Universidade Eduardo Mondlane

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA

REGULARIZAÇÃO DE UM PROBLEMA COM SINGULARIDADE NÃO SOMÁVEL

AUTOR: NAZÁRIO RICARDO BINANA
SUPERVISOR: PROF. DOUTOR MANUEL JOAQUIM ALVES

MAPUTO 2003

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA

REGULARIZAÇÃO DE UM PROBLEMA COM SINGULARIDADE NÃO SOMÁVEL

AUTOR: Nazário Ricardo Binana
SUPERVISOR: Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves

MAPUTO, 2003

DECLARAÇÃO SOB PALAVRA DE HONRA

Este trabalho foi efectuado, somente, com base nos recursos que, ao longo do mesmo, se faz referência.

NAZÁRIO RICARDO BINANA

Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Conteúdo

AGRADECIMENTOS

Entre tantos que acreditaram e torceram pelo sucesso do meu trabalho, entre aqueles que estenderam a mão nos momentos em que mais precisei deixo gravado nesta página o meu agradecimento, em especial:

- Aos meus amigos Buque, Izídio, Jorge, Nhancolo, Noraly, Paulino, Sinela; à família Massango, em especial à Nina e à Ginoca;
- Aos docentes, corpo técnico e estudantes do Departamento de Matemática e Informática e do Centro de Informática da Universidade Eduardo Mondlane, em particular ao dr. Afonso Tsandzana, dra. Antonieta Macuácua, Azarias Muchanga e Penicela Vasco;
- Ao Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves, meu professor e supervisor, pelo tempo disponibilizado, encorajamento e pela orientação que me transmitiu;
- À minha família pelo apoio moral e material, em especial para minha mãe e irmãos.

Maputo, 2003

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à memória do meu pai, Ricardo André Binana.

Resumo

A descrição matemática de muitos processos reais conduz à problemas de fronteira para equações do tipo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(h(t))), \quad t \in [a, b], \quad x(\xi) = y(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \tag{1}$$

A equação (1) é um exemplo actual duma equação diferencial funcional. As equações diferenciais funcionais contêm classes especiais de equações, tais como equações diferenciais ordinárias e equações integro-diferenciais. A investigação de questões específicas para classes especiais de equações diferenciais funcionais está retratada em muitos artigos e monografias. Na monografia de Hale [7] faz-se uma tentativa em sistematizar um largo círculo de resultados da Teoria de Equações Diferenciais Funcionais. Contudo, a construção das bases da teoria geral de equações diferenciais funcionais tornou-se possível graças à concepção proposta pelo Professor Doutor N.V. Azbelev (vide, por exemplo, [5]). No âmbito desta concepção, entendeu-se a equação diferencial funcional como sendo uma equação da forma

$$\dot{x} = \mathcal{F}x,$$

com operador $\mathcal{F}$ definido num certo subconjunto do espaço de funções absolutamente contínuas $W_1^1[a, b]$. Na Teoria de Equações Diferenciais Funcionais, um papel importante joga o facto de que o espaço $W_1^1[a, b]$ é isomorfo ao produto directo do espaço $L_1[a, b]$ de funções somáveis e o espaço finito-dimensional $\mathbb{R}^1$. Por exemplo, este isomorfismo podemos definir segundo a correspondência

$$W_1^1[a, b] \ni x \to \{\dot{x}, \, x(a)\} \in L_1[a, b] \times \mathbb{R}^1,$$

que provém da representação de funções absolutamente contínuas

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(s)ds + x(a).$$

O desenvolvimento posterior da Teoria de Equações Diferenciais Funcionais exigiu a substituição dos espaços W_1^1 e L_1 por espaços de Banach[1] D e B, respectivamente, conservando para tal o isomorfismo $D \simeq B \times \mathbb{R}^1$.

De realçar que a teoria construída nesta base contém muitas aplicações: para a lista de classes especiais de equações, relacionadas com equações diferenciais funcionais, incluímos as equações com pós-efeito impulsivo e equações diferenciais singulares. Neste trabalho vamos abordar a questão da solubilidade para uma equação diferencial singular de segunda ordem.

Seja $\mathcal{L}x = f$ uma equação com operador linear $\mathcal{L} : D_0 \to B_0$, onde o espaço D_0 é isomorfo ao produto $B_0 \times \mathbb{R}^n, \mathcal{J} = \{\Lambda_0, Y_0\} : B_0 \times \mathbb{R}^n \to D_0$ é o isomorfismo. Se a parte principal $\mathcal{L}\Lambda_0 : B_0 \to B_0$ do operador $\mathcal{L}$ não é um operador de Fredholm[2], então não possuímos meios para estudar esta equação e nesse caso dizemos que a *equação é singular*.

Questões relacionadas com Equações Diferenciais Singulares são actuais e de notável interesse teórico e de aplicação. Existem muitos trabalhos científicos dedicados à esta temática. De salientar os trabalhos de M. Alves [2], [3], [4], N. Azbelev [5] e I. Kiguradze [6]. Neste trabalho pretende-se dar continuidade à ideia do Prof. Doutor Manuel Alves sobre a construção de um espaço de Banach, onde o problema singular que descreve processos num reactor químico se torna regular e, logo, pode-se aplicar os vários teoremas sobre solubilidade e existência de solução.

No livro [4] o autor constrói um espaço especial de Banach, que usa na investigação do problema de fronteira para vários tipos de equações com singularidade em relação ao argumento. Esse espaço é isomorfo ao produto de um espaço de Banach e o espaço real $\mathbb{R}^1$. *O estudo abarca o caso quando o parâmetro* $p > 1$.

No nosso trabalho daremos continuidade à esta ideia e **iremos investigar o problema singular para o caso particular quando** $p = 1$. Este trabalho é uma continuação natural

[1] Stefan Banach (1892—1945) — matemático polaco

[2] Erik Ivar Fredholm (1866—1927) — matemático sueco

dos resultados retratados em [4] e tem *objectivo de obter condições efectivas de resolubilidade do problema singular de fronteira* que descreve e modela processos físicos e químicos que ocorrem em fenómenos da Teoria de Elasticidade e reactores químicos. Como metodologia faremos uso da Teoria de Equações Lineares em espaços de Banach, Análise Funcional e problemas de fronteira.

Neste trabalho estudamos o problema

$$\ddot{x}(t) + \frac{\dot{x}(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = f(t, \Theta x), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha. \tag{2}$$

No livro [4], o Prof. Doutor M.J. Alves estudou esta equação singular, tendo para tal construído um espaço especial $\mathrm{D}_p^{u,v} \equiv \mathrm{B}_p^{u,v} \times \mathbb{R}^1$, $1 < p \leq \infty$. Dando continuidade à esta investigação, nós estudamos (2), para $p = 1$, tendo construído um espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t} \equiv \mathrm{B}_1^{t^2,t} \times \mathbb{R}^1$. O problema (2), neste espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$, deixa de ser singular e, deste modo torna-se possível aplicar vários teoremas da Análise.

Capítulo 1

Noções preliminares da Análise Funcional e da Teoria de Equações Diferenciais Funcionais

1.1 Noções preliminares

A maioria das asserções da Teoria Abstracta de Equações Diferenciais Funcionais Lineares é baseada nos teoremas sobre equações lineares nos espaços de Banach. Apresentamos aqui, sem provas, resultados do livro de Kreĭn [10], que iremos fazer uso mais adiante. Formulamos algumas asserções não na forma geral, mas sim de modo a satisfazer as nossas necessidades.

Usaremos as seguintes notações: $\mathbb{R}^n$ é o espaço de vectores n-dimensionais, com a norma $|\cdot|$, $\mathbb{N}$ é o conjunto de números naturais, $\|\cdot\|_{\mathrm{X}}$ denota a norma no espaço X, *dim* M denota a dimensão da multivariedade linear M, $\|\mathcal{A}\|_{\mathrm{X}\to\mathrm{Y}}$ denota a norma do operador linear limitado $\mathcal{A}$: $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{Y}$, $\mathcal{A}^*$ é o operador conjugado em relação ao operador linear $\mathcal{A}$, $R(\mathcal{A})$ é o contradomínio do operador $\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A})$ é o domínio do operador $\mathcal{A}$, $\rho(\mathcal{A})$ é o raio espectral do operador $\mathcal{A}$, $\equiv$ significa "identicamente igual", $\stackrel{\text{def}}{=}$ significa "igual por definição", $\mathrm{C}[0,1] \equiv \mathrm{C}$ é o espaço de funções contínuas $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$, cuja norma é

$$\|x\|_{\mathrm{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0\le t\le 1} |x(t)|$$

e a relação de semi-ordenamento $\leq$: $x \leq y$ se $x(t) \leq y(t)$, para todo $t \in [0,1]$, $f(t)$ é negativa (positiva) em $[a,b]$ se $f(\cdot) < 0$ $(f(\cdot) > 0)$, $f(t)$ é não negativa (não positiva) em $[a,b]$ se $f(\cdot) \geq 0$ $(f(\cdot) \leq 0)$, p' é o expoente conjugado em relação ao expoente p: $1/p + 1/p' = 1$ ($p' = \infty$, se $p = 1$ e $p' = 1$, se $p = \infty$), $L_p[0,1] \equiv L_p$ $(1 \leq p < \infty)$ é o espaço de classes de funções equivalentes $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$ somáveis em p grau, cuja norma é

$$\|x\|_{L_p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

e a relação de semi-ordenamento $\leq$: $x \leq y$, se $x(t) \leq y(t)$ para quase todo $t \in [0,1]$, $L_\infty[0,1] \equiv L_\infty$ é o espaço de funções $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$ mensuráveis e limitadas na essência, cuja norma é

$$\|x\|_{L_\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$$

e a relação de semi-ordenamento está definida como em L_p, $W_p^2[0,1] \equiv W_p^2$ é o espaço de funções diferenciáveis $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$ com derivada $\dot{x}$ absolutamente contínua tal, que $\ddot{x} \in L_p$,

$$\|x\|_{W_p^2} \stackrel{\text{def}}{=} \|\ddot{x}\|_{L_p} + |x(0)| + |\dot{x}(0)|,$$

$X \times Y$ é o produto directo dos espaços lineares X e Y, $ker\,\mathcal{A}$ é o núcleo do operador $\mathcal{A}$, $ind\,\mathcal{A}$ é o índice do operador $\mathcal{A}$, I_X é o operador identidade $I_X : X \mapsto X$, $\mathcal{O}$ é o operador nulo, E é a matriz unitária, $f(t,\cdot)$ significa que t está fixo e f considera-se como uma função somente do segundo argumento, $f(\cdot,s)$ significa que s está fixo e f considera-se como uma função somente do primeiro argumento, $\square$ denota o fim da demonstração ou observação.

Seja $\mathcal{A}$ um operador que actua de X para Y. A equação

$$\mathcal{A}x = y \tag{1.1}$$

(o operador $\mathcal{A}$) diz-se *normalmente solúvel*, se o conjunto $R(\mathcal{A})$ é fechado; a equação (1.1) diz-se *equação de Noether*, se é normalmente solúvel e $dim\,ker\mathcal{A} < \infty$ e $dim\ ker\ \mathcal{A}^* < \infty$. O número $ind\mathcal{A} = dim\ ker\ \mathcal{A} - dim\ ker\ \mathcal{A}^*$ é chamado *índice do operador* $\mathcal{A}$ (da equação (1.1)). Se $\mathcal{A}$ é operador de Noether e $ind\mathcal{A} = 0$, a equação (1.1) (o operador $\mathcal{A}$) é chamado *Fredholm*. A equação $\mathcal{A}^*\varphi = g$ é chamada *equação adjunta* de (1.1).

