(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty. \tag{4.3.4}$$

Nos trabalhos [9], [10], [11] demonstram-se afirmações que nós reformularemos aqui de forma adequada aos nossos objectivos.

**Teorema 4.3.1.** *Suponhamos que a equação* (4.3.2) *é* $\mathbf{C}$ *estável. O espaço* $\mathbf{D}$ *de todas as soluções da equação* $\mathcal{L}x = f$, *para todo* $f \in \mathbf{L}_\infty$, *coincide com o espaço* $\mathbf{D}_0$ *de todas as soluções do problema modelo* $\mathcal{L}_0 x = z$, *para todo* $z \in \mathbf{L}_\infty$, *sendo as normas* $\|\cdot\|_{\mathbf{D}}$ *e* $\|\cdot\|_{\mathbf{D}_0}$ *equivalentes só e sómente só, quando existe o operador invertível* $\mathcal{Q}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1} : \mathbf{L}_\infty \mapsto \mathbf{L}_\infty$.

No caso quando os espaços de Banach $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}_0$ coincidem diremos [11], [12] que a equação (4.3.1) é $\mathbf{D}_0$- estável.

**Observação 4.3.1.** *Nas condições do Teorema 4.3.1 a* $\mathbf{D}_0$*- estabilidade da equação* (4.3.1) *é equivalente à* $\mathbf{C}$*- estabilidade desta equação e equivalente à coincidência dos espaços de Banach* $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_0$ *e* $\mathbf{W}^1_\infty$ *[6], [12].*

De notar que se a desigualdade (4.3.3) cumpre-se, então a $\mathbf{D}_0$- estabilidade da equação (4.3.1) garante a estabilidade exponencial e a dependência contínua das soluções desta equação em relação à $f$. Realmente, dos resultados do trabalho [18] deriva o seguinte teorema.

**Teorema 4.3.2.** *Suponhamos que a equação* (4.3.2) *é* $\mathbf{C}$ *estável. A* $\mathbf{D}_0$*- estabilidade da equação* (4.3.1) *é equivalente ao facto de que a matriz de Cauchy* $C(t,s)$ *desta equação admite, para certos* $N > 0$ *e* $\alpha > 0$, *a estimação*

$$|C(t,s)| \leq Ne^{-\alpha(t-s)}, \quad 0 \leq s \leq t < +\infty.$$

Destas afirmações segue que o sucesso da investigação da estabilidade das soluções da equação $\mathcal{L}x = f$ depende da escolha da equação modelo.

Na construção da equação modelo propós-se [6] a seguinte ideia. Suponhamos que a função-matriz $U$, com componentes absolutamente contínuas, é tal que tem lugar $U(0) = E$ e $\det U(t) \neq 0$ para qualquer $t > 0$, e para a função-matriz $W(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} U(t)U^{-1}(s)$ cumpre-se pelo menos uma das condições (4.3.3) ou (4.3.4). Então, a expressão $A_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} -\dot{U}(t)U^{-1}(t)$ define a equação modelo da equação (4.3.2), cujo operador de Cauchy $\mathcal{W}$ é conhecido.

Para qualquer função-matriz $U$, de ordem $n \times n$, o problema para obtenção da matriz $A_0$ é insolúvel. Por isso mesmo vamos investigar certos casos especiais da matriz $U$, análogos à matriz fundamental de equações com matriz constante.

Para a equação (4.3.2), com matriz constante $A_0$ de ordem $n \times n$, a matriz fundamental $U$ constrõe-se segundo $n$ autovalores (tendo em conta a sua multiplicidade) da matriz $A_0$. Aos autovalores da matriz $A_0$ correspondem funções do tipo

$$e^{\alpha t},\ t^{\nu}e^{\alpha t},\ e^{\lambda t}\cos\mu t,\ e^{\lambda t}\sin\mu t,\ t^{\nu}e^{\lambda t}\cos\mu t,\ t^{\nu}e^{\lambda t}\sin\mu t.$$

Estas funções são linearmente independentes e não são iguais à zero simultâneamente em qualquer dos pontos do semi-eixo $[0, +\infty)$.

Vejamos o caso, quando $n = 2$. Escolhemos duas funções quaisquer $u_1, u_2$ linearmente independentes e absolutamente contínuas, diferentes de zero simultâneamente em nenhum dos pontos do semi-eixo $[0, +\infty)$. Sem limitação da sua essência consideramos $u_1(0) = 1, u_2(0) = 0$. Vamos escolher a matriz $U$ sob a forma:

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) + \alpha u_2(t) & \delta u_2(t) \\ \gamma u_2(t) & u_1(t) + \beta u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que $\Delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det U(t) \neq 0$ para todo $t > 0$ . Então,

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) + \alpha u_2(t) & \delta u_2(t) \\ \gamma u_2(t) & u_1(t) + \beta u_2(t) \end{vmatrix} = u_1^2 + (\alpha + \beta)u_1u_2 + (\alpha\beta - \delta\gamma)u_2^2.$$

Por outro lado, como $A_0 = -\dot{U}(t)U^{-1}(t)$, então

$$A_0 = -\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) + \alpha\dot{u}_2(t) & \delta\dot{u}_2(t) \\ \gamma\dot{u}_2(t) & \dot{u}_1(t) + \beta\dot{u}_2(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta(t)} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) + \beta u_2(t) & -\delta u_2(t) \\ -\gamma u_2(t) & u_1(t) + \alpha u_2(t) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} \dot{u}_1u_1 + \beta\dot{u}_1u_2 + \alpha\dot{u}_2u_1 + c\dot{u}_2u_2 & \delta(\dot{u}_2u_1 - \dot{u}_1u_2) \\ \gamma(\dot{u}_2u_1 - \dot{u}_1u_2) & \dot{u}_1u_1 + \alpha\dot{u}_1u_2 + \beta\dot{u}_2u_1 + c\dot{u}_2u_2 \end{pmatrix},$$

onde $c \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\beta - \delta\gamma$. Por outro lado,

$$W(t,s) = U(t)U^{-1}(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{pmatrix} k_1(t,s) & \delta[u_1(s)u_2(t) - u_1(t)u_2(s)] \\ \gamma[u_1(s)u_2(t) - u_1(t)u_2(s)] & k_2(t,s) \end{pmatrix}$$

onde

$$k_1(t,s) = u_1(t)u_1(s) + \beta u_1(t)u_2(s) + \alpha u_1(s)u_2(t) + cu_2(t)u_2(s)$$

e

$$k_2(t,s) = u_1(t)u_1(s) + \alpha u_1(t)u_2(s) + \beta u_1(s)u_2(t) + cu_2(t)u_2(s).$$

Cálculos imediatos permitem estabelecer que a matriz $A_0$ satisfaz a condição de Lappo-Danilevskiĭ, isto é, a matriz $A_0$ comuta com o seu integral.

