UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA

SOBRE ALGUMAS APLICAÇÕES DA ANÁLISE FUNCIONAL NA TEORIA DE EQUAÇÕES INTEGRAIS

AUTOR: BETUEL DE JESUS VARELA CANHANGA
FINALISTA DO CURSO DE INFORMÁTICA

SUPERVISOR: PROF. DOUTOR MANUEL JOAQUIM ALVES
PROF. ASSOCIADO EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

MAPUTO 2005

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura

SOBRE ALGUMAS APLICAÇÕES DA ANÁLISE FUNCIONAL NA TEORIA DE EQUAÇÕES INTEGRAIS

Autor: Betuel de Jesus Varela Canhanga, estudante finalista do curso de Informática.
Supervisor: Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves, Professor Associado em Equações Diferenciais

Maputo, 2005

DECLARAÇÃO SOB PALAVRA DE HONRA

Declaro que esta dissertação nunca foi apresentada para obtenção de qualquer grau e que ela constitui o resultado da minha investigação pessoal, estando indicados no texto e na bibliografia as fontes que utilizei ao longo do mesmo.

Betuel de Jesus Varela Canhanga

Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Conteúdo

AGRADECIMENTOS

Entre tantos que acreditaram e torceram pelo sucesso do meu trabalho, entre aqueles que estenderam a mão nos momentos em que muito precisei deixo nesta página o meu agradecimento, em especial:

Aos amigos e colegas, em especial à Laura José, Bernardo Rota, Kenyssony, Edgar, Sangarote, Emídio, Azarias, Tsotsane, Penicela, Nilza, Elloy, Vilichane e Nell, pelo calor que me têm dado, muito obrigado!

Aos Docentes e Corpo Técnico do Departamento de Matemática e Informática. Muito e muito obrigado!

Ao Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves, meu Professor e Supervisor, vai a minha especial gratidão pelo apoio e incentivo prestados na concepção e prosecussão deste trabalho.

À minha família, que tanto me apoiou e me incentivou nos momentos mais árduos! Muitíssimo obrigado!

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família em especial aos meus pais, Gregório Canhanga e Maria Varela, meus irmãos Maria Ondina Canhanga, Nobre Canhanga, Mira Canhanga, Senibaldo Canhanga e Oreana Canhanga.

RESUMO

A Análise Funcional estuda espaços finitos e infinitos compostos de funções, vectores, matrizes, sucessões e outros objectos matemáticos mais complicados. Nela se unem, numa só, a Análise Matemática, a Teoria de Funções e Teoria de Conjuntos, a Álgebra e Geometria, dando-se uma ideia mais profunda e completa sobre dependência funcional. Como ramo próprio da Matemática, a Análise Funcional surgiu nos finais do século XVIII e início do século XIX. Os primeiros trabalhos sobre Análise Funcional pertencem ao matemático italiano Volterra[1], ao matemático francês Poincaré[2] e ao matemático alemão Hilbert[3]. Os espaços métricos foram introduzidos pelo matemático francês Fréchet[4] no início do século XX, os espaços normados aparecem em 1922 graças aos matemáticos polaco Banach[5] e americano Wiener[6].

As equações que contêm a incógnita sob sinal de integral chamam-se equações integrais. Elas têm uma grande aplicação, pois a maioria de problemas que surgem na Física, Mecânica e outras ciências técnicas reduzem-se a equações integrais. De notar que diferentes tipos de equações diferenciais reduzem-se a equações integrais. No estudo de equações integrais a primeira questão que surge é sobre a existência de solução. Para determinadas classes de equações funcionais a questão sobre existência de solução está intrinsecamente ligada à investigação da actuação do respectivo operador em diferentes espaços funcionais.

Neste trabalho fiz, dum modo pedagógico e didáctico, uma revisão bibliográfica atinente

[1] Vito Volterra (1860–1949) – matemático italiano
[2] Jules Henri Poincaré (1854–1912) – matemático francês
[3] David Hilbert (1862–1943) – matemático alemão
[4] Maurice René Fréchet (1878–1973) – matemático francês
[5] Stefan Banach (1892–1945) – matemático polaco
[6] Norbert Wiener (1878–1973) – matemático americano

a alguns tópicos sobre a teoria de operadores e sua aplicação nas equações integrais. De forma simples fiz uma abordagem sobre algumas aplicações da Análise Funcional na Teoria de Equações Integrais, tendo estudado a teoria de funcionais e operadores contínuos e lineares, os operadores compactos, colocando questões sobre a existência e unicidade de solução de equações integrais. Também abordei o método de aproximações iterativas e construção da resolvente. De forma rigorosa demonstrei alguns teoremas tais, como um teorema análogo ao teorema de Caccioppoli[7]-Banach sobre a existência e unicidade do ponto fixo para uma aplicação de contracção, o teorema de Hausdorff[8] sobre a compacticidade dum conjunto, o teorema sobre a compacticidade no espaço de funções contínuas e teoremas análogos ao teorema de Kolmogorov[9]-Riesz[10] sobre a compacticidade em espaços de funções somáveis com um peso variável. Como metodologia usei a Teoria de Equações Integrais, Análise Funcional e Análise Matemática.

Maputo, Junho 2005

[7]Renato Caccioppoli (1904–1959) – matemático italiano
[8]Felix Hausdorff (1868–1942) – matemático alemão
[9]Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) – matemático russo
[10]Frigyes Riesz (1880–1956) – matemático húngaro

SIMBOLOGIA

- $\mathbb{R}^n$ é o espaço de vectores n-dimensionais, com a norma $|\cdot|$
- $\mathbb{N}$ é o conjunto de números naturais
- $\|\cdot\|_{\mathrm{X}}$ denota a norma no espaço X; se estiver claro sobre o espaço X a que nos referimos, então escreveremos simplesmente $\|\cdot\|$
- $\|\mathcal{A}\|_{\mathrm{X}\to\mathrm{Y}}$ denota a norma do operador linear limitado $\mathcal{A} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{Y}$
- $R(\mathcal{A})$ é o contradomínio do operador $\mathcal{A}$
- $D(\mathcal{A})$ é o domínio do operador $\mathcal{A}$
- $\equiv$ significa "identicamente igual"
- $\stackrel{\text{def}}{=}$ significa "igual por definição"
- $\mathrm{C}[0,1] \equiv \mathrm{C}$ é o espaço de funções contínuas $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, cuja norma é

$$\|x\|_{\mathrm{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{0\leq t\leq 1} |x(t)|$$

- p' é o expoente conjugado em relação ao expoente p: $1/p + 1/p' = 1$ ($p' = \infty$, se $p = 1$ e $p' = 1$, se $p = \infty$)
- $\mathrm{L}_p[0,1] \equiv \mathrm{L}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ é o espaço de classes equivalentes de funções $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$

somáveis em p grau, cuja norma é

$$\|x\|_{\mathrm{L}_p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

e a relação de semiordenamento $\leq$: $x \leq y$, se $x(t) \leq y(t)$ para quase todo $t \in [0,1]$

- $\mathrm{L}_\infty[0,1] \equiv \mathrm{L}_\infty$ é o espaço de funções $x : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ (classes equivalentes) mensuráveis e limitadas na essência, cuja norma é

$$\|x\|_{\mathrm{L}_\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$$

e a relação de semiordenamento está definida como em L_1

- I_{X} é o operador identidade $I_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$; se estiver claro sobre o espaço X a que se refere, então escreveremos simplesmente I
- $\blacksquare$ denota o fim da demonstração

Capítulo 1

Elementos da Análise Funcional

1.1 Noções gerais sobre espaços métricos

Na Análise Matemática deparamos com várias noções de limite e, em alguns casos, para sucessões compostas pelos mesmos objectos matemáticos introduzem-se diversas noções de limite. Esta noção generaliza-se para as sucessões de números complexos e vectores de dimensão igual a n. Para sucessões funcionais existem várias noções de convergência: convergência simples, convergência uniforme, convergência em média e etc. Todas estas definições de convergência possuem em comum, na maioria dos casos, o facto de que a convergência da sucessão de elementos x_n (que podem ser números, vectores ou funções) para o elemento x significa uma aproximação do elemento x_n para x, uma redução da distância entre estes elementos quando n vai tomando valores cada vez maiores. De acordo com o modo como entendemos a distância entre elementos x_n e x obtemos diferentes definições de limite. Deste modo é correcto que, para alguns conjuntos de elementos, se dê uma definição geral de distância entre elementos que coincidirá com os casos particulares estudados e, depois, com ajuda desta distância podemos introduzir no conjunto a noção de transição de limite e transformarmos este conjunto em espaço.

Definição 1.1. O conjunto composto de elementos de natureza arbitrária, no qual se estabeleceu a noção de transição de limite, chamaremos **espaço abstracto** [9].

O modo mais simples, mas não único, de introdução da transição de limite num conjunto é a sua metrização, isto é, a introdução da lei que define a distância entre elementos do conjunto.

Definição 1.2. Ao conjunto X, de elementos de natureza arbitrária, chamaremos **espaço métrico** [8], [9] se estiver definido o valor $\rho(x, y)$ chamado **distância** de x até y e para o qual se cumprem as seguintes condições:

1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, para $\forall\ x,\ y \in X$ (simetria),

2) $\rho(x,y) > 0$, para $x \neq y$, e $\rho(x,x) = 0$, para $\forall\ x \in X$ (identidade),

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, para $\forall\ x,\ y,\ z \in X$ (desigualdade triangular).

Os elementos de um espaço métrico (X, ρ) chamaremos **pontos**.

Observação 1.1. Se para um mesmo conjunto introduzirmos diferentes definições de distância obteremos diferentes espaços métricos.

Observação 1.2. Qualquer subconjunto X_1 do espaço métrico (X, ρ) é espaço métrico com a mesma métrica ρ.

Definição 1.3. A sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de pontos do espaço métrico (X, ρ) tende para o ponto $a \in X$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ se a sucessão numérica $\{\rho(x_n, a)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para zero, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$.

Teorema 1.1. Se a sucessão de pontos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ do espaço métrico (X, ρ) converge, então o seu limite é único.

Demonstração. Suponhamos o contrário, isto é, $\rho(x_n, x) \to 0$ e $\rho(x_n, y) \to 0$, $x \neq y$, então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ temos: $\rho(x,y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) < \varepsilon$, para valores de n demasiado grande. Como x e y são pontos fixos e ε um número positivo qualquer, então a desigualdade cumpre-se somente se $\rho(x,y) = 0$, isto é, $x = y$. ■

Definição 1.4. Chamaremos **esfera** (respectivamente **esfera fechada**) [8], [9], [11], [12] com centro no ponto a e raio r ao conjunto de pontos x do espaço métrico (X, ρ) que satisfazem a desigualdade $\rho(x, a) < r$ (respectivamente $\rho(x, a) \leq r$).

Vamos denotar a esfera por $S(a,r)$ (respectivamente esfera fechada por $\bar{S}(a,r)$).

Observação 1.3. Chamaremos **vizinhança de** x_0 [12] a qualquer esfera centrada num ponto x_0 do espaço métrico (X,ρ).

É fácil ver que o ponto x_0 é limite da sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de pontos do espaço métrico (X,ρ), só e somente só, quando qualquer vizinhança de x_0 contém todos os elementos da sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a partir dum certo número N_0. Por outras palavras, na vizinhança de x_0 caem um número infinito de termos da sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Observação 1.4. O conjunto $E \subset X$ é limitado se existe uma esfera que contém E.

Definição 1.5. Sejam (X,ρ_1) e (Y,ρ_2) dois espaços métricos e $y = f(x)$ é uma função definida num certo conjunto $M \subset X$ com imagem no espaço Y. Diremos que a função $f(x)$ é contínua no ponto $x_0 \in M$ se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal, que para qualquer $x \in M$, $\rho_1(x,x_0) < \delta$ temos $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Observação 1.5. Da definição de continuidade de $f(x)$ segue que, se $x_n \to x_0$ $(x_n, x_0 \in M)$, então $f(x_n) \to f(x_0)$.

Observação 1.6. A afirmação contrária é também correcta: se $f(x_n) \to f(x_0)$, qualquer que seja a sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ que converge para $x_0 \in M$, então a função $f(x)$ é contínua no ponto x_0.

1.2 Exemplos de espaços métricos

Vamos, neste parágrafo, ver alguns espaços métricos que possuem grande aplicação [8], [9], [11].

Exemplo 1.1. Seja X o espaço euclidiano n-dimensional E_n, define-se a distância entre os pontos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deste espaço X pela fórmula

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Os axiomas de identidade e simetria são mais do que evidentes. O axioma triangular advém da desigualdade de Cauchy[1] -Bunyakovsky[2] [9], [12]:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

Realmente, se $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in E_n$, então

$$\rho(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}.$$

Logo concluímos que $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Exemplo 1.2. Seja X o conjunto de funções contínuas $x(t)$ definidas no segmento $a \leq t \leq b$. A distância entre duas funções $x(t)$ e $y(t)$ deste conjunto definimos segundo a igualdade

$$\rho(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-y(t)|.$$

Os axiomas de identidade e simetria demonstram-se facilmente. O axioma da desigualdade triangular demonstra-se do seguinte modo: para qualquer $t \in [a,b]$ temos

$$|x(t)-z(t)| = |x(t)-y(t)+y(t)-z(t)| \leq |x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|,$$

logo advém que:

$$\sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-z(t)| \leq \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-y(t)| + \sup_{a \leq t \leq b} |y(t)-z(t)|.$$

Como, segundo a definição,

$$\rho(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-y(t)| \quad \text{e} \quad \rho(y,z) \overset{\text{def}}{=} \sup_{a \leq t \leq b} |y(t)-z(t)|,$$

então:

$$\sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-z(t)| \leq \rho(x,y)+\rho(y,z), \quad \text{isto é,} \quad \rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z).$$

O conjunto de todas as funções contínuas no segmento $[a,b]$ com esta métrica denota-se $C[a,b]$.

---

[1] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) - matemático francês

[2] Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804–1889) - matemático russo

Exemplo 1.3. O espaço l_2 é o conjunto de todas as sucessões numéricas $(x_1, x_2, \ldots) = x$ para as quais a série

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$$

converge. Os axiomas de identidade e simetria demonstram-se facilmente. Para demonstrar o axioma da desigualdade triangular vamos deduzir as desigualdades de Bunyakovsky–Schwartz[3] e Cauchy–Minkowski[4] [1], [8]. Pegamos um natural N qualquer, então, devido às desigualdades de Bunyakowsky–Schwartz e Cauchy–Minkowski para somas contendo um número finito de parcelas, temos:

$$\sum_{i=1}^{N}|x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2},$$

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i + y_i)^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}.$$

Substituindo, nas partes direitas destas desigualdades, N por ∞ obtemos:

$$\sum_{i=1}^{N}|x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i + y_i)^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}. \tag{1.2}$$

Como as séries $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ e $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2$ convergem, pois $(x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ e $(y_1, y_2, \ldots) \in l_2$, então nas partes direitas de (1.1) e (1.2) as somas são finitas. Assim,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}.$$

[3]Laurent Schwartz (1915–2002) - matemático francês

[4]Hermann Minkowski (1864–1909) - matemático alemão

Da desigualdade de Cauchy–Bunyakovsky advém, em particular, que a série $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2$ converge, quaisquer que sejam os elementos $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$ deste espaço l_2, sendo a desigualdade de Cauchy–Bunyakovsky, para somas com um número infinito de parcelas. De modo análogo, como no Exemplo 1, demonstra-se o axioma triangular.

Exemplo 1.4. O espaço L_p $(1 \leq p < \infty)$ é o conjunto de todas as funções (classe de funções) $x(t)$ definidas no segmento $[a, b]$ para as quais existe o integral $\int_a^b |x(t)|^p \, dt$. A distância em L_p define-se segundo a fórmula:

$$\rho(x, y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt}.$$

Dois elementos de L_p consideram-se iguais se eles se diferenciam somente no conjunto de medida zero. Para demonstrarmos que a expressão anterior é distância, temos que verificar os axiomas da métrica. A desigualdade triangular demonstra-se com ajuda da desigualdade de Minkowski na sua forma integral:

$$\left(\int_a^b |x + y|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemplo 1.5. Seja X um espaço discreto, onde se pode definir a função distância de dois pontos x e y de X do seguinte modo:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y, \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Para demonstrar que $\rho(x, y)$ é uma métrica de X iremos fazer a verificação dos axiomas da métrica. São evidentes os axiomas sobre a simetria e a identidade; para demonstrar a desigualdade triangular faremos o seguinte: sejam x, y, z elementos de X, temos que mostrar que $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Já que $\rho(x, y) = 1$ para $x \neq y$, $\rho(x, z) = 1$ para $x \neq z$ e $\rho(z, y) = 1$ para $z \neq y$, teremos $1 < 1 + 1$, isto é, $1 < 2$.