Teorema 1. *O operador $\mathcal{A}$ é normalmente solúvel, se e somente se a equação (1.1) é solúvel para cada lado direito y que é ortogonal para todas soluções da equação homogénea adjunta $\mathcal{A}^*\varphi = 0$.*

Teorema 2. *Se para um operador de Noether fizermos uma pertubação compacta, ele continua sendo de Noether. Tal pertubação compacta não altera o índice do operador.*

Teorema 3. *Seja $\mathcal{A}$ um operador que actua de X para Y e $D(\mathcal{B})$ é denso em Y. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são operadores de Noether, $\mathcal{BA}$ é também operador de Noether e $ind(\mathcal{BA}) = ind\,\mathcal{A} + ind\,\mathcal{B}$.*

Teorema 4. *Seja $\mathcal{BA}$ um operador de Noether e $D(\mathcal{B}) \subset R(\mathcal{A})$. Então $\mathcal{B}$ é operador de Noether.*

Teorema 5. *Seja $\mathcal{A}$ definido em X e que actua em Y. $\mathcal{A}$ é normalmente solúvel e $\dim \ker \mathcal{A}^* = n$, se e somente se o espaço Y representa-se na forma de soma directa $\mathrm{Y} = R(\mathcal{A}) \bigoplus M_n$, onde M_n é subespaço finito-dimensional de dimensão n.*

Teorema 6. *Seja $D(\mathcal{A}) \subset \mathrm{X}$, M_n um subespaço n-dimensional de X e $D(\mathcal{A}) \bigcap M_n = \{0\}$. Se $\mathcal{A}$ é um operador de Noether, então a sua extensão linear $\widetilde{\mathcal{A}}$ em $D(\mathcal{A}) \bigoplus M_n$ é também um operador de Noether. Além disso, $ind\widetilde{\mathcal{A}} = ind\mathcal{A} + n$.*

Teorema 7. *Seja $\mathcal{A}$ um operador de Noether definido em X e que actua em $\mathrm{Y}, D(\mathcal{B}) = \mathrm{Y}, \mathcal{BA} : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ é um operador de Noether. Então $\mathcal{B}$ é também operador de Noether .*

Um operador linear $\mathcal{A}$, que actua directamente do produto $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ para Y, é denotado pelo par de operadores $\mathcal{A}_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{Y}$ e $\mathcal{A}_2 : \mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}$ de tal modo que

$$\mathcal{A}\{x_1, x_2\} = \mathcal{A}_1 x_1 + \mathcal{A}_2 x_2, \quad x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2,$$

onde $\mathcal{A}_1 x_1 = \mathcal{A}\{x_1, 0\}$, $\mathcal{A}_2 x_2 = \mathcal{A}\{0, x_2\}$. Tal operador denotaremos por $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$.

O operador linear $\mathcal{A}$, que actua de X sobre um produto directo $\mathrm{Y}_1 \times \mathrm{Y}_2$ é denotado pelo par de operadores $\mathcal{A}_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_1$ e $\mathcal{A}_2 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}_2$ de tal modo que $\mathcal{A}x = \{\mathcal{A}_1 x, \mathcal{A}_2 x\}$, $x \in \mathrm{X}$. Tal operador denotaremos por $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$.

A Teoria Abstracta de Equações Diferenciais Funcionais Lineares usa alguns operadores definidos no produto $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ ou actua sobre este produto. Iremos formular aqui algumas asserções sobre esses operadores conservando, quando possível, a notação de Azbelev.

O operador linear, que actua do produto directo $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ dos espaços de Banach B e $\mathbb{R}^n$ no espaço de Banach D é definido pelo par de operadores lineares $\Lambda : \mathrm{B} \to \mathrm{D}$ e $Y : \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}$,

$$\{\Lambda, Y\}\{z, \beta\} = \Lambda z + Y\beta, \quad z \in \mathrm{B}, \quad \beta \in \mathbb{R}^n.$$

O operador linear, que actua do espaço D sobre o produto directo $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ é definido pelo par de operadores lineares $\delta : \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ e $r : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^n$,

$$[\delta, r]x = \{\delta x, rx\}, \quad x \in \mathrm{D}.$$

Se a norma no espaço $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ é definida de modo adequado, por exemplo,

$$\| \{z, \beta\} \|_{\mathrm{B}\times\mathbb{R}^n} = \| z \|_{\mathrm{B}} + | \beta |,$$

então $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ é espaço de Banach.

Se o operador limitado $\{\Lambda, Y\} : \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}$ é operador inverso do operador limitado $[\delta, r] : \mathrm{D} \to \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$, então

$$x = \Lambda\delta x + Yrx, \quad x \in \mathrm{D}, \tag{1.2}$$

$$\delta(\Lambda z + \mathrm{Y}\beta) = z, \quad r(\Lambda z + \mathrm{Y}\beta) = \beta, \quad \{z, \beta\} \in \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n.$$

Daí, que

$$\Lambda\delta + Yr = I, \quad \delta\Lambda = I, \quad \delta Y = 0, \quad r\Lambda = 0, \quad rY = I.$$

O operador finito-dimensional $Y : \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}$ iremos identificar por $(y_1, ..., y_n)$, $y_i \in \mathrm{D}$,

$$Y\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i\beta^i, \quad \beta = col\{\beta^1, ..., \beta^n\}.$$

Os componentes do vector-funcional r denotaremos por $r^1, ..., r^n$.

Se $l = [l^1, ..., l^m] : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^m$ é um vector-funcional linear, $X = (x_1, ..., x_n)$ é um vector com componentes $x_i \in \mathrm{D}$, então lX denota a matriz de dimensão $m \times n$ com valores do vector-funcional l, com componentes de $X : lX = (l^i x_j)$, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$.

Seja D um espaço de funções absolutamente contínuas $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, L_1 é espaço somável de funções $z : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. O isomorfismo entre o espaço D e o produto $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ pode ser definido por

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t z(s)\, ds + \beta, \quad x \in \mathrm{D}, \quad \{z, \beta\} \in \mathrm{L}_1 \times \mathbb{R}^n.$$

Neste caso,

$$(\Lambda z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t z(s) ds, \quad Y = E, \quad \delta x \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}, \quad rx \stackrel{\text{def}}{=} x(a),$$

onde E é matriz identidade de dimensão $n \times n$.

No caso do espaço W_1^2 de funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ com derivada absolutamente contínua $\dot{x}$, obtemos de modo análogo

$$(\Lambda z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t (t - s) z(s) ds, \quad Y = (1, t - a), \quad \delta x \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}, \quad rx \stackrel{\text{def}}{=} \{x(a), \dot{x}(a)\},$$

se o isomorfismo entre o espaço W_1^2 e $\mathrm{L}_1 \times \mathbb{R}^2$ é definido na base da representação

$$x(t) = \int_a^t (t - s)\, \ddot{x}(s) ds + x(a) + \dot{x}(a)$$

de elementos $x \in \mathrm{W}_1^2$.

Teorema 8. *O operador linear limitado* $\{\Lambda, \mathrm{Y}\} : \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}$ *admite operador inverso limitado, se e somente se as condições seguintes são satisfeitas:*

a) o operador $\Lambda : \mathrm{B} \to \mathrm{D}$ *é noetheriano e* $ind \Lambda = -n$;

b) $dim\, ker\ \Lambda = 0$;

c) se $\lambda^1, ..., \lambda^n$ *é a base para* $ker\ \Lambda^*$ *e* $\lambda = [\lambda^1, ..., \lambda^n]$, $det\ \lambda Y \neq 0$.

Teorema 9. *O operador linear limitado* $[\delta, r] : \mathrm{D} \to \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ *tem o seu inverso limitado, se e somente se as condições seguintes são satisfeitas:*

a) o operador $\delta : \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ *é operador de Noether,* $ind\, \delta = n$;

b) $dim\, ker\ \delta = n$;

c) se $x_1, ..., x_n$ *é a base de* $ker\ \delta$ *e* $X = (x_1, ..., x_n)$, $det\ rX \neq 0$.

1.2 Equação linear e problema linear de fronteira

O problema de Cauchy[1]

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - P(t)x(t) = f(t), \quad x(a) = \alpha, \quad t \in [a, b],$$

é unicamente solúvel para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e f somável se os elementos da matriz P de dimensão $n \times n$ são somáveis. Assim, a representação da solução

$$x(t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds + X(t)\alpha$$

do problema (fórmula de Cauchy), onde X é matriz fundamental tal que $X(a)$ é matriz identidade, é também a representação geral da solução da equação $\mathcal{L}x = f$. A fórmula de Cauchy é a base para a investigação de vários problemas de Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias. O problema de Cauchy para Equações Diferenciais Funcionais não é solúvel no geral, mas alguns problemas de fronteira podem ser solúveis. Portanto, os problemas de fronteira desempenham o mesmo papel na Teoria de Equações Diferenciais Funcionais, como o problema de Cauchy o faz na Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

A equação

$$\mathcal{L}x = f \tag{1.3}$$

chama-se *Equação Diferencial Funcional Linear Abstracta* se $\mathcal{L} : \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ é um operador linear, D e B são espaços de Banach e o espaço D é isomorfo ao produto directo $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ $(\mathrm{D} \simeq \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n)$.

Seja $\mathcal{J} = \{\Lambda, Y\} : \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}$ um isomorfismo linear e $\mathcal{J}^{-1} = [\delta, r]$. Daqui em diante as normas nos espaços $\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ e D são definidas por

$$\| \{z, \beta\} \|_{\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n} = \| z \|_{\mathrm{B}} + | \beta |, \quad \| x \|_{\mathrm{D}} = \| \delta x \|_{\mathrm{B}} + | rx | .$$

Pela definição das normas o isomorfismo $\mathcal{J}$ é isométrico. Logo

$$\| \{\Lambda, Y\} \|_{\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}} = 1, \quad \| [\delta, r] \|_{\mathrm{D} \to \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n} = 1.$$

Assim,

$$\| \Lambda z \|_{\mathrm{D}} = \| \{\Lambda, Y\}\{z, 0\} \|_{\mathrm{D}} \leq \| \{\Lambda, Y\} \| \| \{z, 0\} \|_{\mathrm{B} \times \mathbb{R}^n} = \| z \|_{\mathrm{B}}, \quad \| \Lambda \|_{\mathrm{B} \to \mathrm{D}} = 1.$$

[1]Augustin Louis Cauchy (1789–1857) — matemático francês

Analogamente, $\| Y \|_{\mathbb{R}^n \to \mathrm{D}} = 1$. A seguir tem-se: $\| \delta x \|_{\mathrm{B}} \leq \| x \|_{\mathrm{D}}$ e, se $rx = 0, \| \delta x \|_{\mathrm{B}} = \| x \|_{\mathrm{D}}$. Deste modo $\| \delta \|_{\mathrm{D} \to \mathrm{B}} = 1$. Analogamente, $\| r \|_{\mathrm{D} \to \mathbb{R}^n} = 1$.