O problema de encontrar a matriz $A_0$, em Maple 10, pode ser resolvido construindo um programa que permita, a partir de duas funções $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$, encontrar os valores simplificados da matriz. Um dos modelos deste programa está ilustrado abaixo.

```
> wmetodo := proc (u, v, e, f)
    local Delta, k, m, ma, n, delta, gamma, d, x;
    x := alpha+beta;
    Delta := u^2+x*u*v+c*v^2;
    k := simplify((diff(u, t))*u+beta*(diff(u, t))*v+alpha*(diff(v, t))*u+
                  c*(diff(v, t))*v,{x = e,C=f});
    m := simplify((diff(u, t))*u+alpha*(diff(u, t))*v+beta*(diff(v,t))*u+
                  c*(diff(v, t))*v,{x = e,C=f});
    n := (diff(v, t))*u-(diff(u,t))*v;
    ma:= `<|>`(`<,>`(k, gamma*n), `<,>`(delta*n, m));
    d := simplify(Delta, {x = e}); #print(d); print();
    Maplets:-Tools:-Set(MMLV1::algebraic=simplify(ma/d,{x=e,c=f}));
  end proc:
> wmetodo(exp(t),exp(-t),0,0)
```

A última linha deste algoritmo mostra a escolha das funções $u_1(t) = e^t$, $u_2(t) = e^{-t}$ e as restrições $\alpha+\beta = 0$, $c = 0$. Ao considerar as restrições $\alpha = \beta = 0$ e $c = 0$ o algoritmo anterior muda e passa a tomar a seguinte forma.

```
> metodo :=proc (u, v, e, f, c)
    local Delta, k, m, ma, n, delta, gamma, d, x;
    x := alpha+beta;
    Delta := u^2+x*u*v+c*v^2;
```

```
    k := simplify((diff(u, t))*u+beta*(diff(u, t))*v+alpha*(diff(v,t))*u+
                 c*(diff(v, t))*v, {alpha=e, beta=f, c=c});
    m :=simplify((diff(u, t))*u+alpha*(diff(u, t))*v+beta*(diff(v,t))*u+
                 c*(diff(v, t))*v,{alpha=e, beta=f, c=c});
    n := (diff(v, t))*u-(diff(u, t))*v;
    ma:= `<|>`(`<,>`(k, gamma*n), `<,>`(delta*n, m));
    d := simplify(Delta,{alpha=e, beta=f}); #print(d); print();
    Maplets:-Tools:-Set(MMLV1::algebraic=simplify(ma/d));
    end proc:
> metodo(exp(t),exp(-t),0,0,0)
```