O espaço (X, ρ) é chamado **espaço métrico discreto** [10], [12], [13].

No parágrafo 1.1 introduzimos a definição de convergência num espaço métrico. Vamos, agora, esclarecer o que significa convergência em alguns dos espaços métricos acabados de estudar.

Seja $X = E_n$. Se $x_k \to x_0$, onde $x_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$ e $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, então

$$\rho(x_k, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_i^{(0)}\right)^2} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Mas, isto é possível se $x_i^{(k)} \to x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, ..., n$. Daqui concluímos que a convergência em E_n é no sentido da convergência das coordenadas dos pontos para as suas respectivas coordenadas dos pontos limite.

Vamos estudar a convergência no espaço $X = C[a,b]$. Se $\{x_n(t)\} \subset C[a,b]$ converge para $x_0(t) \in C[a,b]$, então

$$\rho(x_n, x_0) = \sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| \to 0.$$

Por outras palavras, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um N tal que para qualquer $n > N$ cumpre-se a desigualdade

$$\sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Porém, esta última condição equivale a $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ para $n > N$ e para todo $t \in [a,b]$, isto é, a sucessão $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente para $x_0(t)$. Assim, falar de convergência no espaço $C[a,b]$ equivale falar sobre convergência uniforme de sucessões funcionais.

1.3 Espaços métricos completos

Seja (X, ρ) um espaço métrico, suponhamos que existe a sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de pontos do espaço métrico que converge para o ponto $a \in X$. Então, $\rho(x_n, a) \to 0$ quando $n \to \infty$ e, do mesmo modo, $\rho(x_{n+p}, a) \to 0$ quando $n \to \infty$, $p > 0$. Daqui segue $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$, $n \to \infty$, $p > 0$ porque $\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, a) + \rho(x_n, a)$.

Definição 1.6. Diremos que a sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de pontos do espaço métrico (X, ρ) é **fundamental** [9], [11] se $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$, $n \to \infty$, $\forall\, p > 0$.

Vimos, assim, que qualquer sucessão convergente é fundamental. Contudo, a afirmação inversa nem sempre é correcta, isto é, nem toda a sucessão fundamental é convergente. Por exemplo, seja X um espaço de polinómios $P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ definidos no segmento $[0,1]$ com métrica $\rho(P_n, Q_m) = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |P_n(t) - Q_m(t)|$. Então, neste espaço, a sucessão $\{P_n(t)\}$, onde $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, é fundamental mas não tem limite no espaço de polinómios pois

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \to e^t, \quad n \to \infty,$$

isto é, e^t não é um polinómio.

Definição 1.7. Diremos que o espaço métrico (X, ρ) é **completo** [9] se qualquer sucessão fundamental $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ converge para um elemento deste espaço.

Exemplo 1.6. Seja $X = \mathbb{R}$. Este espaço é completo devido ao critério de Cauchy de convergência duma sucessão numérica.

Exemplo 1.7. Seja $X = C(0,1)$, $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(0,1)$ é uma sucessão arbitrária que é fundamental. Por definição, isto significa que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um número natural N_0 que depende somente de ε tal que para $n \geq N_0$ e $\forall p > 0$ cumpre-se a desigualdade

$$\sup_{0<t<1} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{1.3}$$

e, também, para todo $t \in (0,1)$. A condição (1.3) é condição de Cauchy de convergência uniforme duma sucessão funcional. Devido à suficiência deste critério existe uma função $x(t)$ para a qual a sucessão dada converge uniformemente. Como todas as funções da sucessão são contínuas, então a função $x(t)$ é também contínua. Assim vemos que existe uma função $x(t) \in C(0,1)$ tal, que $\rho(x_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$, e isto significa que o espaço $C(0,1)$ é completo.

Exemplo 1.8. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l_2$, $x_n = \left\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots\right\}$, que é fundamental, por definição $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n > N_0$, $p > 0$:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_i^{(n)} - x_i^{(n+p)}\right)^2} < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Consequentemente,

$$|x_i^{(n)} - x_i^{(n+p)}| < \varepsilon, \tag{1.5}$$

para $n \geq N_0$, $p > 0$. Note-se que nesta desigualdade N_0 não depende de i e ela cumpre-se para todo i. A condição (1.4) é a condição de Cauchy para a sucessão $x_i^{(n)}$, sendo i fixo. Por isso mesmo existe o limite

$$x_i^{(0)} = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$$

e isto tem lugar para qualquer i. Vejamos a sucessão numérica

$$\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots\right) = x_0.$$

Vamos mostrar que x_0 pertence ao espaço l_2. Seja N um número natural qualquer. Temos:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(0)}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(0)} - x_i^{(n)} + x_i^{(n)}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(0)} - x_i^{(n)}\right)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(n)}\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(0)} - x_i^{(n)}\right)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i^{(n)}\right)^2}. \tag{1.6}$$

Escolhemos um n_1 enorme tal, que

$$\rho(x_{n_1}, x_{n_1+p}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i^{(n_1)} - x_i^{(n_1+p)}\right)^2} < 1$$

e vamos fixá-lo. Então,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(n_1)} - x_i^{(n_1+p)}\right)^2} < 1.$$

Façamos $p \to \infty$, logo

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(0)} - x_i^{(n_1)}\right)^2} \leq 1. \tag{1.7}$$

Esta desigualdade é válida para qualquer natural N, de (1.6) e (1.7) obtemos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(0)}\right)^2} \leq 1 + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i^{(n_1)}\right)^2} = k < \infty, \tag{1.8}$$

pois $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(x_i^{(n_1)}\right)^2} < \infty$ porque $x_{n_1} \in l_2$. Como (1.8) é válido para qualquer N, então ao fazer $N \to \infty$ obtemos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i^{(0)}\right)^2} \leq k < \infty,$$

o que mostra que $x_0 \in l_2$. Da desigualdade (1.4) segue

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(n)} - x_i^{(n+p)}\right)^2} < \varepsilon,$$

para $n \geq N_0$, $p > 0$. Passando para limite, quando $p \to \infty$, temos

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{(n)} - x_i^{(0)}\right)^2} \leq \varepsilon.$$

Finalmente, a transição para o limite quando $N \to \infty$ dá

$$\rho(x_n, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i^{(n)} - x_i^{(0)}\right)^2} \leq \varepsilon,$$

para $n \geq N_0$, donde segue que $x_n \to x_0$.

1.4 Método de aplicações de contracção

Na Análise Matemática, Álgebra, Teoria de Equações Diferenciais e Integrais e etc, o método de aplicações de contracção possui grande utilidade. Vamos começar por descrever este método através de exemplos.

Exemplo 1.9. Na recta real é dado o segmento $[a, b]$. Vamos contrair este segmento, o que significa que os seus extremos passam a ser novos pontos a_1 e b_1. Os pontos que antes ocupavam a posição a_1 e b_1 passam para os pontos a_2 e b_2 e assim em diante. Intuitivamente, podemos supor que no segmento $[a, b]$ existe o ponto c que se mantém fixo. Por outras palavras, cada x pertencente ao segmento $[a, b]$ fazemos corresponder um certo ponto $f(x) \in [a, b]$, que é imagem do ponto x. O ponto fixo, se ele existir, satisfaz a igualdade $x = f(x)$.

Exemplo 1.10. Suponhamos que no segmento $[a, b]$ é dado o conjunto E de funções $\varphi(x)$ tais que $|\varphi(x)| \leq M$, onde $x \in [a, b]$, M é um número positivo dado. A função $\varphi \in E$ chamamos ponto do conjunto E. Se para cada ponto $\varphi \in E$ se faz corresponder o ponto $\mathcal{A}\varphi \in E$, então diremos que está definida a aplicação $\mathcal{A}$ que actua de E em E. Por exemplo:

1) vamos admitir que, no segmento $[0, 1]$, é dado o conjunto E de funções $\varphi : 1, x, x^2, \ldots$ Para a função x^k fazemos corresponder a função x^{k+2}, isto é, $x^{k+2} = \mathcal{A}x^k$. Vemos que $\mathcal{A}$ é operador de multiplicação por x^2. Realmente, $x^{k+2} = x^2 x^k = \mathcal{A}x^k$;

2) no segmento $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ é dado o conjunto E de funções, $E = \{ax^n : a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$. Para cada função ax^k fazemos corresponder a função kax^{k-1}. Vemos que $\mathcal{A}$ é operador diferencial. Realmente, $kax^{k-1} = \left(ax^k\right)'$.

Definição 1.8. A aplicação $\mathcal{A}$, definida no espaço métrico (X, ρ), chama-se **aplicação** (ou **operador) de contracção** [8], [9] se:

1) $\mathcal{A}x \in X,\ \forall\, x \in X$;

2) para quaisquer dois pontos x', x'' do espaço métrico X cumpre-se a desigualdade

$$\rho\left(\mathcal{A}x', \mathcal{A}x''\right) \leq \theta \rho\left(x', x''\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Teorema 1.2. (de Cacciopolli-Banach) Seja $\mathcal{A}$ um operador de contracção que actua do espaço métrico completo (X, ρ) em (X, ρ). Então, existe em X um único ponto $\bar{x}$ tal que $\mathcal{A}\bar{x} = \bar{x}$.

Demonstração. Pegamos um elemento qualquer $x_0 \in X$ e construímos a sucessão

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots$$

Convém observar que

$$x_1 = \mathcal{A}x_0,\ x_2 = \mathcal{A}x_1,\ x_3 = \mathcal{A}x_2, \ldots,\ x_n = \mathcal{A}x_{n-1},$$

daí que

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(\mathcal{A}x_1, \mathcal{A}x_0) \leq \theta\rho(x_1, x_0) = \theta\rho(\mathcal{A}x_0, x_0),$$

$$\rho(x_3, x_2) = \rho(\mathcal{A}x_2, \mathcal{A}x_1) \leq \theta\rho(x_2, x_1) = \theta^2\rho(\mathcal{A}x_0, x_0)$$

e assim sucessivamente obtendo, deste modo, a desigualdade

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n \rho(\mathcal{A}x_0, x_0).$$

Daqui tiramos:

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq \left(\theta^{n+p-1} + \theta^{n+p-2} + \cdots + \theta^n\right)\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) = \frac{\theta^n - \theta^{n+p}}{1-\theta}\rho(\mathcal{A}x_0, x_0) < \left(\frac{\theta^n}{1-\theta}\right)\rho(\mathcal{A}x_0, x_0).$$

Como $0 < \theta < 1$, então $\theta^n \to 0$ e $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, $p > 0$ e como (X, ρ) é um espaço métrico completo, então existe um elemento $\bar{x} = \lim x_n$. Para $\bar{x}$ temos

$$\rho(\mathcal{A}\bar{x}, \bar{x}) \leq \rho(\mathcal{A}\bar{x}, x_n) + \rho(x_n, \bar{x}) = \rho(\mathcal{A}\bar{x}, \mathcal{A}x_{n-1}) + \rho(x_n, \bar{x}) \leq \theta\rho(\bar{x}, x_{n-1}) + \rho(x_n, \bar{x}) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Consequentemente, $\rho(\mathcal{A}\bar{x}, \bar{x}) = 0$, isto é, $\mathcal{A}\bar{x} = \bar{x}$. Suponhamos que $\hat{x}$ é outro ponto do espaço (X, ρ) tal, que $\mathcal{A}\hat{x} = \hat{x}$. Deste modo $\rho(\bar{x}, \hat{x}) = \rho(\mathcal{A}\bar{x}, \mathcal{A}\hat{x}) \leq \theta\rho(\bar{x}, \hat{x})$. Se $\hat{x} \neq \bar{x}$, então $\rho(\bar{x}, \hat{x}) > 0$ e, depois de simplificarmos a desigualdade anterior por $\rho(\bar{x}, \hat{x}) \neq 0$, teremos $1 < \theta$, o que não é possível. Logo, $\bar{x} = \hat{x}$. ■

Observação 1.7. Este teorema é habitualmente chamado **princípio das aplicações de contracção** [8], [9], [12] pois o operador $\mathcal{A}$, nas condições do teorema, transforma dois pontos do espaço (X, ρ) em outros dois pontos do mesmo espaço, com menor distância. O ponto $\bar{x}$ chama-se **ponto fixo** do operador $\mathcal{A}$. Este ponto fixo é solução da equação $\mathcal{A}x = x$. Deste modo, o teorema de Cacciopoli-Banach é *teorema de existência e unicidade* da equação $\mathcal{A}x = x$, se o operador $\mathcal{A}$ for operador de contracção.

1.5 Espaços de Banach

Seja $X = \{x,\ y,\ z, \ldots,\ u,\ v, \ldots\}$ um conjunto cujos elementos são de natureza arbitrária. Diremos que este conjunto é um **espaço linear** [10] se nele está definida a soma $x + y$ de elementos x e $y \in X$ e o produto λx do elemento $x \in X$ por $\lambda \in \mathbb{R}$, que são novamente elementos do espaço X e cumprem-se as propriedades habituais da soma e multiplicação:

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

4) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$;

5) em X existe um elemento único θ tal que $x + \theta = x$, $\forall\, x \in X$. Este elemento chama-se **zero** [10], [12], [13] do espaço e normalmente denota-se por $\mathbf{0}$;

6) para cada $x \in X$ existe um único elemento $y \in X$ tal que $x + y = \mathbf{0}$. Este elemento y chama-se **oposto de** x [10], [12], [13];

7) $1x = x$, $0x = \mathbf{0}$.

Exemplo 1.11. O espaço $\mathbb{R}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, é exemplo de espaço linear. A intuição geométrica adquirida para $\mathbb{R}^3$ ajuda a estudar e visualizar outros conceitos sobre este tipo de espaço.

Exemplo 1.12. Para $n \geq 0$, o conjunto $\mathbb{P}_n$ de polinómios de grau não superior a n consiste de todos os polinómios da forma [10]

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \tag{1.9}$$

onde os coeficientes a_0, a_1, $a_2, \ldots,$ a_n e a variável t são reais. Se p é dado por (1.9) e se $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n$, então a soma $p + q$ é definida por

$$(p + q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

e o produto λp é

$$(\lambda p)(t) = \lambda p(t) = \lambda a_0 + (\lambda a_1)t + (\lambda a_2)t^2 + \cdots + (\lambda a_n)t^n.$$

Estas definições satisfazem os axiomas $1 - 6$ porque $p + q$ e λp são polinómios de grau igual ou menor que n. Logo, $\mathbb{P}_n$ é um espaço linear.

Exemplo 1.13. Seja V um conjunto de funções reais definidas no conjunto $\mathbb{D}$. A soma $f+g$ é efectuada de forma habitual, isto é, é uma função cujo valor no ponto t do domínio $\mathbb{D}$ é $f(t)+g(t)$. De modo análogo, para um escalar λ e uma função $f \in V$, a função λf é $\lambda f(t)$. Por exemplo, se $\mathbb{D}=\mathbb{R}$, $f(t)=1+\sin 2t$ e $g(t)=2+5t$, então $(f+g)(t)=3+\sin 2t+5t$ e $(2g)(t)=4+10t$.

Duas funções em V são iguais se e somente se os seus valores são iguais para todo $t \in \mathbb{D}$. Logo, o elemento zero em V é a função que é identicamente igual a zero, isto é, $f(t) \equiv 0$ para todo t e o oposto de f é $-f$. Os axiomas $1-6$ cumprem-se, portanto V é um espaço linear.

Observação 1.8. Em muitos problemas, um espaço linear consiste dum subconjunto apropriado de elementos dum espaço linear mais vasto. Neste caso, somente três dos axiomas do espaço linear precisam de ser verificados, os restantes axiomas cumprem-se automaticamente.