Vamos assumir que o operador $\mathcal{L} : \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ é limitado. Aplicando $\mathcal{L}$ para ambos os membros de (1.2), obtém-se a decomposição

$$\mathcal{L}x = Q\delta x + Arx. \tag{1.4}$$

Aqui, $Q = \mathcal{L}\Lambda : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ é a *parte principal*, e $A = \mathcal{L}Y : \mathbb{R}^n \to \mathrm{B}$ é a *parte finito-dimensional* de $\mathcal{L}$.

Como exemplos de (1.3), no caso em que D é espaço de funções absolutamente contínuas e $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e B é o espaço de funções somáveis $z : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, pode-se pegar a equação diferencial ordinária

$$\dot{x}(t) - P(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1.5}$$

onde as colunas da matriz P pertencem à L_1^n, ou uma equação integro-diferencial

$$\dot{x}(t) - \int_a^b H_1(t, s)\dot{x}(s)ds - \int_a^b H(t, s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b]. \tag{1.6}$$

Vamos assumir que os elementos $h_{ij}(t, s)$ da matriz $H(t, s)$ são mensuráveis em $[a, b] \times [a, b]$, as funções $\displaystyle\int_a^b h_{ij}(t, s)ds$ são somáveis em $[a, b]$, o operador integral

$$(H_1 z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b H_1(t, s)z(s)ds$$

de L_1^n em L_1^n é completamente contínuo. Os correspondentes operadores $\mathcal{L}$, para estas equações, têm a forma (1.4), com a representação

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - P(t)\int_a^t \dot{x}(s)ds - P(t)x(a),$$

para (1.5), e

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_a^b \left\{ H_1(t, s) + \int_s^b H(t, \tau)d\tau \right\} \dot{x}(s)ds - \int_a^b H(t, s)ds\, x(a),$$

para (1.6).

Teorema 10. *O operador* $\mathcal{L} : \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ *é noetheriano, se e somente se a parte principal* $Q : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ *de* $\mathcal{L}$ *é operador de Noether. Neste caso* $ind\mathcal{L} = indQ + n$.

Devido ao Teorema 10, a igualdade $ind\mathcal{L} = n$ é equivalente ao facto de que Q é operador Fredholm. O operador $Q : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ é Fredholm, se e somente se é representado na forma $Q = P^{-1} + V$ $(Q = P_1^{-1} + V_1)$, onde P^{-1} é operador inversível limitado de P, V é operador compacto (P_1^{-1} é operador inversível limitado P_1, V_1 é operador finito-dimensional) (vide Kantorovich [9]). O operador $Q = I + V : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ é Fredholm, se certo expoente V^m de V é compacto, o operador $Q = I + V$ chama-se *operador canónico de Fredholm.*

Nos exemplos acima mencionados a parte principal tem a forma $Q = I - \mathcal{K}$, onde $\mathcal{K}$ é operador integral. Para (1.5),

$$(\mathcal{K}z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t P(t)z(s)ds$$

e é um operador compacto. Para (1.6),

$$(\mathcal{K}z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left\{ H_1(t,s) + \int_s^b H(t,\tau)d\tau \right\} z(s)ds.$$

Aqui, $\mathcal{K}^2$ é operador compacto. A propriedade de compacticidade para estes operadores foi demonstrada pelo Professor Doutor V.P. Maksimov.

Teorema 11. *Seja* $\mathcal{L} : \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ *um operador de Noether, ind* $\mathcal{L} = n$. *Então* $\dim\ker\mathcal{L} \geq n$, *e* $\dim\ker\mathcal{L} = n$, *se e somente se a equação (1.3) é solúvel para cada* $f \in \mathrm{B}$.

O vector $X = (x_1, \ldots, x_\nu)$, cujos componentes constituem a base do núcleo de $\mathcal{L}$, chama-se *vector fundamental* da equação $\mathcal{L}x = 0$ e os componentes $x_1, \ldots, x_\nu$ formam o *sistema fundamental* de soluções desta equação. Seja $l = [l^1, \ldots, l^m] : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^m$ um vector-funcional linear limitado, $\alpha = col\ \{\ \alpha^1, \ldots, \alpha^m\ \} \in \mathbb{R}^m$. O sistema

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha \tag{1.7}$$

chama-se *problema linear de fronteira.*

Se $R(\mathcal{L}) = \mathrm{B}$ e $\dim\ker\mathcal{L} = n$, a questão sobre a solubilidade de (1.7) é equivalente a solubilidade do sistema linear de equações algébricas da matriz $lX = (l^i x_j)$, $i = 1, \ldots, m$; $j =$

$1, \ldots, n$. Realmente, a solução geral da equação $\mathcal{L}x = f$ tem a forma

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + v,$$

onde v é solução particular desta equação, $c_1, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias. Assim, o problema (1.7) é solúvel se e somente se o sistema algébrico

$$\sum_{j=1}^{n} l^i x_j c_j = \alpha^i - l^i v, \quad i = 1, \ldots, m,$$

é solúvel em relação à $c_1, \ldots, c_n$. Deste modo, o problema (1.7) tem solução única para cada $f \in$ B, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ se e somente se $m = n$ e $det\ lX \neq 0$. A expressão $det\ lX$ chama-se *determinante do problema* (1.7).

Aplicando o operador l a ambas partes da igualdade (1.2), obtém-se a decomposição

$$lx = \Phi\delta x + \Psi r x, \tag{1.8}$$

onde Φ : B $\to \mathbb{R}^m$ é vector-funcional limitado. A matriz definida pelo operador linear Ψ : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vamos, também, denotar por Ψ.

Lema 1. *O operador* $[\delta, l]$: D $\to$ B $\times \mathbb{R}^m$ *é noetheriano,* $ind[\delta, l] = n - m$.

Reescrevemos o problema (1.8) na forma da equação

$$[\mathcal{L}, l]x = \{f, \alpha\}. \tag{1.9}$$

Teorema 12. *O problema (1.9) é noetheriano se e somente se a parte principal* Q : B $\to$ B *de* $\mathcal{L}$ *é operador de Noether e* $ind\,[\mathcal{L}, l] = ind\, Q + n - m$.

Corolário 1. *O problema (1.9) é Fredholm, se e somente se* $indQ = m - n$.

Vamos assumir que o operador $\mathcal{L}$ é noetheriano, $ind\mathcal{L} = n$ o que significa que Q é operador de Fredholm. Desta suposição e em virtude do Corolário 1, o problema (1.9) é Fredholm, se e somente se $m = n$. Os funcionais $[l^1, \ldots, l^m]$ assumem-se como sendo linearmente independentes.

O caso especial de (1.9), quando $l = r$, chama-se *problema principal de fronteira.* A equação $[\delta, r]x = \{f, \alpha\}$ é o problema com base no isomorfismo $\mathcal{J}^{-1} = [\delta, r]$ entre D e B $\times \mathbb{R}^n$.

Teorema 13. *O problema principal de fronteira*

$$\mathcal{L}x = f, \quad rx = \alpha \tag{1.10}$$

é unicamente solúvel, se e somente se a parte principal $Q : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ *de* $\mathcal{L}$ *tem inverso limitado* $Q^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{B}$.

A solução x, de (1.10), tem a representacção

$$x = \Lambda Q^{-1} f + (Y - \Lambda Q^{-1} A)\alpha. \tag{1.11}$$

De (1.11) pode-se concluir que o vector $X = Y - \Lambda Q^{-1} A$ é fundamental e também $rX = E$ (aqui A denota o vector definido do operador finito-dimensional $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{B}$).

Teorema 14. *As seguintes asserções são equivalentes:*

a) $R(\mathcal{L}) = \mathrm{B}$;

b) $\dim \ker \mathcal{L} = n$;

c) existe um vector-funcional $l : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^n$ *tal que o problema (1.7) é unicamente solúvel para cada* $f \in \mathrm{B}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

1.3 Equações no espaço de funções absolutamente contínuas

Consideramos a seguir uma generalização das equações diferenciais, nomeadamente os sistemas de equações diferenciais funcionais como equações de n-ésima ordem. O fundamento de tal generalização foi investigado no ínicio da década 70 pelos participantes do Seminário de Perm. O interesse original, como tema do Seminário, surgiu no contexto de resolver equações com argumento desviado. Entre numerosas publicações para cada tipo de equações, nenhuma fala da união do ponto de vista de equações com argumento desviado, nem de uma definição aceitável sobre a solução. Vários tipos de equações foram considerados na literatura como uma regra sem conexão entre elas. Para qualquer problema novo, algumas definições próprias sobre a noção da solução foram dadas, e alguns teoremas especiais sobre a unicidade e existência, como também a dependência contínua da solução em relação aos parâmetros do problema foram provados. As tentativas de usar ideias e métodos da Análise Funcional tinham um carácter fragmentado e a aplicação da teoria clássica de equações diferenciais torna-se possível somente em alguns casos exclusivos.

A definição da noção de solução dada por Azbelev e Rakhmatullina conduz fundamentalmente à uma nova concepção de equações com argumento desviado. A concepção foi baseada no operador linear S_h, definido em $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ por

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{se} \quad h(t) \in [a, b], \\ 0, & \text{se} \quad h(t) \notin [a, b], \end{cases}$$

na descrição de equações. Tal concepção provou ser o fundamento da Teoria Moderna de Equações com Argumento Desviado e conduziu à uma generalização útil da equação $\mathcal{L}x = f$, com operador linear $\mathcal{L}$ definido no espaço de Banach de funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas.

Para as funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas, a igualdade

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(s)\, ds + x(a)$$

é válida. Logo, o espaço D de tais funções é isomorfo ao produto directo $\mathrm{L}_1 \times \mathbb{R}^n$, onde L_1 é um espaço de Banach de funções somáveis $z : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ com a norma

$$||z||_{\mathrm{L}_1} = \int_a^b ||z(s)||_{\mathbb{R}^n}\, ds.$$

Se

$$||x||_{\mathrm{D}} = ||\dot{x}||_{\mathrm{L}_1} + ||x(a)||_{\mathbb{R}^n},$$

o espaço D é Banach. O isomorfismo $\mathcal{J} : \mathrm{L}_1 \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}$ neste caso é definido por

$$x(t) = \int_a^t z(s)\, ds + \beta, \quad \{z, \beta\} \in \mathrm{L}_1 \times \mathbb{R}^n. \tag{1.12}$$

Consequentemente, o operador linear $\mathcal{L} : \mathrm{D} \to \mathrm{L}_1$, assim como o vector-funcional linear $l : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^m$ podem ser representados na forma

$$\mathcal{L}x = Q\dot{x} + Ax(a),$$

$$lx = \int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds + \Psi\alpha. \tag{1.13}$$

Aqui, $Q : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1$ é a parte principal de $\mathcal{L}$, que é definida por

$$Q = \mathcal{L}\Lambda, \quad \left((\Lambda z)(t) = \int_a^t z(s)\,ds\right),$$

a parte finita dimensional $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{L}_1$ é definida por $(\mathcal{A}\alpha)(t) = (\mathcal{L}E)(t)\alpha$ (daqui em diante E é a matriz identidade de dimensão $n \times n$), a matriz Φ de dimensão $n \times n$ é mensurável e essencialmente limitada e pode ser construída a partir da igualdade

$$l\left(\int_a^t z(s)\,ds\right) = \int_a^b \Phi(s)z(s)\,ds.$$

Qualquer coluna da matriz Ψ, de dimensão $m \times n$, é resultado da aplicação do vector-funcional l à coluna correspondente da matriz identidade E, $\Psi = lE$.