O programa completo que permite encontrar, em Maple 10, a matriz $A_0$ está ilustrado a seguir.

```
> wmetodo1 := proc (u, v)
    local Delta, k, m, ma, n, delta, gamma, d, x;
    x := alpha+beta;
    Delta := u^2+x*u*v+c*v^2;
    k := simplify((diff(u, t))*u+beta*(diff(u, t))*v+alpha*(diff(v,t))*u+
                 c*(diff(v, t))*v);
    m := simplify((diff(u,t))*u+alpha*(diff(u, t))*v+beta*(diff(v, t))*u+
                 c*(diff(v, t))*v);
    n:= (diff(v, t))*u-(diff(u, t))*v;
    ma:= `<|>`(`<,>`(k, gamma*n),`<,>`(delta*n, m));
    d := simplify(Delta);
    Maplets:-Tools:-Set(MMLV1::algebraic=simplify(ma/d));
> end proc:
> wmetodo := proc (u, v, e, f)
    local Delta, k, m, ma, n, delta, gamma, d, x;
    x := alpha+beta;
    Delta := u^2+x*u*v+c*v^2;
    k := simplify((diff(u, t))*u+beta*(diff(u, t))*v+alpha*(diff(v,t))*u+
         c*(diff(v, t))*v,{x = e,C=f});
    m := simplify((diff(u, t))*u+alpha*(diff(u, t))*v+beta*(diff(v, t))*u+
         c*(diff(v, t))*v,{x = e,C=f});
    n := (diff(v, t))*u-(diff(u, t))*v;
    ma:= `<|>`(`<,>`(k, delta*n), `<,>`(gamma*n, m));
    d := simplify(Delta, {x = e}); #print(d); print();
    Maplets:-Tools:-Set(MMLV1::algebraic=simplify(ma/d));
> end proc:
> metodo := proc (u, v, e, f, c)
    local Delta, k, m, ma, n, delta, gamma, d, x;
    Delta := u^2+x*u*v+c*v^2;
    k := simplify((diff(u, t))*u+beta*(diff(u, t))*v+alpha*(diff(v,t))*u+
```

```
        c*(diff(v, t))*v, {alpha=e, beta=f, c=c});
  m := simplify((diff(u, t))*u+alpha*(diff(u, t))*v+beta*(diff(v, t))*u+
        c*(diff(v, t))*v,{alpha=e, beta=f, c=c});
  n := (diff(v, t))*u-(diff(u, t))*v;
  ma:= `<|>`(`<,>`(k, delta*n), `<,>`(gamma*n, m));
  d := simplify(Delta,{alpha=e, beta=f}); #print(d); print();
  Maplets:-Tools:-Set(MMLV1::algebraic=simplify(ma/d));
> end proc:
> metodom := proc (u, v, e, f, c,gam,delt)
  local Delta, k, m, ma, n, delta, gamma, d, x;
  x := alpha+beta;
  Delta := u^2+x*u*v+c*v^2;
  k := simplify((diff(u, t))*u+beta*(diff(u, t))*v+alpha*(diff(v,t))*u+
               c*(diff(v, t))*v, {alpha=e, beta=f, c=c});
  m :=simplify((diff(u, t))*u+alpha*(diff(u, t))*v+beta*(diff(v,t))*u+
               c*(diff(v, t))*v,{alpha=e, beta=f, c=c});
  n := (diff(v, t))*u-(diff(u, t))*v;
  ma:= `<|>`(`<,>`(k, gamma*n), `<,>`(delta*n, m));
  d := simplify(Delta,{alpha=e, beta=f}); #print(d); print();
  Maplets:-Tools:-Set(MMLV1::algebraic=simplify(ma/d,{gamma=gam,delta=delt}));
> end proc:
> use Maplets:-Elements in
  maplet := Maplet(
  onstartup = RunWindow(W1),
  Window[W1]
  ( "Equação Modelo",
     MenuBar(Menu("File", MenuItem("Clear", 'onclick'='clear'),
                          MenuItem("Exit", Shutdown() )),
     Menu("Gallery", MenuItem("Exemplo 1", 'onclick'='exemplo1'),
                     MenuItem("Exemplo 2", 'onclick'='exemplo2'),
                     MenuItem("Exemplo 3", 'onclick'='exemplo3')),
     Menu("Help", MenuItem("Help", Shutdown()),
                  MenuItem("About Equação Modelo", Shutdown()))
  ),
 [
  ["Função 1: ",TextField['f1'](30)," "],
  ["Função 2: ",TextField['f2'](30)," "],
  ["Restrições 1: ","alpha+beta =",TextField['r1'](2),
                    "c =",TextField['c1'](2),"  "],
  ["Restrições 2: ","alpha =", TextField['r2'](2),
                    "beta =",TextField['r21'](2),
                    "c =",TextField['c2'](2)," "],
  ["Restrições 3: ","gamma =", TextField['r3'](2),
```

```
                    "delta =",TextField['r31'](2),"  "],
  [""],
  MathMLViewer['MMLV1']('width'=500,'height'=400),
  [Button("Mostrar a Matriz Sem Restrições",
          Action(Evaluate(function = 'wmetodo1(f1,f2)')))],
  [Button("Mostrar a Matriz R1",
          Action(Evaluate(function = 'wmetodo(f1,f2,r1,c1)'))),
  Button("Mostrar a Matriz R2",
          Action(Evaluate(function = 'metodo(f1,f2,r2,r21,c2)'))),
  Button("Mostrar a Matriz R3",
          Action(Evaluate(function = 'metodom(f1,f2,r2,r21,c2,r3,r31)')))],
  [Button("Clear", 'onclick'='clear'), Button("Exit", Shutdown())]
]),
Action['clear'](SetOption('f1'=""),
                SetOption('f2'=""),
                SetOption('r1'=""),
                SetOption('c1'=""),
                SetOption('r2'=""),
                SetOption('r21'=""),
                SetOption('r3'=""),
                SetOption('r31'=""),
                SetOption('c2'=""),
                SetOption('MMLV1'="")
               ),
Action['exemplo1'](SetOption('f1'='exp(int(lambda(x),x=0..t))'),
                   SetOption('f2'='t*exp(int(lambda(x),x=0..t))'),
                   SetOption('r1'='0'),
                   SetOption('c1'='0')
                  ),
Action['exemplo2'](SetOption('f1'='exp(t)'),
                   SetOption('f2'='exp(-t)'),
                   SetOption('r2'='0'),
                   SetOption('r21'='0'),
                   SetOption('c2'='0')
                  ),
Action['exemplo3'](SetOption('f1'='cos(int(f(x), x = 0 .. t))'),
                   SetOption('f2'='sin(int(f(x), x = 0 .. t))'),
                   SetOption('r2'='0'),
                   SetOption('r21'='0'),
                   SetOption('c2'='1')
                  ) );
> end use:
> Maplets:-Display(maplet);
```

A Fig. 4.1 ilustra a forma gráfica do programa anterior. Basicamente o programa funciona de seguinte modo: o utilizador introduz duas funções e as respectivas restrições.

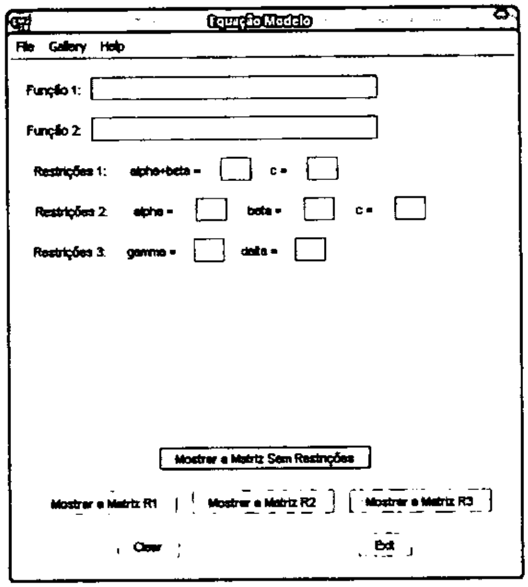


Fig. 4.1

Ao clicar o botão **Mostrar a Matriz Sem Restrições** surge uma matriz sem qualquer restrição e ao clicar o botão correspondente às restrições indicadas aparece a solução simplificada.

O programa permite que para as mesmas funções o utilizador mude várias vezes as restrições fornecendo, deste modo, um mecanismo para escolher a matriz que achar conveniente dependendo das restrições. Vamos ilustrar o funcionamento do programa com alguns exemplos.