Diremos que o subconjunto H do espaço linear V é um **sub-espaço** de V se:

1) o zero de V pertence a H;

2) H é conjunto fechado em relação à adição, isto é, para cada u e v de H a soma $u+v$ pertence também a H;

3) H é fechado em relação à multiplicação por escalares, isto é, para cada $u \in H$ e cada $\lambda \in \mathbb{R}$, o elemento $\lambda u \in H$.

Exemplo 1.14. O conjunto que consiste somente do elemento zero num espaço linear V é um sub-espaço de V e chama-se **sub-espaço nulo** [10].

Exemplo 1.15. O espaço $\mathbb{R}^2$ não é sub-espaço de $\mathbb{R}^3$, porque $\mathbb{R}^2$ não é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.16. Um plano $\mathbb{R}^3$ que não contém a origem não é um sub-espaço de $\mathbb{R}^3$ porque o plano não contém o elemento nulo de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.17. O conjunto $H \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} : s,\ t \in \mathbb{R} \right\}$, é um sub-espaço de $\mathbb{R}^3$. Realmente, neste sub-espaço $\mathbf{0}= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in H \right\}$ e H é fechado em relação à adição e multiplicação por um escalar, pois estas operações aplicadas a elementos de H produzem sempre elementos cuja a terceira componente é zero (e pertencem a H). Logo, H é um sub-espaço de $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.9. Seja X um espaço linear e definimos nele o valor real $\|x\|$ chamado **norma** que satisfaz as seguintes propriedades [8], [10], [11], [12]:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Então X é um **espaço linear normado**.

Observação 1.9. Com ajuda da norma, no espaço linear podemos introduzir a distância expressa por $\rho(x,y) = \|x - y\|$. Das propriedades da norma facilmente se conclui que todos axiomas da métrica cumprem-se. A convergência, no sentido da distância introduzida com ajuda da norma, chama-se **convergência segundo a norma** ou **convergência forte** [13].

Definição 1.10. Diz-se que X é espaço de **Banach** se for linear, normado e completo.

Exemplo 1.18. Denote-se por J_π o intervalo $(0,1)$, se $\pi(t) = t(1-t)$, o intervalo $(0,1]$, se $\pi(t) = t$ ou o intervalo $[0,1)$, se $\pi(t) = 1-t$. Fixemos o ponto $\tau \in J_\pi$ e definimos, no quadrado $[0,1] \times [0,1]$, a função [1]

$$\Lambda_\tau(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{1-e^{s-t}}{\pi(s)}, & \text{se } \tau \leq s < t \leq 1; \\[2ex] \dfrac{e^{s-t}-1}{\pi(s)}, & \text{se } 0 \leq t < s \leq \tau; \\[2ex] 0, & \text{nos restantes pontos.} \end{cases}$$

A função $\Lambda_\tau(t,s)$ é limitada. De notar que $\pi(\cdot)\Lambda_\tau(\cdot,\cdot)$ é a função de Green[5] do problema de

[5]Georg Green (1793–1841) – matemático inglês

Cauchy

$$\ddot{x} + \dot{x} = z, \quad x(\tau) = \dot{x}(\tau) = 0,$$

para $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Deste modo, para cada $t \in [0, 1]$, o produto $\Lambda_\tau(t, \cdot)z(\cdot)$ pertence ao espaço L_p, qualquer que seja $z \in L_p$. Seja

$$(\Lambda_\tau z(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \Lambda_\tau(t, s)z(s)ds, \quad (Y_\tau\beta)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1 + \beta_2\left(1 - e^{\tau - t}\right),$$

$$Y_\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} col\left\{1,\ 1 - e^{\tau - t}\right\}.$$

Observação 1.10. A igualdade $x = \Lambda_\tau z + Y_\tau\beta$ define para cada par $\{z, \beta\} \in L_p \times \mathbb{R}^2$, onde $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$, um elemento do espaço D_p^π $(1 \leq p \leq \infty)$, cuja função $x : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ usufrui as seguintes propriedades:

1) x é absolutamente contínua no segmento [0,1];

2) $\dot{x}$ é local absolutamente contínua no intervalo J_π;

3) a função $\pi\ddot{x} + \dot{x}$ pertence ao espaço L_p.

Observação 1.11. O espaço D_p^π é um espaço de Banach [1], [2]. É evidente que D_p^π é um espaço linear normado. A sua completeza advém do facto que ele é isométrico e algebricamente isomorfo ao espaço de Banach $L_p \times \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.19. Seja B o espaço de funções mensuráveis $x : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ tais, que para cada $x \in B$ existe uma constante $M_x \geq 0$ para a qual em $[0, 1)$ cumpre-se a desigualdade [3]

$$\int_0^t |x(s)|^2 \, ds \leq M_x^2 t.$$

A norma $\|x\|_B$ do elemento $x \in B$ definimos do seguinte modo:

$$\|x\|_B = \sup_{0<t<1} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |x(s)|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Observação 1.12. O espaço B está continuamente incluido no espaço L_2 e para qualquer $x \in B$ temos

$$\|x\|_{L_2} \leq \|x\|_B.$$

Lema 1.1. B é um espaço de Banach [1].

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sucessão fundamental no espaço B, isto é,

$$\lim_{i,j\to\infty} \|x_i - x_j\| = 0.$$

Vamos mostrar que esta sucessão converge para um certo elemento $x \in B$. Existe um número $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_i - x_j\|_B < \frac{1}{2^k}$; $i, j \geq n_k$, então $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_B < \frac{1}{2^k}$. Seja

$$y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t) \right|,$$

$$y_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} \left| x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t) \right|.$$

De realçar que a sucessão y_m não é negativa, cresce monotonamente e converge pontualmente para y. Pela desigualdade triangular para normas no espaço B temos $\|y_m\|_B < 1$ e pelo teorema de B. Levi[6] sobre convergência monótona para qualquer t pertencente a $(0, 1)$ temos:

$$\int_0^t y^2(s)ds = \lim_{m\to\infty} y_m^2(s)ds \leq t,$$

consequentemente $y(s) < \infty$, por isso mesmo a série $x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right)$ converge de modo absoluto, isto é, a sucessão $\{x_{n_k}\}$ converge quase sempre para um elemento de B. Vamos mostrar que $\forall\, x \in B$, $\|x_i - x\|_B \to 0$ quando $i \to \infty$. Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer, como $\{x_i\}$ é uma sucessão fundamental então $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, i, j \geq n_0$ temos

$$\|x_i - x_j\|_B^2 = \sup_{0<t<1} \left(\frac{1}{t} \int_0^t |x_i(s) - x_j(s)|^2 \, ds \right) < \varepsilon.$$

[6]Ben Gerson Levi (1915–2002) – matemático francês

Pegamos $j = n_k \geq n_0$ e aplicando o lema de Fatou[7] obtemos para $i > n_0$ e $\forall\, t \in (0,1)$

$$\frac{1}{t}\int_0^t |x_i(s) - x(s)|^2\, ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{k\to\infty} |x_i(s) - x_{n_k}(s)|^2\, ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{t}\lim_{k\to\infty}\inf \int_0^t |x_i(s) - x(s)|^2\, ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{k\to\infty} |x_i(s) - x_{n_k}(s)|^2\, ds \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty}\inf \|x_i - x_{n_k}\|_B^2 \leq \varepsilon.$$

Consequentemente, $x_i - x \in B$ e por isso $x \in B$, e $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i - x\|_B = 0$. ■

[7]Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929) – matemático francês

Capítulo 2

FUNCIONAIS E OPERADORES LINEARES

2.1 Funcionais contínuos

Definição 2.1. Sejam X e X_1 dois espaços lineares, seja $\mathcal{A}$ uma transformação (aplicação) de X em X_1. Diremos que $\mathcal{A}$ é uma **transformação linear** [10], [12] de X em X_1 se e somente se

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}(x) + \beta\mathcal{A}(y), \quad \forall\, x, y \in X, \quad \forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},$$

onde $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) \in X_1$.

Lema 2.1. Sejam X e X_1 dois espaços lineares normados, seja $\mathcal{A}$ uma transformação linear de X em X_1. Se $\mathcal{A}$ é contínua em $x_0 \in X$, então $\mathcal{A}$ é contínua em X.

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}$ é contínua em $x_0 \in X$, então $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\|\mathcal{A}x_0 - \mathcal{A}x\| < \varepsilon$ quando $\|x_0 - x\| < \delta$. Vamos pegar um outro ponto qualquer $x_1 \in X$, para qualquer $x \in X$ temos

$$\|x_1 - x\| = \|x_0 - (x - x_1 + x_0)\| < \delta$$

donde

$$\|\mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x\| = \|\mathcal{A}x_0 - \mathcal{A}(x - x_1 + x_0)\| < \varepsilon,$$

o que mostra que $\mathcal{A}$ é contínua em x_1 e, porque x_1 é qualquer ponto de X, a transformação $\mathcal{A}$ é contínua em todo espaço X . ■

Observação 2.1. Se $\mathcal{A}$ é uma transformação linear que aplica X em X_1, onde X e X_1 são espaços lineares normados, é suficiente que $\mathcal{A}$ seja contínua em $\mathbf{0} \in X$ para que seja contínua em todo X.

Definição 2.2. Sejam X e X_1 dois espaços lineares normados, $\mathcal{A}$ é uma transformação linear de X em X_1. Diremos que $\mathcal{A}$ é limitada se

$$\exists\ M \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in X : \|\mathcal{A}x\| \leq M.$$

Teorema 2.1. Sejam X e X_1 dois espaços lineares normados. A transformação $\mathcal{A}$ que aplica elementos de X em X_1 é contínua em X se e somente se $\mathcal{A}$ é limitada.

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}$ é contínua em X, vamos pegar o ponto $\mathbf{0}$ pertencente a X, $\mathcal{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$, então $\exists\ \delta > 0$ tal que $\|\mathcal{A}x\| < 1$, $\forall\ x \in X$ e $\|x\| < \delta$. Seja $\|x\| \leq 1$, temos que $\left\|\frac{1}{2}\delta x\right\| = \frac{1}{2}\delta\|x\| < \delta$ e $\left\|\mathcal{A}\left(\frac{1}{2}\delta x\right)\right\| < 1$, mas $\mathcal{A}\left(\frac{1}{2}\delta x\right) = \frac{1}{2}\delta\mathcal{A}x$ e este facto leva-nos a afirmar que $\|\mathcal{A}x\| = \left\|\frac{2}{\delta}\mathcal{A}\left(\frac{1}{2}\delta x\right)\right\| = \frac{2}{\delta}\left\|\mathcal{A}\left(\frac{1}{2}\delta x\right)\right\| < \frac{2}{\delta}$, o que mostra que $\mathcal{A}$ é limitada. Demonstramos, deste modo a necessidade. Vamos agora demonstrar a suficiência, isto é, mostremos que se $\mathcal{A}$ é limitada então é contínua. Sendo $\mathcal{A}$ limitada em X, com base no Lema 2.1 precisaremos somente demonstrar que $\mathcal{A}$ é contínua em $\mathbf{0}$. Seja $\varepsilon > 0$, $\exists\ M \in \mathbb{R}, \forall\ x \in X : \|\mathcal{A}x\| \leq M$ pois $\|x\| \leq 1$. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $\delta M < \varepsilon$, se $\|x\| < \delta$ então $\left\|\frac{x}{\delta}\right\| = \frac{1}{\delta}\|x\| < 1$ e, deste modo, $\left\|\mathcal{A}\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| \leq M$,

$$\|\mathcal{A}x\| = \left\|\delta\mathcal{A}\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| = \delta\left\|\mathcal{A}\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| < \delta M < \varepsilon$$

o que prova que $\mathcal{A}$ é contínua em $\mathbf{0}$. ■

Definição 2.3. Seja X um espaço métrico, diremos que $\mathcal{A}$ é **funcional linear** de X [8], [9] se $\mathcal{A}$ é uma transformação linear de elementos de X em $\mathbb{R}$ e

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathcal{A}(x) + \beta\mathcal{A}(y), \quad \forall\ x,\ y \in X, \quad \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.1. O produto escalar (g, f), para f e g pertencentes a L_2 e f fixo pode ser considerado como um funcional linear de variável g onde,

1) $\mathcal{A}(g_1 + g_2) = \mathcal{A}g_1 + \mathcal{A}g_2, \quad \forall\ g_1,\ g_2 \in L_2,$

2) $\mathcal{A}(cg) = c\mathcal{A}g, \quad \forall\, g \in L_2, \quad \forall c \in \mathbb{R},$

3) $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \|\mathcal{A}g\| \leq M\|g\|, \quad \forall\, g \in L_2.$

O menor dos valores de M denotaremos $M_{\mathcal{A}}$ ou $\|\mathcal{A}\|$ que é a **norma** do funcional linear.

Observação 2.2. O conjunto de todos funcionais lineares em X é um espaço linear, nele podemos definir as operações algébricas $(f+g)(\cdot) = f(\cdot) + g(\cdot)$ e $(\alpha f)(\cdot) = \alpha f(\cdot)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2. Seja X um espaço linear, a transformação $\mathcal{A}x = \|x\|$, $\forall x \in X$, não é uma transformação linear, logo $\mathcal{A}$ não é funcional linear, pois $\forall x, y \in X$

$$\mathcal{A}(x+y) = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$$

que não cumpre com as propriedades de funcionais lineares.

2.2 Continuidade uniforme do funcional

Vamos generalizar para o funcional a noção de continuidade uniforme [8], [9], [12], [13].

Definição 2.4. Seja $\mathcal{A}$ um funcional definido no conjunto M do espaço métrico (X, ρ). Diremos que $\mathcal{A}$ é **uniformemente contínuo** em M se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para quaisquer pontos x' e $x'' \in M$, $\rho(x', x'') < \delta$, cumpre-se a desigualdade

$$|\mathcal{A}x' - \mathcal{A}x''| < \varepsilon.$$

É evidente que a continuidade uniforme num certo conjunto M do funcional $\mathcal{A}$ implica a continuidade desse funcional em M. Realmente, seja x_0 um ponto de M, construímos uma sucessão qualquer $\{x_n\}$ de pontos de M que converge para x_0. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $\rho(x_n, x_0) < \delta$ para n demasiado grande, então para a sucessão $\{x_n\}$ cumpre-se a desigualdade

$$|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x_0| < \varepsilon.$$

Vimos assim que da convergência de qualquer sucessão $x_n \to x_0$ implica a convergência de $\mathcal{A}x_n \to \mathcal{A}x_0$. A afirmação inversa não é correcta. O funcional $\mathcal{A}x = \dfrac{1}{x}$ é contínuo no conjunto

M de pontos da vizinhança do elemento nulo do espaço métrico, considerando que o próprio ponto $\mathbf{0}$ do espaço não pertence ao conjunto M : $\mathbf{0} \notin M$, mas a continuidade uniforme para este caso não se verifica.

Teorema 2.2. (de Cantor[1]) Se o funcional $\mathcal{A}$ é contínuo num compacto, então ele é uniformemente contínuo nesse compacto.

Demonstração. Suponhamos que o funcional $\mathcal{A}$ é contínuo num conjunto compacto M do espaço métrico (X, ρ), mas não é uniformemente contínuo neste conjunto. Pegamos num ε e escolhemos dois pontos x' e x'' do conjunto M tais, que

$$\rho(x_1', x_1'') < 1, \quad |\mathcal{A}x_1' - \mathcal{A}x_1''| \geq \varepsilon.$$

Partimos da suposição de que existem estes dois pontos, pois caso contrário o funcional $\mathcal{A}$ será uniformemente contínuo. Vamos achar dois pontos x_2' e $x_2'' \in M$ tais que

$$\rho(x_2', x_2'') < \frac{1}{2}, \quad |\mathcal{A}x_2' - \mathcal{A}x_2''| \geq \varepsilon,$$

que no contexto da nossa suposição não é possível. Continuamos escolhendo pares de pontos tais que

$$\rho(x_n', x_n'') < \frac{1}{n}, \quad |\mathcal{A}x_n' - \mathcal{A}x_n''| \geq \varepsilon, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Obtemos duas sucessões de pontos $\{x_n'\}$ e $\{x_n''\}$. Da sucessão $\{x_n'\}$ de pontos do conjunto compacto M extraímos a subsucessão convergente $\{x_{n_k}'\} \to x_0 \in M$. A subsucessão com os mesmos números $\{x_{n_k}''\}$ converge também para o mesmo limite x_0 e, como

$$\varepsilon \leq |\mathcal{A}x_n' - \mathcal{A}x_n''| \leq |\mathcal{A}x_n' - \mathcal{A}x_0| + |\mathcal{A}x_0 - \mathcal{A}x_n''|,$$

pelo menos uma das parcelas à direita deverá ser menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ independentemente de n, o que contraria a condição de continuidade do funcional $\mathcal{A}x$ no ponto x_0 . ∎

2.3 Operadores contínuos

Vamos agora estudar a noção mais geral de dependência funcional [8], [9], [13].