A teoria geral do parágrafo 1.1 é aplicavél à equação diferencial $\mathcal{L}x = f$ com operador linear $\mathcal{L} : \mathrm{D} \to \mathrm{L}_1$, se $\mathcal{L}$ é limitado, Noether, *ind* $\mathcal{L} = n$ ou, que é o mesmo, a parte principal do operador $Q = \mathcal{L}\Lambda : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1$ de $\mathcal{L}$ é Fredholm.

A equação diferencial

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + P(t)x(t) = f(t),$$

com colunas da matriz P de dimensão $n \times n$ de L_1, como também a generalização da equação na forma

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + \int_a^b d_sR(t,s)x(s) = f(t), \tag{1.14}$$

sob consideração de que os elementos $r_{ij}(t,s)$ da matriz $R(t,s)$ de dimensão $n \times n$ são mensuráveis no quadrado $[a,b] \times [a,b]$, as funções $r_{ij}(\cdot,s)$ para cada $s \in [a,b]$ e as $\operatorname*{var}_{s\in[a,b]} r_{ij}(\cdot,s)$ são somáveis em $[a,b]$, $R(t,b) \equiv 0$, são representantes da equação $\mathcal{L}x = f$ com operador de Fredholm $\mathcal{L}\Lambda$.

Sob as suposições acima, os operadores $T : \mathrm{D} \to \mathrm{L}_1$ e $\mathcal{R} : \mathrm{L}_\infty \to \mathrm{L}_\infty$ definidos por

$$(Tx)(t) = \int_a^b d_sR(t,s)x(s), \tag{1.15}$$

$$(\mathcal{R}z)(t) = \int_a^b R(t,s)z(s)\,ds, \tag{1.16}$$

são compactos.

A equação (1.14) passa a ter a forma

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - \int_a^b R(t,s)\dot{x}(s)\,ds - R(t,a)x(a) = f(t),$$

depois da integração por partes do integral de Stiltjes[2]. Assim, a parte principal do operador linear $\mathcal{L} : \mathrm{D} \to \mathrm{L}_1$ tem a forma

$$Qz = z - \mathcal{R}z.$$

Se o isomorfismo $\mathcal{J} : \mathrm{L}_1 \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{D}$ é definido por (1.12), o problema de fronteira para a equação $\mathcal{L}x = f$ é o problema de Cauchy :

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx \stackrel{\text{def}}{=} x(a) = \alpha.$$

Em virtude do Teorema 13, este problema é unicamente solúvel se e somente se a parte principal Q de $\mathcal{L}$ tem inverso limitado $Q^{-1} : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1$. Além disso, a solução do problema (a solução geral da equação) tem a forma

$$x(t) = \int_a^t (Q^{-1}f)(s)\,ds + \left[E - \int_a^t (Q^{-1}A)(s)\,ds\right]\alpha = (Gf)(t) + (X\alpha)(t).$$

Aqui $A = \mathcal{L}E$. A existência do operador inverso Q^{-1} é equivalente à solubilidade da equação $z = \mathcal{R}z + f$ no espaço L_1. Logo, ela é unicamente solúvel. Então,

$$(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int_a^b H(t,s)f(s)\,ds.$$

Assim, a solução do problema de Cauchy da equação (1.14), com $x(a) = 0$, é definida por

$$x(t) = (\mathcal{G}f)(t) = \int_a^t \left[f(s) + \int_a^b H(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\right] ds.$$

Mudando a ordem de integração no integral

$$\int_a^t \left\{\int_a^b H(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\right\} ds$$

obtém-se a representação do operador de Green:

$$(\mathcal{G}f)(t) = \int_a^b \left[\chi(t,s)E + \int_a^t H(\tau,s)\,d\tau\right] f(s)\,ds,$$

[2]Thomas Jan Stiltjes (1856—1894) — matemático holandês

onde $\chi(t,s)$ é a função característica do triângulo $a \leq s \leq t \leq b$. Assim,

$$G(t,s) = \chi(t,s)E + \int_a^t H(\tau,s)\,d\tau. \tag{1.17}$$

Existe extensa literatura, nas últimas décadas, devotada a equações com argumento desviado. A equação

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + P(t)x[h(t)] = v(t), \quad t \in [a,b], \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \ \text{se} \quad \xi \notin [a,b], \end{gathered} \tag{1.18}$$

é a generalização desta equação. A segunda linha em (1.18) é necessária de modo a determinar o valor de $x[h(t)]$, quando alguns valores de h não pertencem a $[a,b]$. A função dada φ é chamada função inicial. Reescrevendo a equação (1.18) na forma $\mathcal{L}x = f$ com operador linear $\mathcal{L}$, introduzimos as notações

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} x[h(t)], & \text{se} \quad h(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{se} \quad h(t) \notin [a,b], \end{cases} \quad \varphi^h(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad h(t) \in [a,b], \\ \varphi[h(t)], & \text{se} \quad h(t) \notin [a,b]. \end{cases} \tag{1.19}$$

Então, (1.18) passa a forma

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + P(t)(S_h x)(t) = f(t),$$

onde $f(t) = v(t) - P(t)\varphi^h(t)$. Uma vez que

$$P(t)(S_h x)(t) = \int_a^b d_s R(t,s)x(s),$$

se $R(t,s) = -P(t)\chi_h(t,s)$, onde $\chi_h(t,s)$ é a função característica do conjunto

$$\{(t,s) \in [a,b] \times [a,b] : a \leq s \leq h(t) < b\} \cup \{(t,s) \in [a,b] \times [a,b) : h(t) = b\},$$

a equação (1.18) é da forma (1.14), se os elementos da matriz P de dimensão $n \times n$ são somáveis e $h : [a,b] \to \mathbb{R}^1$ é mensurável. O valor do operador de composição S_h, em função de x algumas vezes é designada por x_h e reescreve-se a equação (1.18) na forma

$$\dot{x}(t) + P(t)x_h(t) = f(t).$$

Autores de numerosos artigos e monografias definem a solução da equação (1.18) como sendo o prolongamento contínuo em $[a,b]$ da função inicial φ na extremidade da equação. Mais precisamente, define-se a solução da equação (1.18) como sendo a função $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ absolutamente contínua satisfazendo a equação e as condições de fronteira $x(a) = \varphi(a)$, $x(b) = \varphi(b)$. Neste caso o número de condições de fronteira é $m = 2n > n$. O problema

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(a) = \varphi(a), \quad x(b) = \varphi(b) \tag{1.20}$$

não é Fredholm e, consequentemente, o critério de solubilidade não é verificável no geral. A exigência de acoplagem contínua das condições $x(a) = \varphi(a)$, $x(b) = \varphi(b)$ criou diversas dificuldades na tentativa de generalizar a teoria da equação (1.18) mesmo no caso $h(t) \leq t$, quando (1.20) torna-se um problema de Cauchy, como também na resolução de vários problemas aplicados relacionados com a equação (1.18). Começando com o trabalho de Azbelev (1970a), Azbelev e Rakhmatullina (1970), os participantes do Seminário de Tambov ignoraram as exigência de acoplagem contínua, introduzindo o operador de sobreposição definido em (1.19) e começaram a usar a forma (1.14) para a equação (1.18). Como resultado, os fundamentos da Teoria Moderna de Equações com Argumento Desviado ficou concluído nos meados dos anos 70. O problema de fronteira tem sido ponto central nesta teoria.

1.4 Avaliação do raio espectral dum operador linear no espaço de funções contínuas

Consideremos o problema sobre a avaliação do raio espectral $\rho(\mathcal{A})$ do operador linear $\mathcal{A}$ no espaço C de funções contínuas $x : [a,b] \to \mathbb{R}^1$, $||x||_{\mathrm{C}} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$. Uma vez que $\rho(\mathcal{A}) < 1$ se $\| \mathcal{A} \|_{\mathrm{C}\to\mathrm{C}} < 1$, para um operador isotónico $\mathcal{A}$ com avaliação $\rho(\mathcal{A}) < 1$ segue que

$$\| \mathcal{A} \|_{\mathrm{C}\to\mathrm{C}} = \max_{t\in[a,b]} (\mathcal{A}[1])(t) < 1.$$

Lema 2. *Seja $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ um operador linear isotónico. A avaliação $\rho(\mathcal{A}) < 1$ é válida se e somente se existe um $v \in \mathrm{C}$ tal que*

$$v(t) > 0, \quad r(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) - (\mathcal{A}v)(t) > 0, \quad t \in [a,b].$$

O requisito das desigualdades estritas $v(t) > 0$, $r(t) > 0$ em todo intervalo $[a, b]$ envolve algumas dificuldades nas aplicações do Lema 2, por exemplo, problemas de fronteira com diversos pontos. Assim, é natural que alguns trabalhos (vide, por exemplo, Islamov (1978), Azbelev e Domoshnitskiĭ(1986), Korytova (1992)) têm falado das fragilidades das condições do Lema 2 (O Teorema de Islamov (vide Islamov (1992) cobre os resultados prévios). Mas, estudando o referido trabalho exige-se conhecimentos sofisticados da teoria de funções, e ocasionalmente é difícil provar as condições do teorema de Islamov. Por outro lado o teorema assume uma compacticidade fraca do operador $\mathcal{A}$ o que impede a aplicação de alguns problemas singulares. A seguir são dadas algumas asserções adicionais ao teorema de Islamov.

Diz-se que o operador linear $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ possui *a propriedade* M, se $(\mathcal{A}x)(t) > 0, \ t \in [a, b]$ para cada $x \in \mathrm{C}$ tal que $x(t) \geq 0, \ x(t) \not\equiv 0$.

Se o operador $\mathcal{A}$ possui a propriedade M, algumas condições no que respeita ao defeito r pode ser fragilizado como mostra o teorema a seguir. Note-se que as desigualdades $v(t) \geq 0$ e $r(t) \geq 0$, neste caso implica que $v(t) > 0$ em $[a, b]$. Portanto, a propriedade M não permite fragilizar as condições do Lema 2 no que respeita a desigualdade $v(t) > 0$.

Teorema 15. *Seja* $A : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ *um operador linear limitado que possui a propriedade* M. *Então,* $\rho(\mathcal{A}) < 1$ *se e somente se existe* $v \in \mathrm{C}$ *tal que*

$$v(t) > 0, \quad r(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) - (Av)(t) \geq 0, \quad r(t) \not\equiv 0, \quad t \in [a, b].$$

Diz-se que o operador linear $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ possui *a propriedade* N, se existe um número finito de pontos $\nu_1, \ldots, \nu_m \in [a, b]$ tal, que $(\mathcal{A}x)(\nu_i) = 0, \ i = 1, \ldots, m$, para cada $x \in \mathrm{C}$.