**Exemplo 4.3.1.** Sejam $u_1(t) = e^t, \quad u_2(t) = e^{-t}$. A matriz $A_0$ toma a forma

$$A_0(t) = -\frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} e^{2t} + \beta - \alpha - ce^{-2t} & -2\delta \\ -2\gamma & e^{2t} + \alpha - \beta - ce^{-2t} \end{pmatrix},$$

onde $\Delta(t) = e^{2t} + \alpha + \beta + ce^{-2t}$. Assim,

$$W(t,s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{pmatrix} e^{t+s} + \beta e^{t-s} + \alpha e^{s-t} + ce^{-t-s} & \delta(e^{s-t} - e^{t-s}) \\ \gamma(e^{s-t} - e^{t-s}) & e^{t+s} + \alpha e^{t-s} + \beta e^{s-t} + ce^{-t-s} \end{pmatrix}$$

onde $\Delta(s) = e^{2s} + \alpha + \beta + ce^{-2s}$. Se $\alpha = \beta = 0$ e $c = 0$ então

$$A_0 = -\begin{pmatrix} 1 & -2\delta e^{-2t} \\ -2\gamma e^{-2t} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$W(t,s) = \frac{1}{e^{2s}} \begin{pmatrix} e^{t+s} & \delta(e^{s-t} - e^{t-s}) \\ \gamma(e^{s-t} - e^{t-s}) & e^{t+s} \end{pmatrix}.$$

A Fig. 4.2 mostra a forma gráfica do programa para este exemplo. ■

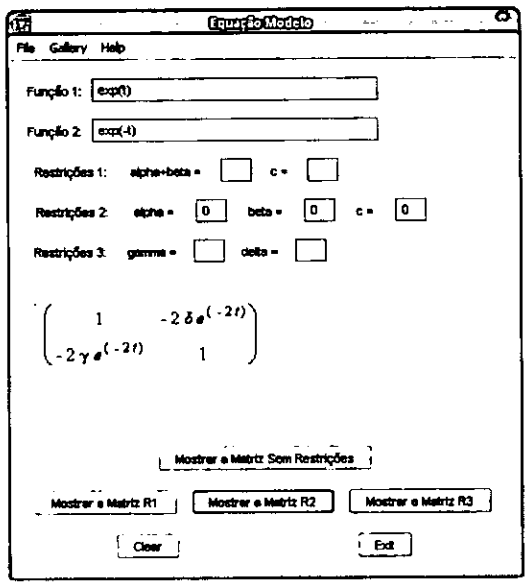


Fig. 4.2

**Exemplo 4.3.2.** Sejam

$$u_1(t) = \cos\left(\int_0^t \lambda(s)\,ds\right), \quad u_2(t) = \sin\left(\int_0^t \lambda(s)\,ds\right),$$

onde $\lambda(\cdot)$ é uma função escalar mensurável e limitada na sua essência no semieixo $[0, +\infty)$. Para nossa comodidade façamos as seguintes denotações:

$$\tilde{\lambda}(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t \lambda(\tau)d\tau, \quad \tilde{\lambda}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\lambda}(t,0).$$

A matriz $A_0(\cdot)$, para $\alpha = \beta = 0$ e $c = 1$, toma a forma

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} 0 & \delta\lambda(t) \\ \gamma\lambda(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso obtemos: $\Delta(t) = 1$,

$$W(t,s) = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\lambda}(t,s) + \sin\tilde{\lambda}(t,s) & \delta\sin\tilde{\lambda}(t,s) \\ \gamma\sin\tilde{\lambda}(t,s) & \cos\tilde{\lambda}(t,s) + \sin\tilde{\lambda}(t,s) \end{pmatrix}.$$

Para que tenha lugar a estimação exponencial (4.3.4) da matriz de Cauchy $W(t,s)$ é necessário e suficiente que se cumpra a desigualdade

$$\lim_{\substack{t-s \to +\infty \\ s \to +\infty}} \frac{1}{t-s} \int_s^t \lambda(\tau)\, d\tau < 0.$$

A Fig. 4.3 mostra a forma gráfica do programa para este exemplo. ■

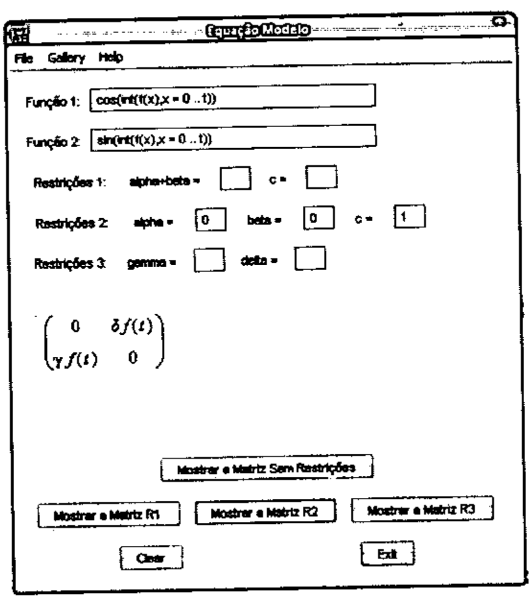


Fig. 4.3

## 4.4 $W$-método e estabilidade

**Definição 4.4.1.** *O operador de Cauchy* $(\mathcal{C}f)(t) = \int\limits_0^t C(t,s)f(s)ds$ *da equação* $\mathcal{L} = f$ *diz-se que usufrui a propriedade* $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ *se actua continuamente do espaço* $\mathbf{B}_1$ *no espaço* $\mathbf{B}_2$.

Nesta definição, $\mathbf{B}$ representa o espaço de Banach de funções $z : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, cujos elementos são somáveis em cada segmento finito $[0,b]$. Suponhamos que temos a equação modelo $\mathcal{L}_0 x = z$ escolhida com propriedades assimptóticas da solução

$$x(t) = U(t)x(0) + \int\limits_0^t W(t,s)z(s)ds, \tag{4.4.1}$$

que é apropriada para a equação $\mathcal{L}x = f$, por investigar. Pretende-se estabelecer a invertibilidade do operador $(\mathcal{W}z)(t) = \int\limits_0^t W(t,s)z(s)ds$.