[1] Moritz Benedicket Cantor (1829–1920) – matemático alemão

Definição 2.5. Sejam E e M dois conjuntos. Se a cada elemento x de E se atribui, segundo uma certa regra $\mathcal{A}$, um ou vários elementos y do conjunto M, então no conjunto E está definido o **operador** $y = \mathcal{A}x$ que tem como contradomínio o conjunto M.

Vemos que a definição de operador se distingue da definição de funcional pela não exigência de que o conjunto M seja um subconjunto de $\mathbb{R}$. Na definição de operador o conjunto M é de natureza arbitrária. Vamos estudar operadores definidos somente em espaços métricos e cujas imagens são elementos de espaços métricos. Consideremos E e M subconjuntos de (X, ρ) e (X_1, ρ_1), respectivamente.

Definição 2.6. O operador $\mathcal{A}$, definido no conjunto $E \subset X$ com contradomínio em $M \subset X_1$ diz-se contínuo no ponto $x_0 \in X$ se para qualquer sucessão $\{x_n\}$ de pontos do conjunto E que converge (no sentido da métrica ρ) para o ponto $x_0 \in E$, a respectiva sucessão $\{y_n\} = \{\mathcal{A}x_n\}$ de pontos do conjunto M converge (no sentido da métrica ρ_1) para o ponto $y_0 = \mathcal{A}x_0$ do conjunto M.

Exemplo 2.3. O integral $\int\limits_a^x f(\zeta)d\zeta$ com limite de integração variável é um operador definido no conjunto de funções contínuas com imagem nesse mesmo espaço. Este operador é contínuo.

Exemplo 2.4. Suponhamos que no segmento $[a, b]$ é dada a função somável $f(x)$. O integral de Lesbegue[2] $\int\limits_a^x f(\zeta)d\zeta$ é operador dado no espaço de funções somáveis com imagem no espaço de funções absolutamente contínuas. A continuidade deste operador depende de como introduzimos a métrica no espaço de funções somáveis.

De um modo geral, para operadores contínuos não se aplicam os teoremas sobre funções contínuas, contudo para os operadores lineares esta generalização, dum certo modo, tem lugar. Vamos demonstrar alguns teoremas relacionados com operadores contínuos (e consequentemente, com funcionais e funções contínuas). Estes teoremas caracterizam uma série de propriedades de operadores contínuos definidos em conjuntos compactos de espaços métricos. Eis algumas questões que seria bom responder:

[2]Henri Lesbesgue (1875-1941) - matemático francês

1) o conjunto duma função contínua num conjunto fechado é também fechado?

2) se uma função é contínua a sua inversa é também contínua?

Teorema 2.3. O conjunto imagem de um operador contínuo dado num conjunto compacto dum espaço métrico é também um conjunto compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ um operador contínuo dado no conjunto compacto $E \subset X$. Seja M o contradomínio do operador $\mathcal{A}$ no espaço métrico X_1. Para demonstrar que E é um conjunto compacto precisamos demonstrar que de um sistema infinito qualquer $\sum_M$ de conjuntos abertos g_α de X_1 que cobrem o conjunto E, pode-se extrair um sistema finito de conjuntos g_α que cobre E. O sistema $\sum_E$ de conjuntos abertos G_α são co-imagens dos conjuntos $g_\alpha = \mathcal{A}G_\alpha$ e cobre o conjunto E, então o respectivo sistema de conjuntos abertos g_α cobre o conjunto M.
■

Teorema 2.4. A aplicação inversa duma aplicação injectiva contínua dum conjunto compacto é contínua.

Capítulo 3

CRITÉRIOS DE COMPACTICIDADE EM ESPAÇOS DE BANACH

3.1 Critérios gerais de compacticidade

O teorema de Bolzano[1]-Weierstrass[2] afirma que de qualquer sucessão limitada de pontos dum espaço euclidiano pode-se extrair uma subsucessão convergente. Contudo, este facto nem sempre tem lugar em todos espaços métricos.

Exemplo 3.1. A sucessão de pontos

$$x_1\,(1,0,0,\ldots)\,,\ x_2\,(0,1,0,\ldots)\,,\ \ldots$$

está situada na esfera de raio 1, por conseguinte ela é limitada, mas desta sucessão não podemos extrair uma subsucessão convergente, pois a distância entre dois pontos quaisquer da sucessão é $\rho(x_i,x_k)=1,\ i\neq k$.

Definição 3.1. Seja A um conjunto do espaço métrico (X,ρ). Diremos que A é **compacto** se de qualquer sucessão infinita de pontos deste conjunto pode-se extrair uma subsucessão convergente [1], [2], [8], [9].

[1]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) - matemático checo

[2]Karl Theodor Wilhem Weierstrass (1815-1897) - matemático alemão

Definição 3.2. Se os limites das subsucessões pertencem a A diremos que A é **fracamente compacto** [8], [9]. Se os limites das subsucessões pertencem a X e não pertencem, talvez, ao conjunto A, então A diz-se **compacto** no espaço X.

Observação 3.1. Desta definição segue que, para o conjunto ser fracamente compacto é necessário e suficiente que ele seja compacto no espaço X e fechado.

Vejamos algumas propriedades de conjuntos compactos.

Lema 3.1. Qualquer conjunto infinito e limitado de pontos do espaço euclidiano $n-$dimensional é compacto.

Lema 3.2. Qualquer conjunto compacto é limitado.

Demonstração. Suponhamos o contrário, isto é, que o conjunto é compacto e não limitado. Neste caso pode-se sempre construir uma sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ do conjunto dado tal, que

$$\rho(x_1, x_n) \geq n, \quad \rho(x_k, x_{k+1}) \geq 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Nenhuma subsucessão desta sucessão é fundamental. Esta contradição demonstra que a suposição feita é falsa . ■

Vejamos agora um critério mais geral de compacticidade dum conjunto dum espaço métrico, que é justo para qualquer espaço métrico.

Definição 3.3. Diremos que o conjunto E do espaço métrico (X, ρ) é $\varepsilon-$rede para o conjunto $M \subset X$, onde $\varepsilon > 0$ é um real arbitrário, se para cada ponto $x \in M$ existe um ponto $\bar{x} \in E$ tal, que $\rho(x, \bar{x}) < \varepsilon$.

Teorema 3.1. (de Hausdorff) Para que o conjunto M, do espaço métrico (X, ρ), seja compacto é necessário (e caso X seja completo é suficiente) que para qualquer $\varepsilon > 0$ exista uma $\varepsilon-$rede finita..

Demonstração. Começaremos por demonstrar a necessidade. Seja M um conjunto compacto e $\varepsilon > 0$. Tomamos um ponto $x_1 \in M$, então o ponto x_1 é uma $\varepsilon-$rede, isto é, $\rho(x, x_1) < \varepsilon$, onde x é qualquer ponto de M, ou existem pontos do conjunto M que se encontram de x_1 a uma distância superior a ε. Tomamos um destes pontos e vamos denotá-lo por x_2. Então x_1 e x_2 formam uma $\varepsilon-$rede para M ou existem pontos do conjunto M tais, que a distância até x_1 e x_2 é superior a ε. Continuando com este pensamento construímos a sucessão de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Esta sucessão irá interromper-se num dado momento, pois caso contrário no conjunto compacto M estaria contida uma sucessão infinita da qual não seria possível extrair uma subsucessão convergente, pois a distância entre dois pontos quaisquer da sucessão é maior ou igual a ε. Assim, o conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_k$ é uma $\varepsilon-$rede para $\varepsilon > 0$. Vamos demonstrar a suficiência. Suponhamos que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma $\varepsilon-$rede finita. Seja $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão decrescente e $\varepsilon_n \to 0$. Construímos, para cada ε_l $(l = 1, 2, \ldots)$, a $\varepsilon-$rede:

$$x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{k_1}^1,$$

$$x_2^1, x_2^2, \ldots, x_{k_2}^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tomamos agora uma sucessão qualquer $\{\bar{x}_m\}$ de pontos do conjunto M e demonstramos que dela podemos extrair uma subsucessão convergente. Vamos cercar cada ponto da $\varepsilon-$rede com uma esfera de raio ε_1 com centros nos pontos da ε_1-rede: $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{k_1}^1$. Então, todos os pontos da sucessão $\{\bar{x}_m\}$ encontram-se dentro das esferas construídas. Como os pontos da sucessão são um número infinito e as esferas são um número finito, então pelo menos uma das esferas construídas irá conter um número infinito de pontos da sucessão $\{\bar{x}_m\}$. Vamos denotar esta esfera por T_1 e o conjunto infinito de pontos da sucessão T_1 denotamos por M_1. Consideramos os pontos da ε_2-rede que pertencem a T_1. Cercamos cada uma delas com uma esfera de raio ε_2 e centro neste ponto. Todos os pontos do conjunto encontram-se dentro da esfera de raio ε_2. Pelo menos uma destas esferas, que denotaremos por T_2, irá conter um subconjunto infinito M_2 do conjunto M_1. Continuando este processo obtemos a sucessão de esferas $T_1 \supset T_2 \supset \ldots$, cuja sucessão de raios tende para zero. Escolhemos pontos da sucessão $\{\bar{x}_m\}$ tais que se cumprem as condições:

$$\{\bar{x}_{m_1} \in T_1,\ \bar{x}_{m_1} \notin T_2\}, \quad \{\bar{x}_{m_2} \in T_2,\ \bar{x}_{m_2} \notin T_3\}, \quad \ldots$$

Então, a sucessão $\{\bar{x}_{m_l}\}$ é uma subsucessão fundamental da sucessão $\{\bar{x}_m\}$ cujo limite pertence a X devido ao facto de X ser completo, logo a sucessão $\{\bar{x}_m\}$ converge. ■

3.2 Compacticidade de conjuntos do espaço C

No espaço de funções contínuas C existem conjuntos infinitos limitados de funções contínuas dos quais não se podem extrair sucessões convergentes (no sentido de convergência da métrica em C). Assim, por exemplo, vejamos o conjunto de funções $x_1, x_2, x_3, \dots$, do espaço $C[0,1]$, onde $x_n = x^n$. É fácil ver que esta sucessão limitada no segmento $[0,1]$ tem limite igual a

$$y = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Podemos ver que y é uma função descontínua e, portanto, não pertence a C. Qualquer subsucessão desta sucessão converge para esta mesma função descontínua , isto é, não irá convergir no espaço $C[0,1]$.

Vamos agora estudar o critério de compacticidade em C. Começamos por introduzir duas definições [9], [11], [12].

Definição 3.4. As funções $f(\cdot)$ dum certo conjunto M chamam-se **uniformemente limitadas** se existe uma constante k_0 para todas as funções deste conjunto tal que $|f(\cdot)| \leq k_0$.

Definição 3.5. As funções $f(\cdot)$ dum certo conjunto M chamam-se **uniexponencialmente contínuas** se $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ se $|x_1 - x_2| < \delta$ para quaisquer x_1 e x_2 e para qualquer $f(\cdot) \in M$.

Teorema 3.2. (de Ascoli[3]) Para que o conjunto M de funções $f(\cdot)$ do espaço C seja compacto é necessário e suficiente que as funções deste conjunto M sejam uniformemente limitadas e uniexponencialmente contínuas.

Demonstração. Suponhamos que o conjunto M de funções $f(\cdot)$ contínuas, é compacto. Vamos demonstrar que as funções $f(\cdot)$ são uniformemente limitadas e uniexponencialmente

[3]Giulio Ascoli (1843-1896) – matemático italiano

contínuas. A limitação uniforme advém da limitação do conjunto M, pois a limitação do conjunto de funções, segundo a métrica de C, significa limitação uniforme para este conjunto de funções. Para demonstrarmos a uniexponencialidade contínua vamos pegar um $\varepsilon > 0$ e construímos para o conjunto M uma $\frac{\varepsilon}{3}-$rede finita: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$. Todas as funções do espaço C e, consequentemente, todas as funções da $\frac{\varepsilon}{3}-$rede são contínuas e cada uma delas é uniformemente contínua no segmento $[a,b]$, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$ e qualquer $i, i = 1, 2, \ldots, k$, existe $\delta > 0$ que não depende de x e

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

sob condição de que $|x_1 - x_2| < \delta$, onde x_1, x_2 são pontos do segmento $[a,b]$. Agora basta tomar $\delta = \min \delta_i$ e então, para qualquer função da $\frac{\varepsilon}{3}-$rede, cumpre-se a condição:

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

onde x_1, x_2 são pontos do segmento $[a,b]$ que satisfazem a condição $|x_1 - x_2| < \delta$. Daqui, para qualquer função $f(x)$ pertencente a M e a respectiva função $f_i(x)$ da $\frac{\varepsilon}{3}-$rede tal, que $|f(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x \in [a,b]$, são justas as relações:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f_i(x_1) + f_i(x_1) - f_i(x_2) + f_i(x_2) - f(x_2)| \leq$$

$$\leq |f(x_1) - f_i(x_1)| + |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + |f_i(x_2) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ficou deste modo demonstrada a necessidade. Vamos agora demonstrar a suficiência que consiste na demonstração de que do facto do conjunto de funções M ser uniformemente limitado e uniexponencialmente contínuo implica que existe, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, uma $\varepsilon-$rede finita para o conjunto M, donde advém a compacticidade de M. Tomamos um ε qualquer e escolhemos δ tal, que para qualquer função $f(x) \in M$ verifica-se a desigualdade

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

se $|x_1 - x_2| < \delta$. O rectângulo $a \leq x \leq b$, $-k \leq y \leq k$ no plano xOy dividimos em rectângulos iguais:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad -k = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = k,$$

$$|x_{k+1} - x_k| < \delta, \quad |y_{k+1} - y_k| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Traçamos todas as possíveis quebradas contínuas $\varphi(x)$ constituídas de diagonais dos pequenos rectângulos. É fácil ver que tais quebradas são um número finito. Vamos agora mostrar que o conjunto das quebradas forma uma $\varepsilon-$rede finita para M. Realmente, tomamos do conjunto M qualquer função $f(x)$, seja $\varphi(x)$ uma quebrada tal, que

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_k) + f(x_k) - \varphi(x_k) + \varphi(x_k) - \varphi(x)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \varphi(x)|,$$

onde x_k é o ponto mais próximo de x. É evidente que $|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$ devido à continuidade uniforme da função $f(x)$, tal como $|x - x_k| < \delta$ e $|f(x_k) - \varphi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\varphi(x_k) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Por conseguinte, as quebradas formam uma ε-rede finita.

3.3 Compacticidade de conjuntos no espaço Lp

Vejamos agora alguns teoremas de compacticidade no espaço $L_p[0,1]$ [8], [9], [12].

Teorema 3.3. (de Riezs) As duas afirmações são equivalentes.

1) O conjunto $K = \{x(t)\} \subset L_p[0,1]$ é compacto.

2) As funções $x(t) \in L_p[0,1]$ são uniformemente limitadas segundo a norma em $L_p[0,1]$ e uniexponencialmente contínuas em média, isto é,

$$\int_0^1 |x(t)|^p \, dt \leq c^p, \tag{3.1}$$

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon^p, \tag{3.2}$$

para $0 < h < \delta(\varepsilon)$ e $\forall\, x \in K$.