Teorema 16. *Seja* $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ *um operador linear limitado isotónico que possui a propriedade* N. *Então,* $\rho(\mathcal{A}) < 1$ *se e somente se existe* $v \in \mathrm{C}$ *tal que*

$$v(t) > 0, \quad r(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) - (Av)(t) > 0, \quad t \in [a, b] \setminus \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}.$$

Diz-se que o operador linear $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ possui *a propriedade* MN, se possui a propriedade N e $(\mathcal{A}x)(t) > 0, \ t \in [a, b] \setminus \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ para cada $x \in \mathrm{C}$ tal que $x(t) \geq 0, \ x(t) \not\equiv 0$.

Teorema 17. *Seja $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ um operador linear limitado que possui a propriedade MN. Então, $\rho(\mathcal{A}) < 1$ se e somente se existe $v \in \mathrm{C}$ tal que*

$$v(t) > 0, \quad r(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) - (Av)(t) \geq 0, \quad r(t) \not\equiv 0, \quad t \in [a,b] \setminus \{\nu_1, \ldots, \nu_m\}.$$

Consideremos algumas avaliações da solução da equação

$$x + \mathcal{A}x = f. \tag{1.21}$$

Teorema 18. *Seja $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ um operador linear limitado isotónico, $f \in \mathrm{C}, \theta = f - \mathcal{A}f$. Considere-se que se cumprem as condições seguintes:*

1) $f(t) > 0,\ \theta(t) > 0,\ t \in [a,b]$;

2) o operador $\mathcal{A}$ possui a propriedade M e $f(t) > 0,\ \theta(t) \geq 0,\ \theta(t) \not\equiv 0,\ t \in [a,b]$;

3) o operador $\mathcal{A}$ possui a propriedade N e $f(t) > 0,\ \theta(t) > 0,\ t \in [a,b] \setminus \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$;

4) o operador $\mathcal{A}$ possui a propriedade MN e $f(t) > 0,\ \theta(t) \geq 0,\ \theta(t) \not\equiv 0,\ t \in [a,b] \setminus \{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$.

Então a equação (1.21) tem solução única $x \in \mathrm{C}$ e para a solução $x(t)$ a avaliação

$$f(t) - (Af)(t) \leq x(t) \leq f(t), \quad t \in [a,b],$$

cumpre-se.

Capítulo 2

CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS FUNCIONAIS

2.1 O espaço com peso L_1^u

Seja $u : [0,1] \mapsto [0,\infty[$ uma função mensurável. Vamos definir o espaço L_1^u de classe de funções mensuráveis $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^1$ do seguinte modo: $x \in L_1^u$ se $xu \in L_1$.

A norma em L_1^u definimos como $\| x \|_{L_1^u} = \| xu \|_{L_1}$. Vamos supôr, também, que

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{a \le t \le b} u(t) < \infty, \quad u(t) > 0,$$

para qualquer segmento $[a,b] \subset (0,1)$.

Lema 3. *Sejam $L_1^{u_1}$ e $L_1^{u_2}$ dois espaços gerados pelas funções u_1 e u_2, respectivamente, e suponhamos que cumpre-se a desigualdade*

$$N_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{a \le t \le b} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} < \infty.$$

Então, o espaço $L_1^{u_1}$ está continuamente incluído no espaço $L_1^{u_2}$ e

$$\| x \|_{L_1^{u_2}} \le N_{21} \| x \|_{L_1^{u_1}}, \tag{2.1}$$

para qualquer $x \in L_1^{u_1}$.

Demonstração. Seja $x \in L_1^{u_1}$. Mostremos que $x \in L_1^{u_2}$ e cumpre-se a desigualdade (2.1).

Realmente,

$$\| x \|_{L_1^{u_2}} = \| xu_2 \|_{L_1} = \int_0^1 |xu_2| dt = \int_0^1 \left| xu_1 \frac{u_2}{u_1} \right| dt =$$

$$= \int_0^1 | xu_1 | \left| \frac{u_2}{u_1} \right| dt \leq \int_0^1 | xu_1 | dt \cdot \operatorname*{vrai\,sup}_{0\leq t\leq 1} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = N_{21} \| x \|_{L_1^{u_2}} .$$

Logo, $\| x \|_{L_1^{u_2}} \leq N_{21} \| x \|_{L_1^{u_1}}$. □

Lema 4. *Suponhamos que, para além das condições do Lema 3, cumpre-se também a desigualdade*

$$N_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{0\leq t\leq 1} \frac{u_1(t)}{u_2(t)} < \infty.$$

Então, os espaços $L_1^{u_1}$ *e* $L_1^{u_2}$ *coincidem, isto é, eles coincidem como conjuntos e as suas normas são equivalentes:*

$$\frac{1}{N_{12}} \| x \|_{L_1^{u_1}} \leq \| x \|_{L_1^{u_2}} \leq N_{21} \| x \|_{L_1^{u_1}}, \tag{2.2}$$

qualquer que seja $x \in L_1^{u_2}$

Demonstração. Se as condições do Lema 3 cumprem-se, então tem lugar a desigualdade

$$\| x \|_{L_1^{u_2}} \leq N_{21} \| x \|_{L_1^{u_1}} .$$

Para obtermos (2.2) basta, agora, mostrar o cumprimento da desigualdade

$$\frac{1}{N_{12}} \| x \|_{L_1^{u_1}} \leq \| x \|_{L_1^{u_2}},$$

isto é, que $L_1^{u_2} \subset L_1^{u_1}$. Seja $x \in L_1^{u_2}$, então

$$\| x \|_{L_1^{u_1}} = \| xu_1 \|_{L_1} = \left\| xu_2 \frac{u_1}{u_2} \right\|_{L_1} \leq \| xu_2 \|_{L_1} \cdot \operatorname*{vrai\,sup}_{0\leq t\leq 1} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = N_{12} \| x \|_{L_1^{u_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N_{12}} \| x \|_{L_1^{u_1}} \leq \| x \|_{L_1^{u_2}} . \quad \square$$

Lema 5. *Suponhamos que se cumprem as seguintes desigualdades*

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{a\leq t\leq b} u(t) < \infty, \quad N \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{a\leq t\leq b} u(t) > 0.$$

Então, o espaço L_1^u *coincide com o espaço* L_1 *e as suas normas são equivalentes:*

$$N \| x \|_{L_1^u} \leq \| x \|_{L_1} \leq M \| x \|_{L_1^u} .$$

Demonstração. De modo análogo ao Lema 4, bastando considerar $u \equiv u_1$ e $1 \equiv u_2$. □

Lema 6. *O espaço* L_1^u *é Banach.*

Demonstração. É evidente que L_1^u é um espaço linear e normado. Vamos mostrar que ele é completo.

Seja $\{x_n\}$ uma sucessão fundamental em L_1^u, isto é,

$$\| x_n - x_m \|_{\mathrm{L}_1^u} \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Então, podemos achar uma sucessão de índices n_k tais, que

$$\| x_{nk} - x_{nk+1} \|_{\mathrm{L}_1^u} = \int_0^1 \mid [x_{nk}(t) - x_{nk+1}(t)]u(t) \mid dt \leq \frac{1}{2^k}.$$

Desta desigualdade e do Teorema de Lévy[1] advém que a série

$$\mid x_{n1} \mid + \mid x_{n2} - x_{n1} \mid + \cdots$$

converge em quase todo [0,1]. Então, a série

$$\mid x_{n1} \mid + \mid x_{n2} - x_{n1} \mid + \cdots$$

converge em quase todo $[0,1]$ para uma certa função $x(t) = \lim\limits_{n \to \infty} x_{nk}(t)$. Deste modo, a sucessão fundamental em L_1^u contém uma subsucessão que converge em quase todo [0,1].

Vamos mostrar que a subsucessão $\{x_{nk}(t)\}$ converge para a mesma função $x(t)$, segundo a norma do espaço L_1^u. Devido ao facto de que a sucessão $\{x_n\}$ é fundamental, para qualquer $\epsilon > 0$ e para valores enormes de k e l temos $\int_0^1 \mid (x_{nk}(t) - x_{nl})u(t) \mid dt < \epsilon$.

De acordo com o Teorema de Fatou[2], nesta desigualdade podemos fazer a transição do limite sob sinal do integral, quando $l \to \infty$. Obtemos

$$\int_0^1 \mid (x_{nk}(t) - x_{nl})u(t) \mid dt < \epsilon,$$

[1]Hyman Lévy (1886-1975)—matemático inglês

[2]Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) — matemático francês

donde advém, que $x \in \mathrm{L}_1^u$ e que $x_{nk} \to x$. Mas o facto de que uma subsucessão converge para um certo limite, implica que a própria sucessão converge para este mesmo limite. □

2.2 O espaço D^t

Vamos definir o espaço D^t como sendo uma classe de funções equivalentes $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$ mensuráveis tais que:

1) x é contínua em $[0,1]$, $\quad x(0) = 0$;

2) $\dot{x}$ é absolutamente contínua em [0,1];

3) $\ddot{x}$ pertence ao espaço L_1^t.

A igualdade

$$x(t) = \int_0^t (t-s)z(s)ds + \beta t,$$

para cada par $\{z, \beta\} \in \mathrm{L}_1^t \times \mathbb{R}^1$, define o elemento do espaço D^t, que é isomorfo ao espaço $\mathrm{L}_1^t \times \mathbb{R}^1$. Os isomorfismos $\mathcal{J}^{-1} : \mathrm{L}_1^t \times \mathbb{R}^1 \to \mathrm{D}^t$ e $\mathcal{J}^{-1} : \mathrm{D}^t \to \mathrm{L}_1^t \times \mathbb{R}^1$ definimos pelas igualdades $\mathcal{J} = \{\Lambda, Y\}, \mathcal{J}^{-1} = [\delta, r]$, onde

$$(\Lambda z)(t) = \int_0^t (t-s)z(s)ds, \quad Y\beta = \beta t, \quad \delta x = \ddot{x}, \quad rx = \dot{x}(0).$$

Lema 7. *O espaço* D^t *é Banach .*

Demonstração. Advém do facto de que D^t é isomorfo ao produto $\mathrm{L}_1^t \times \mathbb{R}^1$, onde L_1^t e $\mathbb{R}^1$ são espaços de Banach. □

2.3 O espaço $\mathrm{B}_1^{t^2,t}$

Seja $\mathrm{B}_1^{t^2}$ o espaço de funções mensuráveis equivalentes $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$ tais, que para cada $x \in \mathrm{B}_1^{t^2}$ existe uma constante $M_x \geq 0$ para a qual cumpre-se a desigualdade

$$\int_0^t \mid x(s) \mid ds \leq M_x t^2.$$

A norma em $\mathrm{B}_1^{t^2}$ definimos do seguinte modo:

$$\| x \|_{\mathrm{B}_1^{t^2}} = \operatorname*{vrai\,sup}_{0 \leq t \leq 1} \frac{1}{t^2} \int_0^1 \mid x(s) \mid ds.$$

Lema 8. *O espaço $\mathrm{B}_1^{t^2}$ é Banach .*

Demonstração. De modo análogo ao Lema 7. □

Lema 9. *O espaço $\mathrm{B}_1^{t^2}$ está continuamente incluído no espaço L_1 e $\| x \|_{\mathrm{L}_1} \leq \| x \|_{\mathrm{B}_1^{t^2}}$, qualquer que seja $x \in \mathrm{B}_1^{t^2}$.*

Demonstração. Temos $\operatorname*{vrai\,sup}_{0 \leq t \leq 1} t^2 = 1$ e encontramo-nos nas condições do Lema 3. □

Vamos introduzir o espaço com peso $\mathrm{B}_1^{t^2,t}$, de funções mensuráveis $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$, tal que $xt \in \mathrm{B}_1^{t^2}$. Colocamos $\| x \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}} = \| xt \|_{\mathrm{B}_1^{t^2}}$.

