UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

Trabalho de Licenciatura

AS LEIS DOS GRANDES NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES COM ILUSTRAÇÃO COMPUTACIONAL

$$\boxed{P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X_i)\right) = 0\right) = 1}$$

Autora: Paula Cristina de Frederico Libombo

IT-38

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

Trabalho de Licenciatura

AS LEIS DOS GRANDES NÚMEROS E SUAS APLICAÇÕES COM ILUSTRAÇÃO COMPUTACIONAL

$$\boxed{P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X_i)\right) = 0\right) = 1}$$

Supervisor: dr. Mário Frengue Getimane

Maputo, Julho de 1996

AGRADECIMENTO

Endereço os meus agradecimentos especiais ao **dr. Mário Frengue Getimane**, Supervisor da presente tese de licenciatura, pela sua assistência valiosa ao longo deste trabalho. O seu ensinamento e dedicação constituiram os factores decisivos para o sucesso e constante inspiração para mim.

A minha gratidão é estendida ao **meu querido esposo** pelo apoio moral que me deu e aos meus colegas **Lúcio Artiel** e **Arlindo Lombe** pelo suporte e sugestões dadas neste trabalho.

Por último, gostaria de agradecer a todos que de uma ou de outra forma contribuiram para que este estudo fosse uma realidade.

Paula Libombo

DECLARAÇÃO DE HONRA

Declaro pela minha honra que o presente trabalho constitui resultado de investigação por mim realizada.

Para os meus pais.

PREFÁCIO

O regulamento que rege a Universidade Eduardo Mondlane, reza que após conclusão da parte curricular (conclusão de todas as cadeiras do curso) o estudante deve apresentar e defender um trabalho final de licenciatura. Com vista o cumprimento deste regulamento, apresento este trabalho como tese de licenciatura em informática, curso leccionado pela Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática e Informática e tem em vista o estudo dos Leis dos Grandes Números (leis dos grandes números e suas aplicações) que são dos resultados mais importantes da Teoria de Probabilidade e jogam um papel importante na própria Teoria de Probabilidades e na Estatística.

As Leis dos Grandes Números, pela sua importância, fazem parte dos conteúdos básicos da disciplina de Probabilidades e Estatística leccionada no Ensino Superior. É de assinalar que nem sempre é possível, no âmbito duma disciplina, abordar as diferentes versões das Leis dos Grandes Números e as suas aplicações.

Apesar da sua formulação ser simples, as Leis dos Grandes são de difícil interpretação para os estudantes, o que conduz muitas vezes a afirmações erradas decorrentes dessa má interpretação. Com o advento dos computadores torna-se possível realizar experimentos que podem ajudar a compreender e "visualizar" estas leis.

O presente trabalho possue os seguintes objectivos:

1 - Apresentar diferentes versões das Leis dos Grandes Números, começando pelo teorema de Bernoulli e progredindo para versões mais recentes destes teoremas, mantendo sempre a sequência histórica do aparecimento destas leis. Isto permite, em particular, apreciar a importância da desigualdade de Tshebycheff. Para a formulação das leis dos grandes números é usada a linguagem da Teoria de Medida.

2 - Aapresentar ilustração computacional das leis dos grandes número usando linguagem de programação PASCAL e suas aplicações em filas de espera e passeio errante (random walk).

Outro objectivo a atingir neste trabalho é colocar à disposição do Departamento de Matemática e Informática da Faculdade de Ciências, um meio auxiliar de ensino, pois os programas a serem desenvolvidos ao longo deste trabalho poderão ser usados nas aulas de Probabilidades e Estatística.

Passamos a apresentar duma forma sucinta os vários aspectos que o leitor poderá encontrar ao longo do trabalho.

O Capítulo I apresenta os aspectos mais relevantes que são tratatados no presente trabalho.

O Capítulo II apresenta as Leis dos Grandes Números, iniciando com o estudo do Teorema de Bernoulli, que constitui uma base importante na Teoria de Probabilidades, seguindo-se com a consideração de conceitos básicos da Teoria de Medida que deverão ser consultados à medida que surjam dificuldades, pois são usados nas secções seguintes deste capítulo e no capítulo III.

No capítulo III são apresentadas aplicações das Leis dos Grandes Números em filas de espera e passeio errante. Por último neste capítulo, efectuamos uma ilustração computacional para demonstração da convergência em distribuição do tempo de espera dos clientes na fila.

Conclusões e algumas sugestões da continuação deste trabalho podem ser encontradas no Capítulo IV.

Paula Libombo

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO

O objectivo principal deste trabalho é de dar uma evolução histórica das Leis dos Grandes Números, suas aplicações e efectuar ilustração computacional.

O Teorema de Bernoulli faz uma análise da seguinte convergência

$$P[|\frac{S_n}{n}-p|\geq\epsilon]\rightarrow 0$$

sendo S_n a frequência de um acontecimento em n provas então, S_n/n é a frequência relativa desse acontecimento. Com a desigualdade de Tshebycheff,

$$P(|X-\mu|<\epsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

a demosntração do Teorema de Bernoulli torna-se muito mais simples e mais fácil de se perceber.