Demonstração. A necessidade de que as funções de K sejam uniformemente limitadas é evidente. Vamos mostrar que as funções de K são uniexponencialmente contínuas em média. Uma vez que K é compacto, então para qualquer $\varepsilon > 0$ para este conjunto existe uma $\frac{\varepsilon}{3}-$rede finita $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Como cada função $L_p[0,1]$ é contínua em média, então para qualquer i existe δ_i tal que

$$\int_0^1 |x_i(t+h) - x_i(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

para $0 < h < \delta_i$. Seja $\delta = \min_i \delta_i$. Então,

$$\int_0^1 |x_i(t+h) - x_i(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

para $0 < h < \delta$ e para todos $i = 1, 2, \ldots, n$. Pegamos uma função qualquer $x(t) \in K$. Existe uma função $x_i(t)$ tal, que

$$\int_0^1 |x(t) - x_i(t)|^p \, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p,$$

para $0 < h < \delta$ temos

$$\left(\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |x(t+h) - x_i(t+h)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_0^1 |x_i(t+h) - x_i(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |x_i(t) - x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \left(\int_0^1 |x(t+h) - x_i(t+h)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Todavia,

$$\int_0^1 |x(t+h) - x_i(t+h)|^p \, dt = \int_h^1 |x(s) - x_i(s)|^p \, ds \leq \int_0^1 |x(s) - x_i(s)|^p \, ds < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.$$

Destas duas últimas desigualdades advém que

$$\left(\int_0^1 |x(t+h)-x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

para $0 < h < \delta$ e como $x(t)$ é uma função qualquer, então a necessidade ficou demonstrada.

Vamos agora demonstrar a suficiência. Vejamos a **função média de Steklov** [4] [11]

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau.$$

Temos

$$|x_h(t)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| \le \frac{1}{2h}(2h)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(\tau)|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |x(\tau)|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

e

$$|x_h(t+u)-x_h(t)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t+u-h}^{t+u+h} x(\tau)d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(\tau+u)d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|x(\tau+u)-x(\tau)|\,d\tau \le \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(\tau+u)-x(\tau)|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |x(\tau+u)-x(\tau)|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

Das duas condições (3.1) e (3.2) e das desigualdades (3.3) e (3.4) segue que, para h fixo, as funções da família $x_h(t)$ para $x(t) \in K$ são uniformemente limitadas e uniexponencialmente contínuas, consequentemente a família $\{x_h(t)\}$ é compacta no sentido de convergência uniforme, logo é compacta no sentido de convergência em média com expoente p. Por outro lado,

$$|x(t)-x_h(t)| \le \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}|x(t)-x(\tau)|\,d\tau = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|x(t)-x(t+\tau)|\,d\tau \le$$

[4] Vladimir Andreevich Steklov (1864–1926) – matemático russo

$$\leq \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p \, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daqui,

$$\int_0^1 |x(t) - x_h(t)|^p \, d\tau \leq \frac{1}{2h} \int_0^1 \left[\int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|^p \, d\tau\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left[\int_0^1 |x(t) - x(t+\tau)|^p \, dt\right] d\tau < \frac{1}{2h}\varepsilon^p \int_{-h}^{h} d\tau = \varepsilon^p$$

pois, devido a (3.2), $\int_0^1 |x(t+\tau) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon^p$ se $|\tau| < \delta$. Deste modo, a família $\{x_h(t)\}$ forma uma $\varepsilon-$rede para K e como esta $\varepsilon-$rede é compacta, então pelo teorema de Hausdorff o conjunto K é compacto. ■

3.4 Critérios de compacticidade no espaço B

Qualquer que seja função $x \in L_2$ vamos defini-la fora do segmento $[0,1]$ como sendo igual a zero. Na função

$$x_\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho} \int_{t-\rho}^{t} x(s) ds,$$

onde $\rho > 0$ (o integral da parte direita existe qualquer que seja $x \in L_1$) fazemos corresponder a **função média** x_ρ, obtendo deste modo um operador linear definido no espaço L_1, que denotaremos por $\mathcal{A}_\rho x \stackrel{\text{def}}{=} x_\rho$.

Lema 3.3. O operador $\mathcal{A}_\rho$ é completamente contínuo e actua do espaço B no espaço C, sendo $\|\mathcal{A}_\rho\|_{B\to C} \leq 1$ [1], [2].

Demonstração. Seja $x \in B$, mostremos que a função x_ρ é limitada. Aplicando a desigualdade de Holder[5] obtemos

$$|x_\rho(t)|^2 = \left(\frac{1}{\rho}\int\limits_{t-\rho}^{t} x(s)ds\right)^2 \le \frac{1}{\rho^2}\rho\int\limits_{t-\rho}^{t}|x(s)|^2\,ds = \frac{1}{\rho}\int\limits_{t-\rho}^{t}|x(s)|^2\,ds \le$$

$$\le \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{t-\rho}^{t}|x(s)|^2\,ds\right) \le \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}|x(s)|^2\,ds\right) \le \frac{1}{\rho}\sup_{0<t<1}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}|x(s)|^2\,ds\right) = \frac{1}{\rho}\|x\|_B^2. \quad (3.5)$$

Vamos mostrar que x_ρ é uma função contínua. Definindo $x(t)\equiv 0$ se $t\notin[0,1]$, temos para $0<t<t_1<1,\ t-\rho\ge 0$ e $0<\rho<1$:

$$|x_\rho(t_1)-x_\rho(t)| = \frac{1}{\rho}\left|\int\limits_{t_1-\rho}^{t_1} x(\tau)d\tau - \int\limits_{t-\rho}^{t} x(\tau)d\tau\right| = \frac{1}{\rho}\left|\int\limits_{t}^{t_1} x(\tau)d\tau - \int\limits_{t-\rho}^{t_1-\rho} x(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\rho}\left(\left|\int\limits_{t}^{t_1} x(\tau)d\tau\right| + \left|\int\limits_{t-\rho}^{t_1-\rho} x(\tau)d\tau\right|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\rho}\left(\int\limits_{t}^{t_1} d\tau\right)^{\frac12}\left(\int\limits_{t}^{t_1}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12} + \frac{1}{\rho}\left(\int\limits_{t-\rho}^{t_1-\rho} d\tau\right)^{\frac12}\left(\int\limits_{t-\rho}^{t_1-\rho}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12} =$$

$$= \frac{1}{\rho}(t_1-t)^{\frac12}\left[\left(\int\limits_{t}^{t_1}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12} + \left(\int\limits_{t-\rho}^{t_1-\rho}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12}\right] \le \frac{2}{\rho}(t_1-t)^{\frac12}\left(\int\limits_{t}^{t_1}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12} \le$$

$$\le \frac{2}{\rho}(t_1-t)^{\frac12}\left(\int\limits_{0}^{t_1}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12} \le \frac{2}{\rho}(t_1-t)^{\frac12}\frac{1}{\sqrt{t_1}}\left(\int\limits_{0}^{t_1}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12} \le \frac{2}{\rho}\sqrt{t_1-t}\|x\|_B.$$

Para $0<t<t_1<1,\ t_1-\rho<0$ e $0<\rho<1$ temos:

$$|x_\rho(t_1)-x_\rho(t)| \le \frac{1}{\rho}\sqrt{t_1-t}\left(\int\limits_{t}^{t_1}|x(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac12} \le \frac{1}{\rho}\sqrt{t_1-t}\|x\|_B.$$

De modo análogo, para $0<t<t_1<1,\ t_1-\rho\ge 0$ e $t-\rho<0$ temos:

$$|x_\rho(t_1)-x_\rho(t)| \le \frac{2}{\rho}\sqrt{t_1-t}\|x\|_B, \quad (3.6)$$

[5]Otto Holder (1859-1937) - matemático alemão

daqui concluímos que a função x_ρ é contínua para valores fixos de $\rho > 0$. As desigualdades (3.5) e (3.6) permitem afirmar que o operador $\|\mathcal{A}_\rho\|_{B\to C} \leq \rho^{-\frac{1}{2}}$. Além disso, este operador é compacto porque, devido as desigualdades (3.5) – (3.6), a imagem $\mathcal{A}_\rho M$ de qualquer conjunto limitado $M \subset B$ é relativamente compacto em C. Mostremos que $\forall\ x \in B,\ x_\rho = \mathcal{A}_\rho x \in B$. Da desigualdade (3.5), para valores fixos de $t \in (0, 1]$, temos:

$$\int_0^t |x_\rho(s)|^2\, ds \leq \frac{1}{\rho}\int_0^t \left(\int_{s-\rho}^{s} |x(\tau)|^2\, d\tau\right) ds = \frac{1}{\rho}\int_0^t \left(\int_{-\rho}^{0} |x(s+\sigma)|^2\, d\sigma\right) ds =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_{-\rho}^0 \left(\int_0^t |x(s+\sigma)|^2\, ds\right) d\sigma = \frac{1}{\rho}\int_{-\rho}^0 \left(\int_{\sigma}^{\sigma+t} |x(\tau_1)|^2\, d\tau_1\right) d\sigma \leq \frac{1}{\rho}\int_{-\rho}^0 \left(\int_0^t |x(\tau_1)|^2\, d\tau_1\right) d\sigma \leq$$

$$\leq \int_0^t |x(\tau_1)|^2\, d\tau_1,$$

implicando deste modo que $x_\rho \in B$ e $\|x_\rho\|_B \leq \|x\|_C$. Isto significa que o operador $A_\rho : B \to C$ é limitado, sendo $\|\mathcal{A}_\rho\|_{B\to C} \leq 1$. ■

Lema 3.4. Sejam B e B_1 dois espaços de Banach tais, que o espaço B_1 está contínua e densamente incluido em B. Suponha-se que para $\rho > 0$, o operador $\mathcal{A}_\rho :\ B \to B$ é limitado, $\mathcal{A}_\rho B \subset B_1$, o operador $\mathcal{A}_\rho :\ B_1 \to B_1$ é limitado e a família de operadores $\{\mathcal{A}_\rho\}$ $(\rho > 0)$, quando $\rho \to 0$, converge pontualmente em B_1 para o operador identidade, isto é, para cada $x \in B$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $0 < \rho < \delta$, é justa a desigualdade $\|\mathcal{A}_\rho x - x\|_{B_1} < \varepsilon$. Se o conjunto $M \subset B$ é relativamente compacto em B, então:

1) M é limitado em B;

2) a família de operadores $\{\mathcal{A}_\rho\}$ $(\rho > 0)$, quando $\rho \to 0$, uniformemente em M converge para o operador identidade I_B, isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $0 < \rho < \delta$ e $x \in M$, é justa a desigualdade $\|\mathcal{A}_\rho x - x\|_B < \varepsilon$.

Lema 3.5. Sejam B e B_1 dois espaços de Banach tais, que o espaço B_1 está continuamente incluído em B. Suponha-se que, para qualquer $\rho > 0$, o operador linear $\mathcal{A}_\rho : B \to B$ é limitado, $\mathcal{A}_\rho B \subset B_1$, sendo o operador $\mathcal{A}_\rho : B_1 \to B_1$ completamente contínuo. Suponhamos que o conjunto $M \subset B$ satisfaz as condições:

1) M é limitado em B;

2) a família de operadores $\{\mathcal{A}_\rho\}$ $(\rho > 0)$, quando $\rho \to 0$, uniformemente em M converge para o operador identidade I_B.

Então o conjunto M é relativamente compacto em B.

Teorema 3.4. Seja M um conjunto do espaço B, M é relativamente compacto em B só e somente só, quando:

1) o conjunto M é limitado segundo norma do espaço B;

2) para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\varepsilon > \delta$ tal, que para qualquer função $x \in M$, $\|x - x_\rho\|_B < \varepsilon$, para $0 < \rho < \delta$.

Demonstração. A necessidade advém imediatamente do Lema 3.3 e Lema 3.4, a suficiência deriva do Lema 3.5. ■

Capítulo 4

Aplicações da Análise funcional na Teoria de Equações Integrais

4.1 Aplicação do método de aplicações de contracção

Seja C um espaço de funções contínuas. Vamos definir neste espaço a aplicação

$$\mathcal{A}y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx,$$

onde $f(x,y)$ é uma função contínua que satisfaz no rectângulo

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \quad M \le y \le N\}$$

a **condição de Lipschitz**[1] [9], [13] em relação ao segundo argumento, isto é, para quaisquer pontos (x, y_1) e (x, y_2) pertencentes a G cumpre-se a condição

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|\,,$$

onde L é um número não negativo dependente da região G e que não depende da posição dos pontos (x, y_1) e $(x, y_2) \in G$. Vamos mostrar que esta aplicação é de contracção se considerarmos

[1] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903) – matemático alemão

$|x - x_0|$ demasiado pequeno. Realmente, sejam y e y_1 dois pontos quaisquer do espaço C,

$$\rho(\mathcal{A}y, \mathcal{A}y_1) = \sup_{a \leq x \leq b} |\mathcal{A}y - \mathcal{A}y_1| \leq \sup_{a \leq x \leq b} \int_{x_0}^{x} |f(x,y) - f(x,y_1)| \, dx \leq$$

$$\leq \sup_{a \leq x \leq b} \int_{x_0}^{x} L\,|y - y_1| \, dx = L\,|x - x_0| \sup_{a \leq x \leq b} |y - y_1| = \theta \rho(y, y_1),$$

onde $\theta = L\,|x - x_0| < 1$ se $|x - x_0| < \frac{1}{L}$. Tendo em conta que o espaço C é completo temos que existe um único ponto fixo da aplicação de contracção $\mathcal{A}$, isto é, a equação integral

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y) dx \tag{4.1}$$

possui única solução se:

1) $f(x,y)$ satisfaz a condição de Lipschitz com constante L;

2) $|x - x_0| < \dfrac{1}{L}$.

Uma vez que a equação integral (4.1) é equivalente à equação

$$y' = f(x,y) \tag{4.2}$$

com a condição inicial $y_0 = y(x_0)$, então fica demonstrado a existência e unicidade de solução para a equação diferencial (4.2) quando se cumpre a condição (2). Considerando a solução da equação diferencial (4.2) como limite da sucessão de funções $y_1 = \mathcal{A}y_0$, $y_2 = \mathcal{A}y_1, \ldots$ podemos considerar as funções y_1, $y_2, \ldots$ como sendo as soluções iterativas aproximadas. Facilmente podemos achar a avaliação

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \mu L^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

onde $y(x)$ é a solução de (4.1) e $y_n(x)$ é a sua n-ésima iteração, $\mu = \sup\{|M|, |N|\}$. Vamos agora considerar a equação

$$x - f(x) = 0 \tag{4.3}$$

e suponhamos que a função $f(x)$ é contínua e diferenciável no segmento $[a,b]$ e satisfaz neste segmento as condições

$$f(x) \in [a,b] \quad \text{se } x \in [a,b], \quad f'(x) \leq k < 1.$$

Nestas condições a equação (4.3) possui em $[a,b]$ uma única raíz real. Isto demonstra-se usando o método de aplicações de contracção. Vejamos o conjunto de números reais com métrica $\rho(x',x'') = |x' - x''|$ e seja $\mathcal{A}x = f(x)$. Se demonstrarmos que esta aplicação é de contracção, consequentemente demonstraremos a existência de um único ponto fixo x, por outras palavras, demonstraremos a existência e unicidade da raíz da equação $x = f(x)$. Seja

$$\rho(\mathcal{A}x', \mathcal{A}x'') = |\mathcal{A}x' - \mathcal{A}x''| = |f(x') - f(x'')| =$$
$$= |f'(\varsigma)| \cdot |x' - x''| \leq k\,|x' - x''| = k\rho(x',x'') \tag{4.4}$$

e como $k < 1$, então a aplicação é de contracção. Por conseguinte, a equação (4.3) possui uma única raíz. Seja x_0 um ponto arbitrário. É óbvio que a sucessão de pontos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots$ é fundamental e o seu limite $x = \lim x_n$ é a raíz da equação (4.3), sendo x_n a sua n-ésima aproximação. Colocando em (4.4) $x' = x_n$, $x'' = x_{n+p}$ obtemos

$$|x_n - x_{n+p}| \leq k^n\,|x_0 - x_p| \leq k^n\,|x_0 - x_1|\,(1 + k + \cdots + k^p).$$

Fazendo a transição de limite quando $p \to \infty$ teremos $|x_n - x| \leq k^n \dfrac{|x_0 - x_1|}{1-k}$.