2.4 O espaço de soluções $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$

Seja $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$ o espaço de funções $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$ tais, que:

1) x é contínua em [0,1], sendo $x(0) = 0$;

2) $\dot{x}$ é absolutamente contínua em [0,1];

3) $\ddot{x}$ pertence ao espaço $\mathrm{B}_1^{t^2,t}$.

A igualdade

$$x(t) = \int_0^t (t-s)z(s)ds + \beta t,$$

para cada $\{z, \beta\} \in \mathrm{B}_1^{t^2,t} \times \mathbb{R}^1$ define o elemento do espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$, que é isomorfo ao espaço $\mathrm{B}_1^{t^2,t} \times \mathbb{R}^1$. Os isomorfismos definimos de modo análogo como no parágrafo 2.2

A norma em $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$ definimos segundo a igualdade

$$\| x \|_{\mathrm{D}_1^{t^2,t}} = \| \ddot{x} \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}} + | \dot{x}(0) | . \tag{2.3}$$

O espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$, com a norma (2.3), é um espaço de Banach .

Capítulo 3

REGULARIZAÇÃO DO PROBLEMA SINGULAR

3.1 Problema singular no espaço $D_1^{t^2,t}$

Vejamos o problema linear de fronteira

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) + \dfrac{\dot{x}(t)}{t} - \dfrac{x(t)}{t^2} = f(t), \quad t \in [a,b], \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha. \end{cases} \tag{3.1}$$

A imagem do operador $\mathcal{L}_0$, quando actua em funções diferentes de zero no ponto $t = 0$ (por exemplo $x(t) = 1$), não pertence ao espaço de funções somáveis. Assim, vamos estudar a equação $\mathcal{L}x = f$ no espaço onde tais funções não existem. Vamos investigar o problema (3.1) no espaço $D_1^{t^2,t} \simeq B_1^{t^2,t} \times \mathbb{R}^1$.

A parte principal do operador $\mathcal{L}_0 : D_1^{t^2,t} \to B_1^{t^2,t}$ é

$$(Qz)(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}_0 \Lambda z)(t) = z(t) + (\mathcal{K}z)(t),$$

onde $(\mathcal{K}z)(t) = \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^t sz(s)ds$. Se considerarmos $\mathcal{K} : L_1 \to L_1$, vemos que ele não é limitado. Vamos estudar $\mathcal{K}$ como operador que actua de $B_1^{t^2,t}$ em $B_1^{t^2,t}$.

Lema 10. *O operador* $\mathcal{K} : B_1^{t^2,t} \to B_1^{t^2,t}$ *é limitado.*

Demonstração. Realmente, seja $z \in \mathrm{B}_1^{t^2,t}$

$$|\ (\mathcal{K}z)(s)\ |= \left|\frac{1}{s^2}\int_0^s \tau z(\tau)d\tau\right| \leq \frac{1}{s^2}\int_0^s |\ \tau z(\tau)\ |\ d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\ (\mathcal{K}z)(s)\ |\leq \operatorname*{vrai\,sup}_{0\leq s\leq 1}\frac{1}{s^2}\int_0^1 \tau\ |\ z(\tau)\ |d(\tau) =\|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\ |\ (\mathcal{K}z)(s)\ |\leq s\ \|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\Rightarrow \int_0^t s\ |\ (\mathcal{K}z)(s)\ |\ ds \leq$$

$$\leq\|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\int_0^t sds \Rightarrow \frac{1}{t^2}\int_0^t s\ |\ (\mathcal{K}z)(s)\ |\ ds \leq\ \ \|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\frac{1}{t^2}\int_0^t s\,ds =$$

$$=\|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\frac{1}{t^2}\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\ \|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\Rightarrow \operatorname*{vrai\,sup}_{0\leq s\leq 1}\frac{1}{t^2}\int_0^t s\ |\ (\mathcal{K}z)(s)\ |\ ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\ \|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\Rightarrow\|\ \mathcal{K}z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\leq \frac{1}{2}\ \|\ z\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\Rightarrow\|\ \mathcal{K}\ \|_{\mathrm{B}_1^{t^2,t}\to\mathrm{B}_1^{t^2,t}}\leq \frac{1}{2}.\quad \square$$

O operador $Q : \mathrm{B}_1^{t^2,t} \to \mathrm{B}_1^{t^2,t}$ admite um inverso limitado $(Q^{-1}z)(t) = z(t) - \frac{1}{t^3}\int_0^t s^2 z(s)ds$. Assim, o problema $\mathcal{L}_0 x = f,\ \dot{x}(0) = \alpha$ é unicamente solúvel, o sistema fundamental de soluções, no espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$ é $x(t) = t$

A solução do problema (3.1) no espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$ tem representação $x = \mathcal{W}f + \alpha t$, onde $(\mathcal{W}f)(t) = \int_0^1 W(t,s)f(s)ds$,

$$W(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{s^2(1-t^2)}{2t}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \\ -\dfrac{t(1-s^2)}{2}, & 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases}$$

3.2 Teorema do tipo Vallée-Poussin

Um lugar exclusivo da Teoria de Equações Diferenciais

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) + q(t)\dot{x}(t) + p(t)x(t) = 0$$

é ocupado pelo intervalo $[a, b]$ no qual qualquer solução não trivial não possui mais do que um zero. Tal intervalo chama-se *intervalo de não-oscilação (da solução $\mathcal{L}x = 0$).*

Do teorema sobre separação dos zeros da solução para $\mathcal{L}x = 0$ segue que $[a, b]$ é intervalo de não-oscilação se e somente se, existe uma solução positiva para $\mathcal{L}x = 0$ em $[a, b]$.

Critério Vallé Poussin[1]. *O intervalo $[a, b]$ é intervalo de não-oscilação para $\mathcal{L}x = 0$ se e somente se, existe a função $v : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ com derivadas absolutamente contínuas $\dot{v}$ tal que*

$$v(t) \geq 0, \quad (\mathcal{L}v)(t) \leq 0 \quad \text{para } t \in [a, b], \quad v(a) + v(b) - \int_a^b (\mathcal{L}v)(s)\, ds > 0.$$

A escolha apropriada da função de comparação v permite obter a base do critério de Vallée-Poussin para estimativa do comprimento do intervalo de não-oscilação.

O interesse pelo intervalo de não-oscilação pode explicar-se pela correlação entre a existência de uma solução positiva e muitos problemas actuais. Tal correlação é mostrada no seguinte teorema.

Teorema 19. *As seguintes asserções são equivalentes:*

a) $[a, b]$ é intervalo de não-oscilação;

b) existe um $v : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ com derivadas absolutamente contínua $\dot{v}$ tal que

$$v(t) \geq 0, \quad (\mathcal{L}v)(t) \leq 0, \quad t \in [a, b], \ v(a) + v(b) - \int_a^b (\mathcal{L}v)(s)\, ds > 0;$$

c) a função de Cauchy $C(t, s)$ da equação $\mathcal{L}x = f$ é estritamente positiva no triângulo $a \leq s < t \leq b$;

d) o problema de fronteira

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0$$

[1] Charles Joseph de la Vallée Poussin (1866–1962) — matemático francês

é unicamente solúvel para cada f somável, e a função de Green para este problema é estritamente negativa no quadrado $(a,b)\times(a,b)$.

As equivalências a) e c) foram estabelecidas por J.E.Wilkins (1947). As equivalências a) e d) foram estabelecidas por S.A.Pack (1963). Uma larga série de investigações levadas à cabo por diversos autores têm devotado uma generalização deste teorema para equações de ordem superior e equações diferenciais com retardamento. Mais adiante damos uma formulação geral na base da qual é possível provar algumas variantes de teoremas tipo Vallée-Poussin para uma larga classe de equações diferenciais funcionais.

Seja B um espaço de Banach de funções mensuráveis $z:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, C um espaço de Banach de funções contínuas $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, D um espaço de Banach de $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ isomorfo ao produto directo $\mathrm{B}\times\mathbb{R}^n$ e além disso os elementos de D são contínuos em $[a,b]$. Consideremos o problema de fronteira

$$\mathcal{L}x=f,\quad lx=\alpha \tag{3.2}$$

e as suposições seguintes: o operador linear $\mathcal{L}:\mathrm{D}\to\mathrm{B}$ é limitado, noetheriano, $ind\,\mathcal{L}=n$; os componentes $l^1,\ldots,l^n$ do vector-funcional $l=[l^1,\ldots,l^n]$ são funcionais lineares limitados do espaço D. Se existem funcionais entre l^i tal que $l^ix=x(\nu_i)$, $\nu_i\in[a,b]$, o conjunto de pontos correspondentes ν_i denotamos por $\{\nu\}$; por outro lado o símbolo $\{\nu\}$ indica o conjunto vazio.

Vamos voltar a assumir que tem lugar a decomposição $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0-T$, onde $T:\mathrm{C}\to\mathrm{B}$ é limitado e isotónico (antitónico) e o operador linear $\mathcal{L}_0:\mathrm{D}\to\mathrm{B}$ possui as seguintes propriedades:

1) o problema de fronteira

$$\mathcal{L}_0x=f,\quad lx=\alpha$$

tem solução única $x\in\mathrm{D}$ para cada $\{f,\alpha\}\in\mathrm{B}\times\mathbb{R}^n$ e além disso o operador de Green $\mathcal{W}$ para este problema é isotónico;

2) existe $\psi\in\mathrm{B}$ tal que $\psi(t)\geq 0$ $(\psi(t)\leq 0)$ quase em todo $[a,b]$ e $(\mathcal{W}\psi)(t)>0$ para $t\in[a,b]\setminus\{\nu\}$;

3) existe uma solução positiva u_0 $(u_0(t)>0$ para $t\in[a,b]\setminus\{\nu\})$ para a equação homogénea $\mathcal{L}_0x=0$.

Para todas as propriedades nota-se que em alguns casos as propriedades 1 e 3 são equivalentes. Por exemplo, no caso do problema

$$\ddot{x}(t) + p(t)x(t) = f(t), \quad x(a) = \alpha^1, \quad x(b) = \alpha^2$$

tal equivalência advém do Teorema 19. Em casos gerais tal conexão pode não ser necessária como mostra o exemplo do problema

$$\ddot{x}(t) + x(t) = f(t), \quad x\left(\frac{b-a}{2}\right) = \alpha^1, \quad \dot{x}\left(\frac{b-a}{2}\right) = \alpha^2,$$

se $\pi < b - a < 2\pi$. Realmente, a solução $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ é não positiva em $[a, b]$, se $b - a > \pi$. Mas o operador de Green é isotónico, porque a função de Green $W(t, s)$ é definida por

$$W(t,s) = \begin{cases} \sin(t-s), & \text{se } \dfrac{b-a}{2} \le s \le t \le b, \\ \sin(s-t), & \text{se } a \le t < s \le \dfrac{b-a}{2}, \\ 0 & \text{nos outros pontos do quadrado } [a,b] \times [a,b]. \end{cases}$$

A condição 2 cumpre-se, por exemplo, se o operador de Green $\mathcal{W}$ actua do espaço W_1^n de funções com derivada até ordem $(n-1)$ absolutamente contínuas, sobre o espaço L_1 de funções somáveis. Neste caso,

$$(\mathcal{W}f)(t) = \int_a^b W(t,s) f(s)\, ds$$

e na qualidade de $\psi \in \mathrm{L}_1$, podemos pegar qualquer um tal que $\psi(t) > 0$ $(\psi(t) < 0)$ em quase todo $[a, b]$. Realmente para cada ψ a igualdade $(\mathcal{W}\psi)(\tau) = 0$ é possível somente para $\tau \in \{\nu\}$.