**Teorema 4.4.1.** *Suponhamos que* $\mathcal{L} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ *e é limitado. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

*(a) Os espaços* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ *e* $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ *coincidem e além disso as normas*

$$||x||_{\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\mathbf{B})} = ||\mathcal{L}_0 x||_{\mathbf{B}} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n} \quad e \quad ||x||_{\mathbf{D}(\mathcal{L},\mathbf{B})} = ||\mathcal{L}x||_{\mathbf{B}} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$$

*são equivalentes.*

*(b) Existe a inversa* $[\mathcal{L}\mathcal{W}]^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *limitada.*

*(c) A solução do problema de Cauchy* $\mathcal{L}x = f$, $x(0) = \alpha$, *pertence a* $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ *para cada* $\{f, \alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$.

O espaço $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$ é isomorfo ao produto $\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n$. Além disso o isomorfismo é definido pela equação (4.4.1). A $\mathbf{D}_0$-propriedade garante que a parte principal $\mathcal{L}\mathcal{W}$ do operador $\mathcal{L} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ é Fredholm.

O teorema anterior fornece um esquema para decidir se os elementos $x \in \mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{B})$ (as soluções $x$ da equação $\mathcal{L}x = f$, $f \in \mathbf{B}$) possuem uma dada propriedade (por exemplo, a propriedade $x \in \mathbf{L}_\infty$, se $f \in \mathbf{L}_\infty$). Por conseguinte, a aplicação do W-método reduz-se à escolha da equação modelo $\mathcal{L}_0 x = z$ (à escolha do operador $\mathcal{W}$) com as seguintes condições a cumprerem-se [15]:

(a) A multivariedade $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{Y}$ com as propriedades dadas coincide com $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$.

(b) O operador $\mathcal{L}$ é tal que $\mathcal{L} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}) \to \mathbf{B}$

(c) O operador $\mathcal{L}\mathcal{W} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ é invertível.

A invertibilidade de $\mathcal{L}\mathcal{W} = I - (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}$ é garantida pelo princípio de Banach, se é válida a estimação

$$||(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}||_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}} < 1. \tag{4.4.2}$$

Em virtude da equivalência das afirmações (b) e (c) do teorema anterior, a invertibilidade de $\mathcal{L} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ é equivalente à invertibilidade de $\mathcal{W}\mathcal{L} : \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}) \to \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$. Além disso a afirmação (c) ao pertencer às soluções do problema de Cauchy para $\mathbf{D}_0$ é equivalente a solvabilidade da equação

$$\mathcal{W}\mathcal{L}x \equiv x - \mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})x = \mathcal{W}f + \mathcal{U}\alpha \tag{4.4.3}$$

no espaço $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$. Deste modo a estimação

$$||\mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})||_{\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\mathbf{B})\to\mathbf{D}(\mathcal{L}_0,\mathbf{B})} < 1 \tag{4.4.4}$$

garante a $\mathbf{D}_0$- estabilidade.

É útil observar que no caso de $\mathcal{L}_0 - \mathcal{L} : \mathbf{V} \to \mathbf{B}$ ser contínuo, a estimação (4.4.4) pode ser substituída por

$$||\mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})||_{\mathbf{V}\to\mathbf{V}} < 1. \tag{4.4.5}$$

Este resultado resulta do facto de qualquer solução $x \in \mathbf{V}$ da equação (4.4.3) pertencer a $\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{B})$.

Para ilustração, considere-se a equação [15], [13]

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{4.4.6}$$

assumindo que os elementos da matriz $A_{n\times n}$ são mensuráveis e essencialmente limitadas no semi-eixo $[0, \infty)$ e que as colunas desta matriz pertencem a $\mathbf{L}_\infty$. Na qualidade da equação modelo escolhamos

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + \varphi x(t) = z(t)$$

com $\varphi = const > 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{L}_\infty^\gamma$, $0 < \gamma < \varphi$. Assim, para a matriz fundamental e para o operador de Cauchy da equação modelo temos

$$U(t) = E\exp(-\varphi t), \quad (\mathcal{W}z)(t) = \int_0^t \exp(-\varphi(t - s))z(s)ds.$$

A invertibilidade do operador $\mathcal{LW} : \mathbf{L}_\infty^\gamma \to \mathbf{L}_\infty^\gamma$ garantirá a propriedade $(\mathbf{L}_\infty^\gamma, \mathbf{L}_\infty^\gamma)$ do operador de Cauchy da equação (4.4.6). Para formular a verificação da condição de invertibilidade do operador $\mathcal{LW}$ será usado o seguinte raciocínio.

Tem-se $\mathcal{W}z = z - \Omega z$, onde

$$(\Omega z)(t) = [E\varphi - A(t)] \int_0^t \exp(-\varphi(t-s))z(s)ds, \quad ||\Omega z||_{\mathbf{L}_\infty^\gamma} \leq \operatorname*{vrai\,sup}_{t>0} ||E\varphi - A(t)||.$$

$$\int_0^t \exp(\varphi - \gamma)(s-t)\exp(\gamma s)|z(s)|ds \leq \operatorname*{vrai\,sup}_{t>0} ||E\varphi - A(t)|| \frac{1}{\varphi - \gamma} ||z||_{\mathbf{L}_\infty^\gamma}.$$

Assim,

$$||\Omega||_{\mathbf{L}_\infty^\gamma \to \mathbf{L}_\infty^\gamma} \leq \operatorname*{vrai\,sup}_{t>0} ||E\varphi - A(t)|| \frac{1}{\varphi - \gamma}.$$

Em virtude do Teorema 4.4.1 obtemos a desigualdade

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b} ||E\varphi - A(t)|| < \varphi - \gamma,$$

com $b > 0$ que garante a $\mathbf{D}_0-$ estabilidade da equação (4.4.6). A estabilidade não é violada se a matriz $A$ é definida arbitrariamente no segmento $[0, \infty)$, por exemplo, $A(t) = E\varphi$. Portanto, o resultado final pode ser formulado do seguinte modo:

**Teorema 4.4.2.** *Suponhamos que existe um número $\varphi > 0$ tal que*

$$\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} ||E\varphi - A(t)|| < \varphi. \tag{4.4.7}$$

*Então a equação (4.4.6) é $\mathbf{C}^\gamma$-estável para $\gamma > 0$ suficientemente pequeno e as soluções desta equação são exponencialmente estáveis.*