Seja $f(x,y)$ uma função definida na região

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \quad -\infty \leq y \leq +\infty\},$$

$f(x,y)$ é contínua em relação a x e possui derivada f'_y limitada, $0 < m \leq f'_y(x,y) \leq M$. Então, a equação

$$f(x,y) = 0 \tag{4.5}$$

possui uma única solução no segmento $[a,b]$. Vamos considerar a aplicação do espaço C em si próprio, dada pela expressão $\mathcal{A}y = y - \dfrac{1}{M}f(x,y)$, sejam y_1 e y_2 pontos do espaço C então,

$$\rho(\mathcal{A}y_1, \mathcal{A}y_2) = |\mathcal{A}y_1 - \mathcal{A}y_2| = \left|\left[y_1 - \frac{1}{M}f(x,y_1)\right] - \left[y_2 - \frac{1}{M}f(x,y_2)\right]\right| =$$

$$= \left|(y_1 - y_2) - \frac{1}{M} f'_y\left[x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)\right](y_1 - y_2)\right| \leq \left|1 - \frac{m}{M}\right| \cdot |y_1 - y_2| = \theta\rho(y_1, y_2),$$

onde $0 < \theta < 1$. Por conseguinte, para qualquer ponto y_0 pertencente a C converge a sucessão $y_1 = \mathcal{A}y_0$, $y_2 = \mathcal{A}y_1, \ldots$ e $\lim y_n = y$ é única solução contínua no segmento $[a, b]$ e as suas iterações são as funções y_0, y_1, $y_2, \ldots$. Este resultado vamos aplicar no seguinte problema. Suponhamos que é preciso calcular o valor da função contínua $y = \varphi(x)$ para determinado valor do argumento x, quando o seu cálculo directo é complicado, então escrevemos uma outra função na forma implícita $f(x, y) = 0$, e se $f(x, y)$ é contínua e possui derivada f'_y limitada, isto é, $0 < m \leq |f'_y| < M$, então

$$f(x, y_n) = f(x, y_n) - f(x, y) = (y_n - y) f'_y(x, \varsigma_n), \text{ onde } \varsigma_n = y + \theta(y - y_n), \quad 0 < \theta < 1,$$

logo

$$y = y_n - \frac{f(x, y_n)}{f'_y(x, \varsigma_n)}.$$

Sendo o valor ς_n desconhecido, ele é substituido pelo valor aproximado $\varsigma_n = y_n$ e depois usa-se a fórmula iterativa

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(x, y_n)}{f'_y(x, y_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.6}$$

Exemplo 4.1. Para determinar a raíz quadrada de um número real considera-se a função $F(x, y) = y^2 - x = 0$ e a fórmula (4.6) toma a forma

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

4.2 Operadores compactos

Definição 4.1. Sejam E_x e E_y dois espaços lineares normados. Diremos que o operador

$$\mathcal{A} : E_x \to E_y$$

é compacto se ele aplica qualquer conjunto limitado do espaço E_x num conjunto compacto do espaço E_y.

É óbvio que qualquer operador compacto [4], [6] é limitado.

Exemplo 4.2. Sejam $E_x = E_y = C[0,1]$ e $(\mathcal{A}x)(t) = y(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds$, onde $K(t,s)$ é contínua no quadrado $\Omega = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq s \leq 1\}$. Vamos mostrar que o operador $\mathcal{A}$ é compacto. Seja $\{x(t)\}$ um conjunto limitado de funções de $C[0,1]$ isto é, $\exists\, r \in \mathbb{R}\ \forall x\ \in C : \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq r$. É evidente que a função

$$y(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

onde $x(t)$ é função contínua, é uniformemente limitada. Realmente se

$$\theta = \sup_{(t,s)\in\ \Omega} |K(t,s)|,$$

então $|y(t)| \leq \theta r$. Vamos mostrar que $y(t)$ são funções uniexponencialmente contínuas. Seja $\varepsilon > 0$. Devido ao facto de $K(t,s)$ ser contínua num compacto, então ela é uniformemente contínua pelo teorema de Cantor. Assim sendo, existe $\delta > 0$ tal, que $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \dfrac{\varepsilon}{r}$ para $|t_1 - t_2| < \delta$ e qualquer $s \in [0,1]$. Então

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \int\limits_0^1 |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,ds < \varepsilon$$

logo que $|t_1 - t_2| < \delta$ para todas funções $y(t)$ o que significa que $y(t)$ é uniexponencialmente contínua. Assim, devido ao teorema de Artsel, o conjunto $\{y(t)\}$ é compacto no sentido da métrica do espaço $C[0,1]$ e, portanto, o operador $\mathcal{A}$ é compacto.

Teorema 4.1. [15] O operador integral $\mathcal{A}$, cujo núcleo é $K(t,s)$, actua do espaço L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ no espaço C se e somente se:

1) para todos $t \in [0,1]$ a função $K(t,s)$ pertence ao espaço $L_{p'}$, onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$;

2) a função $\varphi(t) = \|K(t,s)\|_{L_p}$ $\quad (t \in [0,1])$ é limitada;

3) para qualquer subconjunto $[a,b] \subset [0,1]$ e para qualquer $t_0 \in [0,1]$ é justa a igualdade

$$\lim_{t\to t_0} \int\limits_a^b K(t,s)ds = \int\limits_a^b K(t_0,s)ds.$$

Observação 4.1. As condições 1) e 2), no caso quando $p > 1$, equivalem à desigualdade [15]

$$\int_0^1 |K(t,s)|^{p'}\,ds \le k < \infty,$$

para $t \in [0,1]$. No caso quando $p = 1$ estas condições equivalem a desigualdade

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{0\le s\le 1} |K(t,s)| \le k < \infty, \quad t \in [0,1];$$

Teorema 4.2. Suponhamos que o operador linear $\mathcal{A}$, com núcleo $K(t,s)$, actua do espaço L_p $(1 \le p \le \infty)$ no espaço C. Então o operador $\mathcal{A}$ é compacto só e somente só quando para qualquer $t_0 \in [0,1]$ é justa a igualdade

$$\lim_{t\to t_0} \|K(t,s) - K(t_0,s)\|_{L_{p'}} = 0. \tag{4.7}$$

A igualdade (4.7), para o caso $p > 1$, podemos escrever na forma

$$\lim_{t\to t_0} \int_0^1 |K(t,s) - K(t_0,s)|^{p'}\,dt = 0.$$

Observação 4.2. Os Teorema 4.1 e Teorema 4.2 descrevem completamente os núcleos dos operadores integrais que actuam de L_p $(1 \le p \le \infty)$ no espaço $C[0,1]$. Não é difícil fazer a verificação das condições do Teorema 4.1. Por exemplo, o operador integral $\mathcal{A}$ actua de qualquer espaço L_p $(1 \le p \le \infty)$ no espaço C e é completo se o núcleo $K(t,s)$ é contínuo. No Exemplo 4.2 vimos que $\mathcal{A} : C \to C$ com núcleo contínuo é compacto. Estes casos de actuação de operadores de C em C podemos considerar como operadores que actuam de L_∞ em C ou, então, de L_∞ em L_∞.

Teorema 4.3. Seja $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão de operadores compactos que actuam de E_x em E_y. Suponhamos que $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \to 0$, então $\mathcal{A}$ é um operador compacto.

Demonstração. Pede-se para demonstrar que $\mathcal{A}$ aplica qualquer conjunto limitado do espaço E_x num conjunto compacto do espaço E_y. Seja $M \subset E_x$ um conjunto limitado e r é uma constante tal que $\|x\| = r$ para qualquer $x \in M$. Para um $\varepsilon > 0$ existe um número n_0 tal que

$$\|\mathcal{A}_{n_0} - \mathcal{A}\| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Seja $\mathcal{A}(M) = G$ e $\mathcal{A}_{n_0}(M) = N$. O conjunto N é uma $\varepsilon-$rede para G. Realmente, pegando para qualquer $y \in G$ uma das suas co-imagens $x \in M$ e colocando $y_0 = \mathcal{A}_{n_0}x \in N$ teremos

$$\|y - y_0\| = \|\mathcal{A}x - \mathcal{A}_{n_0}x\| \leq \|\mathcal{A} - \mathcal{A}_{n_0}\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{r}r = \varepsilon.$$

Como, por outro lado, devido à compacticidade de $\mathcal{A}_{n_0}$ e limitação de M, o conjunto N é compacto, então obteremos que G, para qualquer $\varepsilon > 0$, possui uma $\varepsilon-$rede e por isso mesmo é compacto. Assim, o operador $\mathcal{A}$ aplica qualquer conjunto limitado num conjunto compacto, logo $\mathcal{A}$ é compacto. ■

Equações que contêm a incógnita sob sinal de integral chamam-se **equações integrais** [4], [6], [15]. Estas equações têm uma larga aplicação uma vez que muitos problemas da física, mecânica e técnica são reduzidos a equações integrais. Um exemplo de equação integral é

$$\varphi(t) = \lambda \int_G K[t, s, \varphi(s)]ds, \tag{4.8}$$

onde $\varphi(t)$ é a função desconhecida, K é uma função dada, G é a região de integração, λ é um parâmetro numérico. A primeira questão que surge quando estudamos equações integrais é a existência de solução para λ fixo, isto é, $\lambda = \lambda_0$. Se a equação tem solução para $\lambda = \lambda_0$ é interessante esclarecer se existirá solução para valores de λ muito próximos de λ_0, se estas soluções são únicas para cada valor fixo de λ e como estas soluções dependem de λ. Estas questões resolvem-se usando métodos da Análise Funcional. A questão de existência de solução para determinadas classes de equações está relacionada com a investigação da actuação do operador

$$\mathcal{A}\varphi(t) = \int_G K[t, s, \varphi(s)]ds$$

em diferentes espaços. Viu-se que, quando o operador é compacto, a demonstração do teorema de existência de solução faz-se usando o método de aplicações de contracção.

Consideremos a equação (4.8) e vamos denotar a sua parte direita por $\mathcal{A}\varphi(t)$ e temos a equação $\mathcal{A}\varphi(t) = \varphi(t)$ como sua solução e, por conseguinte, a solução de (4.8) é uma certa função que se transforma em si próprio por meio do operador, por outras palavras, é função invariante nesta transformação. O matemático polaco Shauder[2] obteve, em 1927, um princípio de existência de solução: *se no espaço de Banach o operador transforma um conjunto convexo numa parte compacta, então existe sempre um ponto fixo* [6].

Teorema 4.4. Seja $K(t,s,\varphi)$ uma função contínua segundo as variáveis t e s numa certa região G e suponhamos que para todos $|\varphi| \le L$, onde L é constante, cumpre-se a desigualdade

$$|K(t,s,\varphi_1) - K(t,s,\varphi_2)| < C\,|\varphi_1 - \varphi_2|\,,$$

onde C é constante. Então, para valores de λ demasiado pequenos, existe uma única solução contínua $\bar{\varphi}$ da equação (4.8) que satisfaz a condição $|\bar{\varphi}(t)| \le L$. Se φ_1 é uma função contínua qualquer que satisfaz a desigualdade

$$|\bar{\varphi}_1(t)| \le L \quad \text{e} \quad \varphi_n(t) = \lambda \int\limits_G K(t,s,\varphi_{n-1})ds, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

então φ_n converge uniformemente para $\bar{\varphi}$.

Demonstração. Consideremos o operador

$$\mathcal{A}\varphi = \lambda \int\limits_G K(t,s,\varphi)ds,$$

definido na esfera $|\varphi(t)| \le L$ do espaço de funções contínuas. É evidente que se $\mathcal{A}\varphi$ é uma função contínua,

$$|\mathcal{A}\varphi| \le \lambda \int\limits_G |K(t,s,\varphi)|\,ds.$$

Com base nas condições do teorema

$$|K(t,s,\varphi)| < |K(t,s,0)| + c\,|\varphi|\,,$$

consequentemente

$$|\mathcal{A}\varphi| \le \lambda \left[\int\limits_G |K(t,s,0)|\,ds + c \int\limits_G |\varphi|\,ds \right].$$

[2]Juliusz Pawel Shauder (1899–1943) – matemático austríaco

Uma vez que, segundo a condição, $K(t,s,0)$ é uma função contínua, então $\int\limits_G |K(t,s,0)|\,ds \leq \alpha$ para $t \in G$ e temos que $|\mathcal{A}\varphi| \leq \lambda(\alpha + cL\,|G|)$, onde $|G|$ é a medida de G. Por conseguinte, para valores de λ pequenos $|\mathcal{A}\varphi| < L$, isto é, a esfera $|\varphi(t)| \leq L$ transforma-se numa sua parte e além disso

$$\sup|\mathcal{A}\varphi_1 - \mathcal{A}\varphi_2| \leq \lambda \int\limits_G \sup|K(t,s,\varphi_1) - K(t,s,\varphi_2)|\,ds \leq$$

$$\lambda c \int\limits_G \sup|\varphi_1 - \varphi_2|\,ds = \lambda c \sup|\varphi_1 - \varphi_2|\,|G|$$

então para valores pequenos de λ

$$\rho(\mathcal{A}\varphi_1, \mathcal{A}\varphi_2) \leq \theta\rho(\varphi_1, \varphi_2),$$

isto é, com base no teorema de Cacciopolli o teorema está demonstrado. ■

No espaço C uma classe mais geral de operadores compactos lineares $\mathcal{A}\varphi$ pode escrever-se na forma

$$\mathcal{A}\varphi = \int\limits_a^t K(t,s)\varphi(s)ds,$$

onde $K(t,s)$ é uma função contínua. Salientam-se dois tipos de equações integrais:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

e

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^t K(t,s)\varphi(s)ds$$

que se chamam **equações integrais de Fredholm**[3] e **Volterra** [5], [9] respectivamente. O operador

$$\mathcal{A}\varphi = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\varphi(s)ds,$$

[3]Erik Ivar Fredholm (1866–1927) - matemático sueco

definido no espaço C é linear. Suponhamos que $\varphi_n(t)$ converge para $\varphi(t)$ segundo a métrica de C, isto é, converge uniformemente em $[a,b]$. Então, podemos fazer a transição sob sinal de integral e temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K(t,s)\varphi_n(s)ds = \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds,$$

ou

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{A}\varphi_n = \mathcal{A}\varphi,$$

isto é, o operador é contínuo. Este operador é limitado. Realmente,

$$\|\mathcal{A}\varphi\| = \sup_{a\le t\le b}|\mathcal{A}\varphi(t)| \le \sup_{a\le t,s\le b}|K(t,s)| \sup_{a\le t\le b}|\varphi(t)|\,(b-a) \le M \sup_{a\le t\le b}|\varphi(t)| = M\|\varphi\|,$$

onde $M=(b-a)\sup\limits_{a\le t,s\le b}|K(t,s)|$. Facilmente verifica-se que o operador de Fredholm é compacto. Seja $\mathcal{A}\varphi(t)$ um conjunto limitado de funções do espaço C. É evidente que

$$|\mathcal{A}\varphi(t)| = \left|\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds\right| \le MN(b-a),$$

onde $M=\sup|K(t,s)|$ no quadrado $a\le t\le b$, $a\le s\le b$. As funções $\mathcal{A}\varphi(t)$ são uniexponêncialmente contínuas. Para qualquer $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para $|t_1-t_2|<\delta$ e para quaisquer $s\in[a,b]$ temos $|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{N}$. Então,

$$|\mathcal{A}\varphi(t_1)-\mathcal{A}\varphi(t_2)| \le \int_a^b |K(t,s)-K(t,s)|\,|\varphi(s)|\,ds < \varepsilon$$

logo, pelo teorema de Ascoli [5], [6], [9] o conjunto $\{\mathcal{A}\varphi(t)\}$ é compacto.

Considere-se a equação de segunda ordem

$$y''+a_1(t)y'+a_2(t)y=f(t), \quad y(0)=c_0, \quad y'(0)=c_1. \tag{4.9}$$

Fazendo $y''=\varphi(t)$ temos

$$y'=\int_0^t \varphi(s)ds+c_1, \quad y=\int_0^t (t-s)\varphi(s)ds+c_1t+c_0.$$

Explorámos a fórmula

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \dots \int_{t_0}^{t} f(t)dt}_{n \text{ vezes}} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s)ds.$$

Assim, a equação diferencial (4.9) escrevemos na forma

$$\varphi(t) + \int_0^t a_1(t)\varphi(s)ds + c_1 a_1(t) + \int_0^t a_2(t)(t-s)\varphi(s)ds + c_1 t a_2(t) + c_0 a_2(t) = F(t)$$

ou

$$\varphi(t) + \int_0^t [a_1(t) + a_2(t)(t-s)]\varphi(s)ds = F(t) - c_1 a_1(t) - c_1 t a_2(t) - c_0 a_2(t).$$

Colocando $K(t,s) = -[a_1(t) + a_2(t)(t-s)]$, $f(t) = F(t) - c_1 a_1(t) - c_1 t a_2(t) - c_0 a_2(t)$ obtemos

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t)$$

que é uma equação integral de Volterra do segundo tipo [7], [8].