É relevante notar que a condição 2 não se cumpre para todo operador integral de Green: se $\mathcal{W} : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{D}$, $\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{W}_1^2 : x(\xi) = 0,\ \xi \in [a, b]\}$, a igualdade $(\mathcal{W}f)(\xi) = 0$ tem lugar para qualquer $f \in \mathrm{L}_1$.

Denotemos $\mathcal{A} = \mathcal{W}T$. O problema (3.2) é equivalente a equação

$$x = \mathcal{A}x + y, \tag{3.3}$$

onde y é a solução do problema modelo $\mathcal{L}_0 x = f$, $lx = \alpha$. A equação deve ser considerada no espaço C desde que os valores de $\mathcal{A}$ em funções contínuas pertencem a D. Denota-se por $\rho(\mathcal{A})$ o raio espectral de $\mathcal{A} : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$.

Teorema 20. *As asserções seguintes são equivalentes:*

a) existe $v \in \mathrm{D}$ *tal que*

$$v(t) > 0, \quad r(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{W}\varphi)(t) + g(t) > 0, \quad t \in [a,b] \setminus \{\nu\},$$

onde $\varphi = \mathcal{L}v$, g *é solução do problema semi-homogéneo*

$$\mathcal{L}_0 x = 0, \quad lx = lv;$$

b) $\rho(A) < 1$;

c) o problema (3.3) tem solução única $x \in \mathrm{D}$ *para cada* $\{f, \alpha\} \in \mathrm{B} \times \mathbb{R}^n$ *e, por outro lado, o operador de Green* $\mathcal{G}$ *para este problema é isotónico (antitónico);*

d) a equação homogénea $\mathcal{L}x = 0$ *tem solução positiva* u $(u(t) > 0$ *para* $t \in [a,b] \setminus \{\nu\})$ *tal que* $lu = lu_0$.

Observação 1. *Se* $\mathcal{W}$ *e* $\mathcal{G}$ *são operadores integrais, a lista de asserções equivalentes ao Teorema 19 pode ser adicionada ao facto* $G(t,s) \geq W(t,s)$ $(G(t,s) \leq W(t,s))$, *onde* $W(t,s)$ *e* $G(t,s)$ *formam os núcleos dos operadores integrais.*

Observação 2. *No caso de equações diferenciais de segunda ordem, a asserção d) no caso de existência de solução positiva é equivalente a asserção de não-oscilação.*

Lema 11. *As asserções seguintes são equivalentes:*

a) $[a,b]$ *é um intervalo de não-oscilação para* $\mathcal{L}x = 0$;

b) a função de Cauchy $C(t,s)$ *da equação* $\mathcal{L}x = f$ *é estritamente positiva no triângulo* $a \leq s < t \leq b$;

c) o problema de fronteira de dois pontos

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(a) = x(b) = 0$$

é unicamente soluvél e a função de Green $G(t,s)$ *do problema é estritamente negativa no quadrado* $(a,b) \times (a,b)$.

As condições do Teorema 20 são satisfeitas para a equação $\mathcal{L}x = f$. Seja

$$p = p^+ - p^-, \quad p^+(t), \quad p^-(t) \geq 0, \quad \mathcal{L}_0 x = \ddot{x} + q\dot{x} - p^- x.$$

Então,

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}_0 x + p^+ x.$$

A equação $Mx \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x} + q\dot{x} = 0$ tem solução $x(t) \equiv 1$. Assim, em virtude do teorema de Sturm[2] $[a, b]$ é um intervalo de não-oscilação para a equação. Em virtude do Lema 11 a função de Cauchy $C_M(t, s)$ para a equação $Mx = f$ é positiva. O problema de Cauchy

$$\mathcal{L}_0 x \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x} + q\dot{x} - p^- x = 0, \quad x(a) = 1, \quad \dot{x}(a) = 0$$

é equivalente a equação $x = Kx + 1$ com operador isotónico de Volterra[3]

$$(Kx)(t) = \int_a^t C_M(t, s) p^-(s) x(s)\, ds.$$

Assim a solução u_0 da última equação é positiva:

$$u_0(t) = 1 + (K[1])(t) + (K^2[1])(t) + \ldots \geq 1$$

e $[a, b]$ é intervalo de não-oscilação para equação modelo $\mathcal{L}_0 x = 0$. Isto segue, em virtude do Lema 11, que o problema modelo

$$\mathcal{L}_0 x = f, \quad x(a) = x(b) = 0$$

é unicamente solúvel e a função de Green $W(t, s)$ para o problema estritamente negativo no quadrado $(a, b) \times (a, b)$. Por outro lado existe a solução da equação $\mathcal{L}_0 x = 0$ tal que $u_0(t) > 0$ para $t \in (a, b)$, $u_0(a) + u_0(b) > 0$.

3.3 Condições de conservação do sinal da função de Green

Vejamos o problema

$$\begin{cases} (\mathcal{L}x)(t) = (\mathcal{L}_0 x)(t) - (Tx)(t) = f(t), & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha, \end{cases} \tag{3.4}$$

[2] Jacques Charles François Sturm (1803-1855) — matemático suíço

[3] Vito Volterra (1860-1940) — matemático italiano

$T : \mathrm{C} \to \mathrm{B}_1^{t^2,t}$ é um operador linear antitónico, $f \in \mathrm{B}_1^{t^2,t}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$.

Lema 12. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) existe $v \in \mathrm{D}_1^{t^2,t} : v(t) > 0, \quad \phi \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{L}_0 v)(t) - (Tv)(t) \leq 0, \quad t \in (0,1)$, *sendo*

$$v(1) - \int_0^1 \left[\ddot{v}(t) + \frac{\dot{v}(t)}{t} - \frac{v(t)}{t^2} - (Tv)(t)\right] dt > 0;$$

2) $\rho(\mathcal{A}) < 1$, *onde* $\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{W}T$;

3) o problema (3.4) tem solução única $x \in \mathrm{D}_1^{t^2,t}$ *e o operador de Green*[4] *é antitónico;*

4) existe em $[0,1]$ *solução positiva para a equação* $\mathcal{L}_0 x - Tx = 0$.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) A função v é solução do problema

$$\mathcal{L}_0 x - Tx = \phi, \quad x(1) = v(1)$$

e, consequentemente, satisfaz a equação

$$v - \mathcal{A}v = \mathcal{W}\phi + v(1)$$

do espaço C, isso implica que $\rho(\mathcal{A}) < 1$

2) $\Rightarrow$ 3) Seja $\alpha = 0$. A solubilidade única do problema (3.4), no espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$, advém da solubilidade única da equação

$$x = \mathcal{A}x + g$$

no espaço C. Aqui $g(\cdot) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 W(\cdot,s) f(s)\, ds$. Uma vez que $\rho(\mathcal{A}) < 1$, então

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\, ds = g(t) + (\mathcal{A}g)(t) + (\mathcal{A}^2 g)(t) + \cdots \geq 0,$$

se $f(t) \leq 0$ para $t \in [0,1]$, donde $G(.,.) \leq 0$.

[4]Georg Green (1793—1841) — matemático inglês

3) $\Rightarrow$ 4) Vejamos o problema

$$(\mathcal{L}_0 x)(t) - (Tx)(t) = 0, \quad x(1) = \alpha > 0 \tag{3.5}$$

Este problema é equivalente à equação $x = \mathcal{A}x + \alpha$, onde, evidentemente, $x(t) \geq \alpha > 0, t \in [0,1]$.

A implicação 4) $\Rightarrow$ 1) obtém-se, se na qualidade da função v escolhermos a solução u do problema $\mathcal{L}_0 x = 0$, $x(1) = u(1)$. $\square$

3.4 Problema não linear com singularidade não somável no espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$

Vejamos o problema quasilinear

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_0 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) + \dfrac{\dot{x}(t)}{t} - \dfrac{x(t)}{t^2} = f(t, (\Theta x)(t)), \quad t \in [0,1] \\ \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $\Theta : \mathrm{C} \to \mathrm{B}_1^{t^2,t}$ é um operador linear isotónico, a função $f(.,.)$ satisfaz as condições de Carathéodory.

Denote-se $\overline{y} = \Theta y$, $\overline{z} = \Theta z$; $[\overline{y}, \overline{z}]_{\mathrm{L}_1}$ é um intervalo ordenado no espaço L_1. O problema (3.6) vamos estudar no espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$.

Definição 1. *Diremos que a função $f(\cdot,\cdot)$ satisfaz uma das condições $L^i[\overline{v}, \overline{z}], i = 1, 2$, se para qualquer função mensurável $u \in [\overline{y}, \overline{z}]_{\mathrm{L}_1}$ é possivél a decomposição*

$$f(t, u(t)) = q_i(t)u(t) + M_i(t, u(t)),$$

para quase todo $t \in [0,1]$. Aqui $q_i \in \mathrm{L}_\infty$, $i = 1, 2$, $\mathcal{M}_i : [\overline{y}, \overline{z}]_{\mathrm{L}_1} \to \mathrm{L}_1$ é operador de Nemytskiĭ definido pela igualdade $(\mathcal{M}_i u)(t) \stackrel{\text{def}}{=} M_i(t, u(t))$, sendo o operador M_1 isotónico ($\mathcal{M}_1(t,\cdot)$ não decresce para quase todo $t \in [0,1]$), o operador $\mathcal{M}_2$ é antitónico (não cresce, para quase todo $t \in [0,1]$).

Teorema 21. *Seja* $y, z \in \mathrm{D}_1^{t^2,t}$, $y(t) < z(t)$, $t \in (0,1)$ *um par de funções que satisfazem as desigualdades:*

$$\mathcal{L}_0 y \geq f(\cdot, \Theta y), \quad \mathcal{L}_0 z \leq f(\cdot, \Theta z), \quad y(1) \leq \alpha \leq z(1). \tag{3.7}$$

Suponhamos que a função $f(\cdot,\cdot)$ *satisfaz a condição* $L^2[\overline{y}, \overline{z}]$, *com coeficientes* $q_2 \in \mathrm{L}_\infty, q_2(\cdot) \leq 0$. *Então o problema (3.6) possui pelo menos uma solução* $x \in [y, z]_{\mathrm{D}_1^{t^2,t}}$.

Se, além disso, cumpre-se a condição $L^1[\overline{y}, \overline{z}]$, *com coeficiente* $q_1 \in \mathrm{L}_\infty$, *sendo o operador de Green do problema auxiliar*

$$\mathcal{L}_1 x \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_0 x - q_1 \Theta x = \phi, \quad x(1) = 0$$

antitónico, então a solução do problema (3.6) é única.