Se no espaço $\mathbb{R}^n$ definimos a norma $|\xi| = \max\{|\xi^1|, \ldots, |\xi^n|\}$, então para a matriz $A = (a_{ij})$ a norma é $||a|| = \max\limits_{1\leq j\leq 1} \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$. Esta normalização da equação (4.4.7) é válida se

$$\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} \left\{ |\varphi - a_{ii}(t)| + \sum_{j\neq i} |a_{ij}(t)| \right\} < \varphi, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Daqui, assumindo que $\varphi > \max\limits_i \{\operatorname*{vrai\,lim}\limits_{t\to\infty} |a_{ii}(t)|\}$, obtemos:

**Corolário 4.4.1.** *Suponhamos que a desigualdade*

$$\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} \left\{ a_{ii}(t) - \sum_{j\neq i} |a_{ij}(t)| \right\} > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

*é válida. Então as soluções da equação* (4.4.6) *são exponencialmente estáveis.*

Esta afirmação pode ser enunciada de forma mais precisa, usando como equação modelo uma equação mais complicada. Assim, assumindo $(\mathcal{L}_0 x)(t) = \dot{x}(t) + A_0 x(t)$, onde $A_0 = diag(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, obtemos a afirmação seguinte:

**Teorema 4.4.3.** *Suponhamos que existem números positivos* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *tais que*

$$\operatorname*{vrai\,lim}_{t\to\infty} \left\{ \varphi_1 a_{ii}(t) - \sum_{j\neq i} \varphi_j |a_{ij}(t)| \right\} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Então as soluções da equação* (4.4.6) *são exponencialmente estáveis.*

## 4.5 Critérios de C estabilidade

Vamos neste parágrafo formular três critérios de **C**− estabilidade [6] da equação (4.3.1) com matriz

$$A(t) = -\begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ r(t) & v(t) \end{pmatrix},$$

onde $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot), v(\cdot)$ são quaisquer funções escalares mensuráveis e limitadas na sua essência no semi-eixo $[0, +\infty)$.

**Critério 4.5.1.** *Suponhamos que se cumprem as desigualdades:* $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} \psi(t) < +\infty$,

$$\{\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |q(t) - r(t)| + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |p(t) - v(t)|\} \times \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} \psi(t) < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

*onde* $\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \exp\left( \int\limits_s^t \epsilon(\tau)\, d\tau \right) ds$, $\epsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(t) + |q(t)|$.

*Então a equação (4.3.1) é* **C** *estável.*

**Demonstração.** Na qualidade de equação modelo vamos escolher a equação (4.3.2). Primeiro mostremos que para esta equação a matriz a considerar é

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix}.$$

Para tal, escolhemos as funções [6]

$$u_1(t) = e^{\int_0^t \lambda_1(s)\,ds}, \quad u_2(t) = e^{\int_0^t \lambda_2(s)\,ds} - e^{\int_0^t \lambda_1(s)\,ds},$$

onde $\lambda_1$, $\lambda_2$ são quaisquer funções escalares mensuráveis e limitadas na sua essência no semi-eixo $[0,+\infty)$. Suponhamos, por definição, que $\lambda_1(t) < \lambda_2(t)$ para quase todo $t \geq 0$ e, para nossa comodidade, façamos as seguintes denotações:

$$\tilde{\lambda}_i(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^t \lambda_i(\tau)\,d\tau, \ \tilde{\lambda}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\lambda}_i(t,0), \ i = 1,2.$$

Inicialmente a matriz $A_0$, para $c = 0$ e $\alpha + \beta = 1$, tem a forma

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} \lambda_1(t) + \alpha(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) & \delta(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) \\ \gamma(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) & \lambda_2(t) + \alpha(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \end{pmatrix},$$

onde $\Delta(t) = e^{\tilde{\lambda}_1(t)+\tilde{\lambda}_2(t)}$. Para que tenha lugar a estimação exponencial (4.3.4) da matriz de Cauchy $W(t,s)$,

$$W(t,s) = \begin{pmatrix} e^{\tilde{\lambda}_1(t,s)} + \alpha(e^{\tilde{\lambda}_2(t,s)} - e^{\tilde{\lambda}_1(t,s)}) & \delta(e^{\tilde{\lambda}_2(t,s)} - e^{\tilde{\lambda}_1(t,s)}) \\ \gamma(e^{\tilde{\lambda}_2(t,s)} - e^{\tilde{\lambda}_1(t,s)}) & e^{\tilde{\lambda}_2(t,s)} - \alpha(e^{\tilde{\lambda}_2(t,s)} - e^{\tilde{\lambda}_1(t,s)}) \end{pmatrix}.$$

é necessário e suficiente que se cumpra a desigualdade [6]

$$\lim_{\substack{t-s\to+\infty \\ s\to+\infty}} \frac{1}{t-s}\int_s^t \lambda_2(\tau)\,d\tau < 0.$$

Sejam $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/2$ e denote-se

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)\right), \quad q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\right).$$

Então,

$$\lambda_1(t) = p(t) - q(t), \quad \lambda_2(t) = p(t) + q(t).$$

Se $\alpha = \beta = 1/2,\ \gamma = \delta = -1/2$ e denotando-se

$$p(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\lambda_1(t) + \lambda_2(t)), \quad q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)),$$

então,

$$\lambda_1(t) = p(t) + q(t), \quad \lambda_2(t) = p(t) - q(t).$$

Em ambos os casos temos:

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ q(t) & p(t) \end{pmatrix}$$

e a matriz de Cauchy tem a forma

$$W(t,s) = e^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau & \operatorname{sh}\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau \\ \operatorname{sh}\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau & \operatorname{ch}\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}.$$

A condição $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} \psi(t) < +\infty$ garante a **C**− estabilidade da equação (4.3.2).