Exemplo 4.3. Vamos construir a sucessão $\varphi_n(t)$ para a equação integral $\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(s)ds$, tendo $\varphi_0(t) = 0$. Sabemos que $\varphi_0(t) = 0$, usando a formula iterativa teremos,

$$\varphi_n(t) = 1 + \int_0^t \varphi_{n-1}(s)ds.$$

Assim sendo,

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t \varphi_0(s)ds = 1,$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t \varphi_1(s)ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t,$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \varphi_2(s)ds = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

continuando com este processo teremos na $n-$ésima iteração

$$\varphi_n(t) = 1 + \int_0^t \varphi_{n-1}(s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Poderemos escrever

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$$

e esta soma parcial converge para e^t quando $n \to \infty$, que é a solução exacta da equação integral $\varphi(t) = 1 + \int_0^t \varphi(s)ds.$

4.3 Resolvente para equações integrais de Volterra

Consideremos a equação de Volterra do segundo tipo [7]

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(t,s)\varphi(s)ds, \tag{4.10}$$

onde $K(t,s)$ é uma função contínua no triângulo $0 \leq t \leq a,\ 0 \leq s \leq t$ e $f(t)$ é contínua se $0 \leq t \leq a$. Vamos procurar a solução da equação (4.10) na forma de uma série de potências de λ:

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(t) + \cdots . \tag{4.11}$$

Colocando (4.11) em (4.10) obtemos

$$\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(t) + \cdots = \tag{4.12}$$

$$= f(t) + \lambda \int_0^t K(t,s)\left[\varphi_0(s) + \lambda\varphi_1(s) + \lambda^2\varphi_2(s) + \cdots + \lambda^n\varphi_n(s) + \cdots\right] ds.$$

Comparando os coeficientes com a mesma potência de λ temos

$$
\left.
\begin{array}{l}
\varphi_0(t) = f(t), \\
\varphi_1(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\varphi_0(s)ds = \int\limits_0^t K(t,s)f(s)ds, \\
\varphi_2(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\varphi_1(s)ds = \int\limits_0^t K(t,s)\int\limits_0^s K(s,s_1)f(s_1)ds_1 ds, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\right\} \tag{4.13}
$$

As relações (4.13) dão o método iterativo de definição das funções $\varphi_n(t)$ [9], [14]. De (4.13) segue

$$
\varphi_1(t) = \int\limits_0^t K(t,s)f(s)ds, \tag{4.14}
$$

$$
\varphi_2(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\left[\int\limits_0^s K(s,s_1)f(s_1)ds_1\right]ds =
$$

$$
= \int\limits_0^t f(s_1)ds_1 \int\limits_{s_1}^t K(t,s)K(s,s_1)ds = \int\limits_0^t K_2(t,s_1)f(s_1)ds_1, \tag{4.15}
$$

onde

$$
K_2(t,s_1) = \int\limits_{s_1}^t K(t,s)K(s,s_1)ds. \tag{4.16}
$$

Analogamente obtemos que, no geral,

$$
\varphi_n(t) = \int\limits_0^t K_n(t,s)f(s)ds, \quad (n = 1,2,\dots). \tag{4.17}
$$

As funções $K_n(t,s)$ chamam-se **núcleos iterativos** [7], [14]. Estas funções definem-se com ajuda das fórmulas recorrenciais

$$
K_1(t,s) = K(t,s),
$$

$$
K_{n+1}(t,s) = \int\limits_s^t K(t,z)K_n(z,s)dz \quad (n = 1,2,\dots). \tag{4.18}
$$

Usando (4.17) e (4.18) podemos escrever (4.11) na forma:

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda^{\mu} \int_{0}^{t} K_{\mu}(t,s) f(s) ds. \tag{4.19}$$

A função $R(t,s;\lambda)$ definida pela série

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda^{\mu} K_{\mu+1}(t,s) \tag{4.20}$$

chama-se **resolvente** da equação integral (4.10) [7]. Se $K(t,s)$ é contínua, então a série (4.20) converge absoluta e uniformemente. Com ajuda da resolvente a solução da equação integral (4.10) escreve-se na forma

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{0}^{t} R(t,s;\lambda) f(s) ds. \tag{4.21}$$

Exemplo 4.4. Vamos achar a resolvente da equação integral de Volterra do segundo tipo com núcleo $K(t,s) \equiv 1$. Neste exemplo vamos usar a fórmula iterativa

$$K_{n+1}(t,s) = \int_{s}^{t} K(t,z) K_n(z,s) dz \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

e

$$K(t,s) = K_1(t,s) = 1,$$

$$K_2(t,s) = \int_{s}^{t} K(t,z) K_1(z,s) dz = \int_{s}^{t} dz = t - s,$$

$$K_3(t,s) = \int_{s}^{t} K(t,z) K_2(z,s) dz = \int_{s}^{t} (z - s) dz = \frac{(t-s)^2}{2},$$

continuando com este processo $n+1$ vezes obteremos

$$K_{n+1}(t,s) = \int_{s}^{t} K(t,z) K_n(z,s) dz = \frac{(t-s)^n}{n!},$$

prosseguindo infinitas vezes com este processo obteremos vários núcleos e a partir destes construimos a resolvente

$$R(t,s,\lambda) = 1 + \lambda(t-s) + \frac{\lambda^2(t-s)^2}{2} + \cdots + \frac{\lambda^n(t-s)^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}.$$

Vamos agora supor que $K(t,s)$ é um polinómio de grau $(n-1)$ em relacção a s, de modo que podemos escrevê-lo na forma

$$K(t,s) = a_0(t) + a_1(t)(t-s) + \cdots + \frac{a_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}$$

sendo os coeficientes $a_k(t)$ funções contínuas em $[0,a]$. Se definirmos a função $g(t,s;\lambda)$ como a solução da equação diferencial

$$\frac{d^n g}{dt^n} - \lambda\left(a_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + a_1(t)\frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(t)g\right) = 0,$$

e que satisfaz as condições

$$g\mid_{t=s} = \frac{dg}{dt}\mid_{t=s} = \cdots = \frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}}\mid_{t=s} = 0; \quad \frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} = 1,$$

então a resolvente $R(t,s;\lambda)$ define-se como

$$R(t,s;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(t,s;\lambda)}{dt^n}.$$

Exemplo 4.5. Achar a resolvente da equação $\varphi(t) = f(t)\int\limits_0^t (t-s)\varphi(s)ds$. Para o caso do nosso exemplo temos $K(t,s) = a_0(t) + a_1(t)(t-s)$, que é um polinómio em relação a s de grau unitário e tem os coeficientes $a_0(t) = 0$ e $a_1(t) = 1$. A solução da equação

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \lambda\left[a_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}}\right] \quad \text{será} \quad g(t,s;\lambda) = \lambda ct$$

e

$$R(t,s;\lambda) = 0.$$

4.4 Métodos aproximados para resolução de equações integrais

Consideremos a equação integral

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds, \tag{4.22}$$

onde $K(t,s)$ é um núcleo qualquer. Vamos, na equação (4.22), substituir $K(t,s)$ por uma função aproximada $L(t,s)$ [7]. Assim,

$$\bar{\varphi}(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\bar{\varphi}(s)ds, \tag{4.23}$$

onde $\bar{\varphi}(t)$ será a solução aproximada de (4.22). Na qualidade de $L(t,s)$ podemos considerar uma parte inicial da série de Taylor para a função $K(t,s)$ ou uma parte inicial da série de Fourier para a função $K(t,s)$, segundo um sistema ortonormado completo de $L_2(a,b)$ de funções $\{U_n(t)\}$.

Observação 4.3. Sejam $L(t,s)$ e $K(t,s)$ dois núcleos tais que

$$\int_a^b |K(t,s) - L(t,s)|\, ds < h,$$

e suponhamos que a resolvente $R_L(t,s;\lambda)$ da equação com núcleo $L(t,s)$ satisfaz a desigualdade

$$\int_a^b |R_L(t,s;\lambda)|\, ds < R_0$$

e $|f(t) - f_1(t)| < \eta$. Então cumpre-se a condição $1 - |\lambda|\, h(1 + |\lambda|\, R) > 0$ e a equação

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

tem solução única,

$$|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)| < \frac{N\,|\lambda|\,(1 + |\lambda|\, R)^2 h}{1 - |\lambda|\, h(1 + |\lambda|\, R)} + \eta, \tag{4.24}$$

onde $\bar{\varphi}(t)$ é solução da equação

$$\bar{\varphi}(t) = f_1(t) + \lambda \int_a^b L(t,s)\bar{\varphi}(t)ds, \quad N = \sup_{a\le t\le b} |f(t)|.$$

Para o caso quando o núcleo

$$L(t,s) = \sum_{k=1}^{n} X_k(t)T_k(s),$$

a resolvente $R_L(t,s;\lambda)$ determina-se facilmente. Realmente, fazendo $\int_a^b X_k(t)T_e(t)dt = a_{ek}$ obtemos

$$R_L(t,s;\lambda) = \frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{4.25}$$

onde

$$D(t,s;\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ T_1(s) & 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(s) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4.26}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.27}$$

As raízes de $D(\lambda)$ são os auto-valores do núcleo $L(t,s)$.

Suponhamos que $\lambda = 1$ e seja

$$K(t,s) = L(t,s) + M(t,s), \tag{4.28}$$

onde $L(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(t)T_k(s)$, a função $M(t,s)$ possui uma norma pequena numa certa métrica. Suponhamos que $R_K(t,s)$, $R_L(t,s)$ são as resolventes dos núcleos $K(t,s)$ e $L(t,s)$ respectivamente e $\|\mathcal{M}\|$, $\|\mathcal{R}_K\|$ e $\|\mathcal{R}_L\|$ são as normas dos operadores com núcleos $M(t,s)$, $R_K(t,s)$ e $R_L(t,s)$ respectivamente. Então,

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\| \le \|\mathcal{M}\| \left(1 + \|\mathcal{R}_K\|\right) \left(1 + \|\mathcal{R}_L\|\right) \|f\| \tag{4.29}$$

e a norma na fórmula (4.29) pode calcular-se em qualquer espaço funcional. Para a norma da resolvente R_K de qualquer núcleo $K(t,s)$ é justa a avaliação

$$\|\mathcal{R}_k\| \leq \frac{\|K\|}{1-|\lambda|\,\|K\|} \tag{4.30}$$

Exemplo 4.6. Resolva a equação

$$\varphi(t) = \sin t + \int_0^1 (1 - t\cos ts)\varphi(s)ds, \tag{4.31}$$

substituindo o núcleo $1-t\cos ts$ por uma função aproximada. Decompondo $K(t,s) = 1-t\cos ts$ obtemos

$$K(t,s) = 1 - t + \frac{t^3s^2}{2} - \frac{t^5s^4}{24} + \cdots. \tag{4.32}$$

Na qualidade de $L(t,s)$ vamos pegar os três primeiros termos da decomposição (4.32) :

$$L(t,s) = 1 - t + \frac{t^3s^2}{2} \tag{4.33}$$

e vamos resolver uma nova equação

$$\bar{\varphi}(t) = \sin t + \int_0^1 \left(1 - t + \frac{t^3s^2}{2}\right)\bar{\varphi}(s)ds. \tag{4.34}$$

De (4.33) obtemos

$$\bar{\varphi}(t) = \sin t + c_1(1-t) + c_2t^3, \tag{4.35}$$

onde

$$c_1 = \int_0^1 \bar{\varphi}(s)ds, \quad c_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 s^2\bar{\varphi}(s)ds. \tag{4.36}$$

Colocando (4.35) em (4.36) obtemos um sistema em ordem a c_1 e c_2. Temos

$$c_1 = \int_0^1 [\sin s + c_1(1-s) + c_2s^3]ds = \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 + 1 - \cos 1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 [s^2\sin s + c_1(s^2 - s^3) + c_2s^5]ds = \frac{1}{24}c_1 + \frac{1}{12}c_2 + \sin 1 - 1 + \frac{1}{2}\cos 1,$$

o que implica que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4}c_2 = 1 - \cos 1 \\ -\frac{1}{24}c_1 + \frac{11}{12}c_2 = \sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1 - 1. \end{cases} \tag{4.37}$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$c_1 = 1.0031, \quad c_2 = 0.1674$$

e, portanto,

$$\bar{\varphi}(t) = 1.0031(1-t) + 0.1674t^3 + \sin t.$$

A solução exacta da equação é $\varphi(t) \equiv 1$. Vamos avaliar $\|\varphi - \bar{\varphi}\|$ segundo a fórmula

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\| \leq \|\mathcal{M}\| \left(1 + \|\mathcal{R}_K\|\right)\left(1 + \|\mathcal{R}_L\|\right)\|f\|. \tag{4.38}$$

Na métrica do espaço L_2 temos

$$\|\mathcal{M}\| \leq \frac{1}{24}\left(\int_0^1\int_0^1 t^{10}s^8 dtds\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{72\sqrt{11}} < \frac{1}{238},$$

$$\|K\| \leq \left[\int_0^1\int_0^1 (1 - t\cos ts)^2 dtds\right]^{\frac{1}{2}} = \left(2\cos 1 - \frac{1}{8}\cos 2 + \frac{1}{16}\sin 2 - \frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{5},$$

$$\|L\| \leq \left[\int_0^1\int_0^1 \left(1 - t + \frac{t^3s^2}{2}\right)^2 dtds\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{14}} < \frac{3}{5},$$

$$\|f\| = \left(\int_0^1 \sin^2 t dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sin 2}}{2} < \frac{3}{5}.$$

As normas das resolventes R_L e R_K avaliamos segundo as fórmulas

$$\|\mathcal{R}_k\| \leq \frac{\|K\|}{1 - |\lambda|\,\|K\|}, \quad \|\mathcal{R}_L\| \leq \frac{\|L\|}{1 - |\lambda|\,\|L\|},$$

onde $|\lambda| = 1$. Logo

$$\|\mathcal{R}_K\| < \frac{3}{2}, \quad \|\mathcal{R}_L\| < \frac{3}{2}$$

e portanto

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\| < \frac{1}{238}\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{3}{5} < 0.016.$$

Vamos agora considerar **o método de Bubnov[4]-Galerkin [5]** [7]. A solução aproximada de (4.22) procuramos do modo seguinte: escolhemos um sistema de funções $\{u_n(t)\}$ completo em $L_2[a,b]$ tal que para qualquer n as funções $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$ são linearmente independentes. A solução aproximada $\varphi_n(t)$ escolhemos na forma

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(t). \tag{4.39}$$

Os coeficientes a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ definem-se a partir do seguinte sistema linear

$$(\varphi_n(t), \varphi_k(t)) = (f(t), u_k(t)) + \lambda \left(\int_a^b K(t,s)\varphi_n(s)ds, \varphi_k(t) \right), \tag{4.40}$$

onde (f,g) denota o produto escalar $\int_a^b f(t)g(t)dt$ e no lugar de $\varphi_n(t)$ colocamos $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(t)$. Se o valor de λ em (4.22) não é autovalor, então para valores enormes de n o sistema (4.40) tem solução única e para $n \to \infty$ a solução aproximada $\varphi_n(t)$ tende, na métrica de $L_2]a,b[$ para a solução exacta $\varphi(t)$ da equação (4.22).