Demonstração. A demonstração faz-se de modo análogo ao teorema do livro [4].

Vamos escrever o problema (3.6) na forma

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_2 x)(t) = (\mathcal{L}_0 x)(t) - q_2(t)(\Theta x)(t) = M_2(t, (\Theta x)(t)), & t \in [0,1] \\ \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha, \end{cases} \tag{3.8}$$

no espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$.

Seja $v \stackrel{\text{def}}{=} z - y$. Então $v > 0$,

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_2 v \leq \mathcal{M}_2 \Theta z - \mathcal{M}_2 \Theta y \leq 0$$

devido a antonicidade do operador $\mathcal{M}_2$ e $v(1) + \int_0^1 W_2(t,s)\phi \, ds > 0$, para valores de $t \in \mathrm{I}_2$. Consequentemente, segundo o Lema 12, temos que o problema auxiliar

$$\mathcal{L}_2 x = \xi, \quad x(1) = 0 \tag{3.9}$$

é unicamente solúvel e o seu operador de Green $\mathcal{G}_2 : \mathrm{B}_1^{t^2,t} \to \mathrm{B}_1^{t^2,t}$ é antitónico.

O problema (3.8) é equivalente à equação do segundo tipo

$$x = \mathcal{A}_2 x \tag{3.10}$$

com operador isotónico $\mathcal{A}_2 : [\overline{y},\overline{z}]_{C \to C}$, definido pela igualdade

$$(\mathcal{A}_2 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 G_2(t,s) M_2(s,(\Theta x)(s))\, ds + u_2(t), \quad t \in [0,1],$$

onde $u_2(\cdot)$ é a solução do problema semi-homogéneo

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) = 0, \quad t \in [0,1], \quad x(1) = \alpha,$$

$G_2(\cdot,\cdot)$ é a função de Green do problema auxiliar (3.9).

Cada solução contínua da equação (3.9) pertence ao espaço $D_1^{t^2,t}$, pois o operador $\mathcal{A}_2$ está definido no intervalo ordenado $[\overline{y},\overline{z}]_C$ do espaço C e aplica este intervalo no espaço $D_1^{t^2,t}$. Realmente, o operador isotónico $\Theta : C \to B_1^{t^2,t}$ aplica o intervalo ordenado $[\overline{y},\overline{z}]_C$ no intervalo ordenado $[\overline{y},\overline{z}]_{B_1^{t^2,t}}$. Devido à condição $L^2[\overline{y},\overline{z}]$, o operador $\mathcal{M}_2 : [\overline{y},\overline{z}]_{B_1^{t^2,t} \to B_1^{t^2,t}}$ é antitónico, por isso aplica o intervalo ordenado $[\overline{y},\overline{z}]_{B_1^{t^2,t}}$ no intervalo ordenado $[\mathcal{M}_2\overline{z},\mathcal{M}_2\overline{y}]_{B_1^{t^2,t}}$. O intervalo ordenado $[\mathcal{M}_2\overline{z},\mathcal{M}_2\overline{y}]_{B_1^{t^2,t}}$ aplica-se, através do operador $\mathcal{G}$, no intervalo ordenado

$$[\mathcal{G}_2\mathcal{M}_2\overline{y},\mathcal{G}_2\mathcal{M}_2\overline{z}]_{B_1^{t^2,t}} \subset [\mathcal{G}_2\mathcal{M}_2\overline{y},\mathcal{G}_2\mathcal{M}_2\overline{z}]_C.$$

O operador $\mathcal{A}_2 : [y,z]_{C \to [y,z]_C}$ é completamente contínuo, como produto do operador contínuo $\Theta : [y,z]_C \to [\overline{y},\overline{z}]_{B_1^{t^2,t}}$, e do operador completamente contínuo

$$\mathcal{M}_2 : [\overline{y},\overline{z}]_{B_1^{t^2,t}} \to [\mathcal{M}_2\overline{y},\mathcal{M}_2\overline{z}]_{B_1^{t^2,t}}.$$

Temos deste modo, a possibilidadede de estudar a equação (3.10) no intervalo ordenado $[y,z]_C$ do espaço C. Além disso, qualquer solução $x \in [y,z]_C$ da equação (3.10) satisfaz o problema de fronteira (3.8), já que o problema (3.8) obtém-se da equação (3.10) aplicando o operador $\mathcal{L}_2$ e calculando $x(1)$. E vice-versa, qualquer solução $x \in [\overline{y},\overline{z}]_{D_1^{t^2,t}}$ do problema (3.8) satisfaz a equação (3.10), pois a equação (3.10) obtém-se do problema (3.8) aplicando à este problema a fórmula de Green, sobre a representação da solução do problema (3.9).

Assim o operador isotónico $\mathcal{A}_2$ aplica o conjunto fechado e convexo $[y,z]_C$ do espaço de Banach C em si mesmo e é completamente contínuo. De acordo com príncipio de Schauder[5], sobre o ponto fixo, a equação (3.10) tem pelo menos uma solução $x \in [y,z]_C$.

[5] Juliusz Pawel Schauder (1894–1943) — matemático austro-húngaro

Mostremos que o conjunto de soluções $x \in [y, z]_C$ possui um elemento máximo $\overline{x} \in [y, z]_C$ (solução superior) e elemento mínimo $\underline{x}$ (solução inferior): $v(t) \leq \underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), t \in [0, 1]$. Seja $x \in [y, z]_C$ uma certa solução da equação (3.9). A sucessão $z^i, z^{i+1} = \mathcal{A}_2 z^i, z^0 = z$ decresce monotonamente e é limitada inferiormente pelo elemento $x \in [y, z]_C$, pois o operador $\mathcal{A}_2$ aplica o conjunto $[x, z]_C$ em si própio. De uma sucessão monótona compacta z^i implica a existência do limite $\overline{x} = \lim\limits_{i \to \infty} z^i$. Como este limite é a solução, então a desigualdade $\overline{x} \geq x$ para qualquer $x \in [y, z]_C$ fica demonstrada. A existência de solução inferior $\underline{x}$ demonstra-se de modo análogo.

Mostremos agora, que se a condição $L^1[\overline{y}, \overline{z}]$ cumpre-se, então a solução do problema (3.6) é única, i.e, $\overline{x} = \underline{x}$. Usamos a condição $L^1[\overline{y}, \overline{z}]$ e rescrevemos o problema (3.6) na forma

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) = M_1(t, (\Theta x)(t)), \quad t \in [0, 1], \quad x(1) = \alpha. \tag{3.11}$$

O problema (3.11) é equivalente à equação do segundo tipo $x = \mathcal{A}_1 x$ no intervalo ordenado $[y, z]_C$ do espaço C, com operador antitónico $\mathcal{A}_1 : [y, z]_C \to$ C, definido pela desigualdade

$$\mathcal{A}_1 x(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 G_1(\cdot, s) M_1(s, (\Theta x)(s))\, ds + u_1(\cdot)$$

onde $G_1(\cdot, s)$ é a função de Green, u_1 é a solução do problema semi-homogéneo

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad x(1) = \alpha.$$

Analisemos a igualdade $\overline{x} - \underline{x} = \mathcal{A}_1 \overline{x} - \mathcal{A}_1 \underline{x}$. Aqui a parte esquerda é não negativa e a parte direita, devido à antitonicidade de $\mathcal{A}_1$, é não positiva, consequentemente $\overline{x} = \underline{x}$. $\square$

Vejamos o problema (3.6), no caso quando $\Theta x \equiv x$.

Corolário 2. *Seja $v, z \in \mathrm{D}_1^{t^2,t}$, $v(t) < z(t)$, $t \in (0, 1)$ um par de funções que satisfazem as desigualdades:*

$$\mathcal{L}_0 v \geq f(\cdot, v), \quad \mathcal{L}_0 z \leq f(\cdot, z), \quad y(1) \leq \alpha \leq z(1). \tag{3.12}$$

Suponhamos que a função $f(\cdot, \cdot)$ satisfaz a condição $L^2[y, z]$, com coeficientes $q_2 \in \mathrm{B}_1^{t^2,t}$, e o operador de Green do problema auxiliar

$$\mathcal{L}_1 x \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_0 x - q_1 x = \phi, \quad x(1) = 0$$

antitónico, então a solução do problema (3.6) é única.

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 21. □

Exemplo 1. *Vejamos o problema quasilinear*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dfrac{\dot{x}(t)}{t} - \dfrac{x(t)}{t^2} = -\dfrac{x^2(t)}{t}, & t \in [0,1] \\ \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha < 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

no espaço $\mathrm{D}_1^{t^2,t}$. *Na qualidade de função de comparação escolhemos*

$$y(t) = t^2 + (\alpha - 1)t, \quad z(t) \equiv 0.$$

A função $f(t, x(t)) = -\dfrac{x^2(t)}{t}$ *satisfaz a condição* $L^2[y,z]$, *com* $q_2(t) = -2(t + \alpha - 1)$ *e satisfaz a condição* $L^1[y,z]$, *com coeficiente* $q_1 \equiv 0$.

Consequentemente, segundo o Corolário 2, o problema (3.13) possui solução única $x \in \mathrm{D}_1^{t^2,t} : y(t) \leq x(t) \leq z(t), \quad t \in [0,1]$.

Conclusão

No presente trabalho construiu-se um espaço de soluções para um problema singular de fronteira duma Equação Diferencial Funcional de segunda ordem, que modela processos ligados à Teoria de Elasticidade. Uma vez construído o espaço de Banach, isomorfo ao produto directo de dois espaços, o problema singular passou a ser regular e foi possível demonstrar novas condições efectivas de resolubilidade e conservação de sinal de Green para problemas lineares de fronteira. Na base deste resultado, tornou-se possível demonstrar novas afirmações do tipo do teorema de Nagumo sobre a existência e unicidade de solução para Equação Diferencial Funcional quasilinear de segunda ordem.

Bibliografia

[1] M. J. Alves (1999), On an applied nonlinear singular boundary value problem, *Mathematica. Statistica. Informatica*, Eduardo Mondlane University, Mozambique, N5, 11-19.

[2] M. J. Alves (2000), About a problem arising in chemical reactor theory, *Memoirs Diff. Eq. Math. Phy.*, Tbilisi, Publishing House, Georgia,Vol. 19.

[3] M. J. Alves (2000), About a problem nonlinear boudary value problem with nonsummable singularity, Russian Mathematics,*Allerton Press, Inc*,U.S.A. Vol 14, N4.

[4] M. J. Alves, *Equações Diferenciais Funcionais Singulares de Segunda Ordem*, Perm State University Press, Perm, Rússia, 2000.

[5] N. Azbelev et al, *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations*, Atlanta: World Publishers Company, Inc, 1995.

[6] I. Kiguradze, *Some Singular Boundary Value Problems for Ordinary Differencial Equations*, Tbilisi State University Press, 1975.

[7] J. Hale, *Theory of Functional Differencial Equations*, Mir, Moscow, 1988.

[8] V. Hutson and J. S. Pym, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press, 1983.

[9] L. Kantorovich, *Descriptive Theory Of Sets and Functions. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces*, Taylor & Francis Pub, 1996.

[10] S.G. Kreĭn, *Linear Equations in Banach Spaces*, Springer Verlag, 1982.

Indice remissivo