Calculamos a expressão

$$(\mathcal{K}z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t K(t,s)z(s)\,ds,$$

onde $K(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} (A_0(t) - A(t))W(t,s)$. É óbvio, que $\mathcal{LW}z = z - \mathcal{K}z$. Segundo a observação 4.3.1, a **C**− estabilidade da equação (4.3.1) é equivalente à $\mathbf{D}_0$−estabilidade. A desigualdade

$$\|\mathcal{K}\|_{\mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_\infty} < 1 \tag{4.5.1}$$

é condição suficiente para a invertibilidade do operador $\mathcal{LW} : \mathbf{L}_\infty \mapsto \mathbf{L}_\infty$.

A norma $\|z\|$ do elemento $z \in \mathbf{L}_\infty,\ z = col\{z_1, z_2\}$ definimos segundo a igualdade [6]

$$\|z\|_{\mathbf{L}_\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |z_1(t)|)^2 + (\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |z_2(t)|)^2}.$$

Nas condições do Critério 4.5.1 a desigualdade (4.5.1) cumpre-se. ■

**Critério 4.5.2.** *Suponhamos que se cumprem as desigualdades:* $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} \Phi(t) < +\infty$,

$$\{\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |q(t)+r(t)| + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} |p(t)-v(t)|\} \times \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0} \Phi(t) < 1,$$

*onde* $\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^t p(\tau)\,d\tau\right) ds$.

*Então a equação (4.3.1) é* **C** *estável.*

**Demonstração.** Na qualidade de equação modelo vamos escolher a equação (4.3.2). Vamos mostrar que a matriz $A_0$ para esta equação é do tipo

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ -q(t) & p(t) \end{pmatrix}.$$

Para tal escolhemos as funções [6]

$$u_1(t) = e^{\int_0^t \lambda(s)\,ds} \cos \int\limits_0^t \theta(s)\,ds, \quad u_2(t) = e^{\int_0^t \lambda(s)\,ds} \sin \int\limits_0^t \theta(s)\,ds,$$

onde $\lambda$, $\theta$ são quaisquer funções escalares mensuráveis e limitadas na sua essência no semi-eixo $[0,+\infty)$. Para nossa comodidade façamos as seguintes denotações:

$$\tilde\lambda(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_s^t \lambda(\tau)\,d\tau,\ \tilde\theta(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_s^t \theta(\tau)\,d\tau,\ \tilde\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde\lambda(t,0),\ \tilde\theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde\theta(t,0).$$

Inicialmente a matriz $A_0$, para $c=1$ e $\alpha+\beta=0$, toma a forma

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} \lambda(t)-\beta\theta(t) & \delta\theta(t) \\ \gamma\theta(t) & \lambda(t)-\alpha\theta(t) \end{pmatrix},$$

onde $\Delta(t) = e^{2\tilde\lambda(t)}$. Para que tenha lugar a estimação exponencial (4.3.4) da matriz de Cauchy $W(t,s)$

$$W(t,s) = e^{\tilde\lambda(t,s)} \begin{pmatrix} \cos\tilde\theta(t,s) + \alpha\sin\tilde\theta(t,s) & \delta\sin\tilde\theta(t,s) \\ \gamma\sin\tilde\theta(t,s) & \cos\tilde\theta(t,s) + \beta\sin\tilde\theta(t,s) \end{pmatrix}$$

é necessário e suficiente que se cumpra a desigualdade [6]

$$\lim_{\substack{t-s\to+\infty\\ s\to+\infty}} \frac{1}{t-s}\int\limits_s^t \lambda(\tau)\,d\tau < 0.$$

Sejam $\alpha=\beta=0$, $\gamma=-\delta=-1$ e denote-se:

$$p(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\lambda(t),\quad q(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\theta(t).$$

Se $\alpha=\beta=0$, $\gamma=-\delta=1$, denote-se

$$p(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\lambda(t),\quad q(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}-\theta(t).$$

Em ambos os casos temos:

$$A_0(t)=-\begin{pmatrix} p(t) & q(t)\\ -q(t) & p(t)\end{pmatrix},$$

e

$$W(t,s)=e^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau}\begin{pmatrix} \cos\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau & \sin\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau\\ -\sin\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau & \cos\int\limits_s^t q(\tau)\,d\tau\end{pmatrix}.$$

A condição $\operatorname{vrai\,sup}_{t\geq 0}\psi(t)<+\infty$ garante a $\mathbf{C}$– estabilidade da equação (4.3.2).

Calculamos a expressão

$$(\mathcal{K}z)(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^t K(t,s)z(s)\,ds,$$

onde $K(t,s)\stackrel{\mathrm{def}}{=}(A_0(t)-A(t))W(t,s)$. É óbvio, que $\mathcal{L}\mathcal{W}z=z-\mathcal{K}z$. Segundo a observação 4.3.1, a $\mathbf{C}$– estabilidade da equação (4.3.1) é equivalente à $\mathbf{D}_0$– estabilidade. A desigualdade (4.5.1) é condição suficiente para a invertibilidade do operador $\mathcal{L}\mathcal{W}:\mathbf{L}_\infty\mapsto\mathbf{L}_\infty$.

A norma $\|z\|$ do elemento $z\in\mathbf{L}_\infty$, $z=\{z_1,z_2\}$ definimos segundo a igualdade

$$\|z\|_{\mathbf{L}_\infty}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sqrt{(\operatorname{vrai\,sup}_{t\geq0}|z_1(t)|)^2+(\operatorname{vrai\,sup}_{t\geq0}|z_2(t)|)^2}.$$

Nas condições do Critério 4.5.2 a desigualdade (4.5.1) cumpre-se. ■

**Critério 4.5.3.** *Suponhamos que se cumprem as desigualdades:* $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0}\Phi(t) < +\infty$,

$$\{(\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0}|p(t)-v(t)|)^2 + (\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0}|q(t)|)^2 + (\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0}|r(t)|)^2\} \times \operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0}\Phi(t) < 1.$$

*Então a equação (4.3.1) é* **C** *estável.*

**Demonstração.** Na qualidade de equação modelo vamos escolher a equação (4.3.2). Mostremos que a matriz $A_0$ para esta equação modelo é do tipo

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & p(t) \end{pmatrix}.$$

Para tal façamos [6]

$$u_1(t) = e^{\int_0^t \lambda(s)\,ds}, \quad u_2(t) = te^{\int_0^t \lambda(s)\,ds},$$

onde $\lambda$ é uma função escalar mensurável e limitada na sua essência no semi-eixo $[0, +\infty)$.