Exemplo 4.7. Usando o método de Bubnov-Galerkin resolva a equação

$$\varphi(t) = t + \int_{-1}^{1} ts\varphi(s)ds. \tag{4.41}$$

Na qualidade de sistema completo de funções em $[-1,1]$ escolhemos o sistema de polinómios de Legendre[6] $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. A solução aproximada da equação (4.41) vamos procurar na forma

$$\varphi_3(t) = a_1 + a_2 t + a_3 \frac{(3t^2-1)}{2}.$$

[4] I. G. Bubnov (1872–1919) - matemático russo

[5] Boris Grigorievich Galerkin (1871–1945) - matemático russo

[6] Adrien Marie Legendre (1752–1833) - matemático francês

Colocando $\varphi_3(t)$ em vez de $\varphi(t)$ na equação (4.41) temos

$$a_1 + a_2 t + a_3 \frac{(3t^2-1)}{2} = t + \int_{-1}^{1} ts \left[a_1 + a_2 s + a_3 \frac{3s^2-1}{2} \right] ds \tag{4.42}$$

ou

$$a_1 + a_2 t + a_3 \frac{(3t^2-1)}{2} = t + \frac{2a_2}{3} t. \tag{4.43}$$

Multiplicando ambas as partes de (4.43) por 1, t, e $\frac{3t^2-1}{2}$, sucessivamente, e integrando segundo t no intervalo $[-1, 1]$ obtemos:

$$2a_1 = 0, \quad \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2, \quad \frac{2}{5}a_3 = 0.$$

Daqui temos

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 0,$$

logo $\varphi_3(t) = 3t$. Facilmente se verifica que $3t$ é solução exacta de (4.41).

Conclusão

Este trabalho teve, como objectivo geral, a concepção de matérial didático para os estudantes de Engenharia e Matemática Pura que estudam a Análise Funcional. Procuramos mostrar algumas aplicações desta teoria nas equações integrais. Faz-se ao longo do trabalho uma abordagem a diferentes espaços lineares normados e suas propriedades; mostramos como se aplica nestes espaços a teoria da Análise Funcional para resolução de problemas concretos.

Como objectivo específico estudaram-se métodos de aproximação para resolução de equações integrais, tais como a construção da resolvente para equações integrais de Volterra, o método de aplicações de contracção e o método de Bubnov-Galerkin, para este ultimo desenvolvemos uma aplicação usando a linguagem de programação Visual Basic.

Bibliografia

[1] M. J. Alves, *Equações Diferenciais Funcionais Singulares de Segunda Ordem*, Perm State University Press, 2000.

[2] M. J. Alves, Boundary value problem for a nonlinear singular functional differential equation, Beijing, *Higher Education Press*, China, 15-27, 2000.

[3] M. J. Alves, About a nonlinear boundary value problem with nonsummable singularity , Russian Mathematics, 4, Vol. 44, *Allerton Press*, Inc., USA, 56-59, 2000.

[4] A. V. Balakrishnan, *Applied Functional Analysis*, New York Heidelberg Berlin, New York, 1976.

[5] D. E. Brown, *Functional Analysis in Normed Spaces*, Pergamon Press, Frankfurt, 1964.

[6] D. H. Griffel, *Applied Functional Analysis*, Ellis Horwood Limited, Toronto, 1985.

[7] M. L. Kiselov, G. I. Makarenko, and M. L. Krasnov, *Ecuaciones Integrales. Breve Exposicion del Matérial Teórico y Problemas con Soluciones Detalladas*, Halsted Press, Spain, 1971.

[8] V. Hutson, and J. Pym, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory,* Academic Press, London, 1980.

[9] A. N. Kolmogorov, and C. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis,* Dover Pubns, 1999.

[10] D. C. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, Book News, Portland, 1966.

[11] L. A. Lusternik, and V. J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis,* Gordon & Science Pub., London,1962.

[12] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Inc., Singapore, 1991.

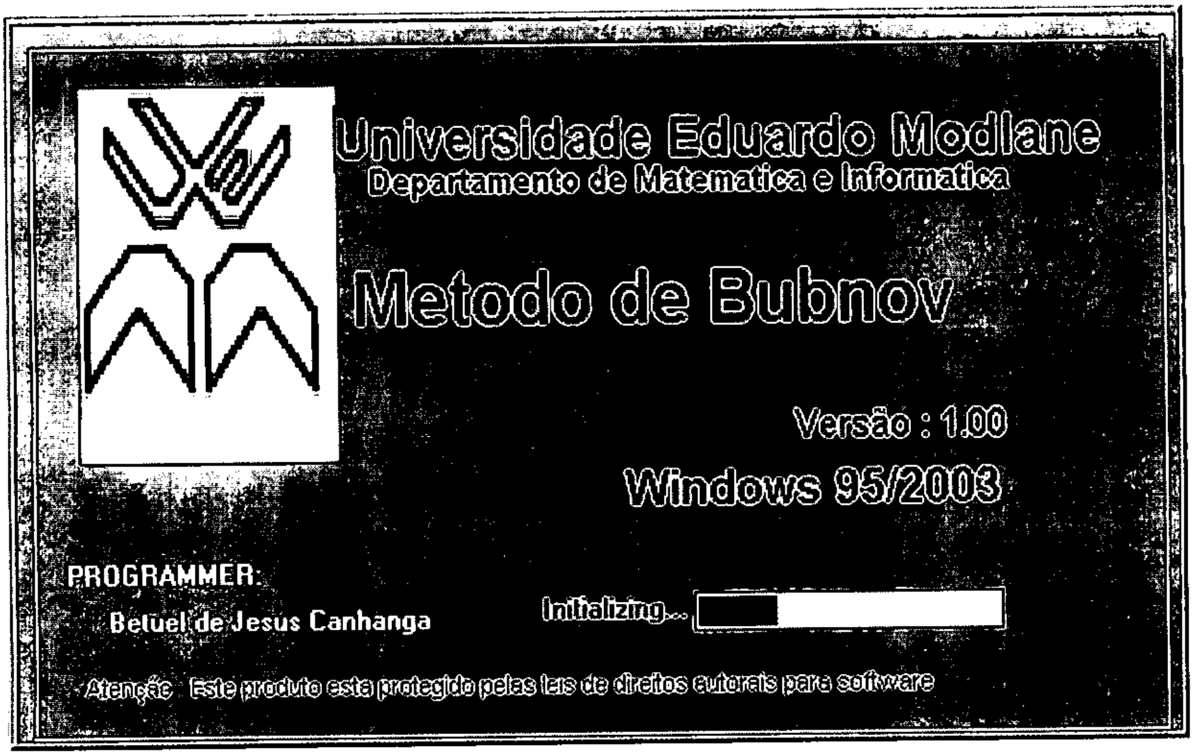
[13] E. C. Tichmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford Press, 1939.

[14] B. Z. Vulikh *Functional Analysis for Scientists and Technologists*, Pergamon Press, Frankfurt, 1963.

[15] P. P. Zabreiko et al, *Integral Equations*, Nauka, Moscow, 1968.

Indice remissivo

ANEXO


Universidade Eduardo Modlane
Departamento de Matematica e Informatica
Metodo de Bubnov
Versão : 1.00
Windows 95/2003
PROGRAMMER:
Betuel de Jesus Canhanga
Initializing...
Atenção : Este produto esta protegido pelas leis de direitos autorais para software

```
Option Explicit
Dim i, i1, i2, i3, j1, jj, j, index, index1, index2, index3, contador, max1, bool As Integer
Dim g(7, 2) As String
Dim Intg(7, 2), s(7, 2), f As String
Dim g1(7), b(7, 7), funcao1(7, 2), funcao2(7, 2), str, str1, real1, c(7, 2), factor(7, 2), a(7),
carater As String
 Dim carater2, soma1(21), soma(21), real2, s1, d1, d(10) As String

Dim monomio(7, 2) As String
Dim monomio2(7, 2) As String

Function integral(coef As String, grau As Integer) As String
Dim inicial, final, aux As Double
inicial = 1
final = 1
integral = 0
For i = 1 To grau + 1
inicial = Format(inicial * inferior, "###.#")
final = Format(final * superior, "###.#")

Next
aux = (final - inicial) / (grau + 1)

Intg(1, 1) = coef
Intg(1, 2) = aux
If aux <> 0 Then
If IsNumeric(coef) Then
integral = aux * CDbl(coef)
Else
If Len(coef) > 2 Then
real1 = Left(coef, Len(coef) - 2)
carater = Right(coef, (Len(coef) - Len(real1)))
integral = (CDbl(real1) * aux & carater)
Else
   If Len(coef) = 2 Then
        integral = aux & coef
      Else
        MsgBox "introduza corectamente os valores"
      Exit Function
      End If
   End If
End If
If j = 1 Then

Else
End If
```

```
End If

j = j + 1
End Function


Private Sub adicionar_Click()
If index <= CInt(NumeroDeMonomios) Then
monomio(index, 1) = coef.Text
monomio(index, 2) = CInt(grau.Text)
If Len(coef.Text) > 2 Then
monomio2(index, 1) = Left(coef.Text, Len(coef.Text) - 2)
Else
monomio2(index, 1) = 1
End If
monomio2(index, 2) = CInt(grau.Text)

coef.Text = ""
grau.Text = ""

If index > 1 Then
fx.Caption = fx.Caption & "+" & monomio(index, 1) & "t^" & monomio(index, 2)
str = str & "+" & monomio(index, 1) & "t^" & monomio(index, 2)
Else
fx.Caption = fx.Caption & monomio(index, 1) & "t^" & monomio(index, 2)
str = str & monomio(index, 1) & "t^" & monomio(index, 2)
End If
index = index + 1
Else
MsgBox "terminaste a insercao do polinomio ", vbCritical
End If

End Sub

Private Sub Adicionar1_Click()
If index1 <= CInt(NumMonoF1) Then

funcao1(index1, 1) = coef1.Text
If funcao1(index1, 1) = "" Then
funcao1(index1, 1) = "0"
Else: End If
funcao1(index1, 2) = grau1.Text
coef1.Text = ""
grau1.Text = ""

If index1 > 1 Then
```

```
fx1.Caption = fx1.Caption & "+" & funcao1(index1, 1) & "t^" & funcao1(index1, 2)
Else
fx1.Caption = fx1.Caption & funcao1(index1, 1) & "t^" & funcao1(index1, 2)
End If
index1 = index1 + 1
Else
MsgBox "terminaste a insercao do polinomio ", vbCritical
End If


End Sub
Private Sub Adicionar2_Click()
If index2 <= CInt(NumMonoF2) Then
funcao2(index2, 1) = coef2.Text
funcao2(index2, 2) = grau2.Text
coef2.Text = ""
grau2.Text = ""

If index2 > 1 Then
fxx.Caption = fxx.Caption & "+" & funcao2(index2, 1) & "t^" & funcao2(index2, 2)
Else
fxx.Caption = fxx.Caption & funcao2(index2, 1) & "t^" & funcao2(index2, 2)
End If
index2 = index2 + 1
Else
MsgBox "terminaste a insercao do polinomio ", vbCritical
End If
End Sub
Private Sub cmdintegral_Click()
Dim st, s As String
If index3 = 1 Then
For jj = 1 To CInt(NumeroDeMonomios)
soma(jj) = ""
For i1 = 1 To CInt(NumeroDeMonomios)
 a(i1) = integral(monomio(i1, 1), (monomio(i1, 2)) + 1)

real2 = Left(monomio(i1, 1), Len(monomio(i1, 1)) - 2)
carater2 = Right(monomio(i1, 1), (Len(monomio(i1, 1)) - Len(real2)))
g(i1, 1) = CDbl(real2) * monomio2(jj, 1) & carater2
g(i1, 2) = CInt(monomio2(jj, 2)) + CInt(monomio(i1, 2))
'MsgBox "g" & i1 & "2--" & g(i1, 2)
b(i1, jj) = integral(g(i1, 1), CInt(g(i1, 2)))
 If b(i1, jj) <> "0" Then
 soma(jj) = soma(jj) & "+" & b(i1, jj)
 End If
 Next
```

```
For i1 = 1 To CInt(NumeroDeMonomios)
For i = 1 To CInt(NumMonoF1)
If a(i1) <> "0" Then
If IsNumeric(a(i1)) Then
factor(i1, 1) = CDbl(a(i1)) * funcao1(i, 1)
factor(i1, 2) = funcao1(i, 2)
Else

If Len(a(i1)) > 2 Then

real2 = Left(a(i1), (Len(a(i1)) - 2))
carater2 = Right(a(i1), (Len(a(i1)) - Len(real2)))
factor(i1, 1) = CDbl(real2) * funcao1(i, 1) & carater2
factor(i1, 2) = funcao1(i, 2)
Else
   If Len(a(i1)) = 2 Then
         factor(i1, 1) = funcao1(i, 1) & carater2
           factor(i1, 2) = funcao1(i, 2)
      Else

      End If
   End If
 End If
 End If
 st = ""


 Next
 If factor(i1, 1) <> "" Then
 Dim r As Double
 Dim c As String
 If Len(factor(i1, 1)) > 2 Then
r = Left(factor(i1, 1), Len(factor(i1, 1)) - 2)
c = Right(factor(i1, 1), 2)

soma1(jj) = soma1(jj) & "+" & integral(r * monomio2(jj, 1), CInt(factor(i1, 2)) +
CInt(monomio2(jj, 2))) & c
End If


 s = s & "+" & factor(i1, 1) & "t^" & factor(i1, 2)
 End If
 Next
  For i2 = 1 To CInt(NumMonoF2)
 If (funcao2(i2, 1) <> "") Then
```

```
st = st & (funcao2(i2, 1)) & "t^" & funcao2(i2, 2)
soma1(jj) = soma1(jj) & "+" & integral(funcao2(i2, 1) * monomio2(jj, 1),
CInt(funcao2(i2, 2)) + CInt(monomio2(jj, 2)))
End If
Next

Select Case jj
Case 1
result.Caption = soma(jj) & "=" & soma1(jj)
Case 2
result1.Caption = soma(jj) & "=" & soma1(jj)
Case 3
result2.Caption = soma(jj) & "=" & soma1(jj)
Case 4
result3.Caption = soma(jj) & "=" & soma1(jj)
End Select
s1 = s & "+" & st
index3 = index3 + 1


Next
temp
Else
MsgBox "O Integral ja esta calculado", vbInformation
End If


End Sub
Private Sub Form_Load()
centralizar Me
index = 1
index1 = 1
index2 = 1
index3 = 1
j = 1
j1 = 1
bool = 0
End Sub
Private Sub limpar_Click()
inferior.Text = ""
superior.Text = ""
NumeroDeMonomios = ""
result.Caption = ""
result1.Caption = ""
result2.Caption = ""
result3.Caption = ""
```

```
NumMonoF1 = ""
NumMonoF2 = ""
fxx.Caption = "1ªFunção="
fx.Caption = "2ªFunção="
fx1.Caption = "3ªFunção="
Label5.Caption = ""
index = 1
index1 = 1
index2 = 1
index3 = 1
End Sub
Sub centralizar(frm As Form)
  frm.Move 1500, 1000
End Sub

Sub temp()

Dim st, s As String
For i1 = 1 To CInt(NumeroDeMonomios)
 a(i1) = integral(monomio(i1, 1), (monomio(i1, 2) + 1))
 Next
 For i1 = 1 To CInt(NumeroDeMonomios)
 For i = 1 To CInt(NumMonoF1)
 If a(i1) <> "0" Then
 If IsNumeric(a(i1)) Then
 factor(i1, 1) = CDbl(a(i1)) * funcao1(i, 1)
 factor(i1, 2) = funcao1(i, 2)
 Else

 If Len(a(i1)) > 2 Then

 real2 = Left(a(i1), (Len(a(i1)) - 2))
 carater2 = Right(a(i1), (Len(a(i1)) - Len(real2)))
 factor(i1, 1) = CDbl(real2) * funcao1(i, 1) & carater2
 factor(i1, 2) = funcao1(i, 2)
 Else
    If Len(a(i1)) = 2 Then
          factor(i1, 1) = funcao1(i, 1) & carater2
             factor(i1, 2) = funcao1(i, 2)
       Else

       End If
    End If
  End If
  End If
  st = ""
```

```
For i2 = 1 To CInt(NumMonoF2)
If (funcao2(i2, 1) <> "") Then
st = st & (funcao2(i2, 1)) & "t^" & funcao2(i, 2)
End If
Next

Next
If factor(i1, 1) <> "" Then
s = s & "+" & factor(i1, 1) & "t^" & factor(i1, 2)
End If
Next
Label5.Caption = "1ª Funçäo =" & st & s
s1 = s & "+" & st
End Sub
```

```
Option Explicit



Private Sub Timer1_Timer()
  Unload Me
    Principal.Show
End Sub
Private Sub Timer2_Timer()
Bar.Value = Bar.Value + 2
If Bar.Value = 100 Then
If Timer2.Interval >= 1 Then
Unload frmapresentacao
Load Principal
Principal.Show
End If
End If
End Sub
```