Inicialmente a matriz $A_0(t)$, para $c = 0$ e $\alpha + \beta = 0$, toma a forma

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} \lambda(t)+\alpha & \delta \\ \gamma & \lambda(t)+\beta \end{pmatrix}.$$

onde $\Delta(t) = e^{2\int_0^t \lambda(s)\,ds}$ e a matriz de Cauchy $W(t,s)$

$$W(t,s) = e^{\int_s^t \lambda(\tau)\,d\tau}\begin{pmatrix} 1+\alpha(t-s) & \delta(t-s) \\ \gamma(t-s) & 1+\beta(t-s) \end{pmatrix}.$$

Para que tenha lugar a estimação exponencial (4.3.4) da matriz de Cauchy $W(t,s)$ é necessário e suficiente que se cumpra a desigualdade [6]

$$\lim_{\substack{t-s\to+\infty \\ s\to+\infty}} \frac{1}{t-s}\int_s^t \lambda(\tau)\,d\tau < 0.$$

Se nas matrizes $A_0(t)$ e $W(t,s)$ colocarmos $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, $\lambda(\cdot) = p(\cdot)$ então estas matrizes tomam a forma

$$A_0(t) = -\begin{pmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & p(t) \end{pmatrix}.$$

e

$$W(t,s) = e^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Repetindo os passos dados na demonstração do Critério 4.5.2 obtemos que, nas condições do Critério 4.5.3, a desigualdade (4.5.1) cumpre-se.■

# Conclusões e Recomendações

Este trabalho teve como objectivo geral fazer uma abordagem sobre alguns critérios de C-estabilidade de sistemas de equações diferenciais e levar a cabo, de um modo pedagógico e metodológico, um estudo sobre **D** e **C**− estabilidade de sistemas de equações diferenciais e, como objectivo específico, generalizar os critérios de **C**− estabilidade obtidos em [6]. Utilizando métodos numéricos fez-se a demonstração computacional para alguns exemplos de sistemas diferenciais.

A maior parte dos conceitos aqui apresentados foram criteriosamente estudados de modo a alcançar o objectivo do trabalho. No parágrafo sobre a função de Cauchy demonstramos algumas das suas propriedades. No capítulo sobre a estabilidade de sistemas diferenciais fez-se a análise da estabilidade de sistemas diferenciais lineares homogéneos. Gostaria de propor que se estenda esta análise para os casos não lineares.

Os algoritmos e resultados computacionais apresentados estão estritamente ligados ao caso em estudo. O uso dos pacote Matlab 6.5 e Maple 10 permitiu-me encontrar resultados que de outra forma seria muito mais trabalhoso. Por outro lado, o software Matlab 6.5 permitiu-me elaborar um software para a análise gráfica de estabilidade, enquanto que o Maple ofereceu-me possibilidades de construir um software para, através da introdução de duas funções, obter as matrizes (uma das quais é a matriz de Cauchy) para a equação modelo. Neste trabalho a equação modelo é de segunda ordem. Proponho que os algoritmos e os resultados computacionais sejam melhorados e que seja feita a análise para o caso duma matriz de ordem superior a dois.

# Bibliografia


[1] B. Demidovitch et al, *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir Moscovo, 1993.

[2] C. H. Edwards, D. E. Penney, *Differential Equations: Computing and Modeling*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[3] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, Addison Wesley, 2003.

[4] D. G. Zill, M. R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-value Problems*, 3rd Edition, PWS Publishing Company, Boston, 1993.

[5] E. A. Barbashin, *Introduction to the Stability Theory*, Nauka, Moscow, 1967.

[6] M. J. Alves, *Equações Diferenciais Funcionais Singulares de Segunda Ordem*, Perm State University Press, 2000.

[7] M. L. Krasnov, A.I. Kiseliov, G.I. Makarenko, *Equações Diferenciais Ordinárias*, MacGraw-Hill, Portugal, 1994.

[8] M. L. Krasnov, A.I. Kiseliov, G.I. Makarenko, *Funciones de Variable Compleja. Calculo Operacional. Teoría de la Estabilidad*, Editora Mir, Moscú, 1981.

[9] N. V. Azbelev, *Stability of linear systems with aftereffect*, Sb. Nautshn. Trudov, Novosibirski: Nauka, SO (1988), pp. 65–72.

[10] N. V. Azbelev, L. M. Berezanskiĭ, *Stability of solutions of equations with after effect*, Funkts. Differents. Uravnenia: Sb. nautshn. Trudov, Perm: PermPI (1989), pp. 3–15.

[11] N. V. Azbelev, L. M. Berezanskiĭ, P. M. Simonov, A. V. Chistiakov, *Stability of linear systems with after effect*, Differ. Equations, T. 29, N°. 2 (1993), pp. 153–160.

[12] N. V. Azbelev, P. M. Simonov, *Stability of equations with delay*, Iz. vuzov. Matematika, (1997), pp. 3–16.

[13] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations*, World Federation Publishers Company, Atlanta, 1995.

[14] S.A. Gusarenko, *Functional-differential equations with volterra operator: PhD thesis in Maths*, Perm, 1987.

[15] N.V. Azbelev, V. P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, *Methods of the Conteporaneos Theory of Functional Differential Equations*, Theory of Caos, 2001.

[16] S. G. Kreĭn et al, *Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1972.

[17] T. Tantau, *User Guide to the Beamer Class, Version 3.07*, March 11, 2007.

[18] V. V. Malygina, *On an exponential estimate for a Cauchy function*, Differ. Equations, T. 28, (1992), pp. 1082–1084.

[19] W. R. Derrick, S. I. Grossman, *Elementary Differential Equations with Aplications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1981.

[20] Yu. L. Daletskiĭ, M. G. Kreĭn, *Stability of Solutions of Differential Equations on Banach Space*, Nauka, Moscow, 1970.

[21] http://math.rice.edu/ dfield/dfpp.html, visitado em 12/02/07.