Conceitos básicos da Teoria de Medida são apresentados. Destaque é dado para os diferentes tipos de convergência da média de medições de uma determinada matéria X para a medida real μ . Estas várias medições X_n podem convirgir em quase toda a parte para a variável aleatória X se

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \quad quando\ n\to\infty\}) = 1 \ ,$$

ou convirgir em probabilidade se

$$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \to 0, \quad n\to\infty$$

ou convirgir em distribuição se

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x) \ , \ n\to\infty.$$

Das diferentes versões das leis dos grandes números, vamos remarcar as suas definições no sentido de probabilidade, sendo para as leis fracas no sentido de convergência em probabilidade

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))| \geq \epsilon) \to 0, \ \forall \epsilon > 0$$

e para as leis fortes no sentido de convergência em quase toda a parte

$$P(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) = 0) = 1 .$$

Para a aplicação das leis dos grandes números em filas de espera damos destaque remarcável ao facto de a probabilidade do tempo de espera na fila ser menor que uma determinada variável aleatória identicamente distribuída, convergir para a função de distribuição. Isto é

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

sendo $F_n(x)=P[W_n<x]$, onde W_n é o tempo de espera do n-ésimo cliente.

Para o Passeio Errante, comportamento aleatório da sequência de tempo de espera na fila de espera $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k,\ n\geq k$ Sendo 0 o ponto recorrente (através de 0, voltamos a situação inicial de não clientes na fila).

Efectuamos uma ilustração computacional para demonstração de que de facto,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x).$$

Os vários teoremas, definições e corolários estão numerados sequencialmente dentro do capítulo e secção.

II - LEIS DOS GRANDES NÚMEROS - PERSPECTIVA HISTÓRICA E ILUSTRAÇÃO COMPUTACIONAL

No presente capítulo é apresentado o Teorema de Bernoulli efectuando-se uma abordagem histórica deste teorema com a apresentação da primeira demonstração efectuada em 1713 pelo próprio Bernoulli e passando posteriormente a demonstrar o mesmo teorema com o auxílio da desigualdade de Tshebycheff. São apresentados alguns conceitos básicos da teoria de medida passando-se posteriormente à consideração de outras versões das leis dos grandes números e por último à ilustração computacional.

2.1 - TEOREMA DE BERNOULLI

Esta secção é dedicada a um dos mais importantes teoremas na teoria de probabilidades, o Teorema de Bernoulli. Este teorema foi descoberto por Jacob Bernoulli e publicado no seu livro "Ars Conjectandi" (1713) que constituiu a primeira tentativa de exposição científica da Teoria de Probabilidades como uma parte separada da ciência matemática.

Definição 2.1.1: Se em n provas, um evento E ocorre m vezes, o número m é chamado de ***frequência*** de E em n provas, e a razão m/n recebe o nome de ***frequência relativa***. O Teorema de Bernoulli revela uma importante relação probabilística entre a frequência relativa de E e a sua probabilidade p. Se ao realizarmos um experimento estamos interessados na ocorrência ou não de um dado acontecimento E então dizemos que estamos em presença do caso ***Bernoulliano***.

Teorema 2.1.1 (Bernoulli-1713). No caso de Bernoulli, para cada $\epsilon > 0$, quando $n \to \infty$,

$$P[|\frac{S_n}{n} - p| \geq \epsilon] \to 0$$

onde p é a probabilidade de ocorrência do acontecimento E e S_n é a frequência de E em n provas.

Este teorema diz que com probabilidade aproximadamente igual a 1 ou com certeza, pode-se esperar que a diferença entre a frequência relativa de um evento E e a probabilidade p da sua ocorrência seja menor que um número qualquer $\epsilon > 0$, quando o número de provas é suficientemente grande.

Por outras palavras, dados dois números positivos ϵ e η, a probabilidade P da inequação

$$|\frac{m}{n} - p| < \epsilon$$

será maior que 1- η se o número de provas está acima de um certo limite dependente de ϵ e η.

Repare-se que o teorema de Bernoulli não significa que quando o número de provas aumenta a diferença entre a frequência relativa e a probabilidade p de ocorrência do evento E será arbitráriamente pequena. Isto é, não se afasta a hipótese de, realizadas n provas independentes as quais produziram uma diferença 'pequena' entre a frequência relativa e a probabilidade p, em n provas adicionais a diferença entre a frequência relativa e a probabilidade p não seja 'pequena'.

Demosntração: Várias demonstrações deste importante teorema são conhecidas. São pequenas e simples, menores que a demosntração de Bernoulli. Nós vamos reproduzir a demonstrção de Bernoulli conforme vem em **Uspensky (1937)**[1], por duas razões:

1. Ela em si é uma demonstração notável pelo seu rigor;

2. Esta demonstração permitir-nos-á mais à frente apreciar a força da desigualdade de Tshebycheff.

a. Denotando por T_m a probabilidade de m sucessos em n provas, ir-se-á mostrar primeiro que

$$\frac{T_{b+k}}{T_b} < \frac{T_{a+k}}{T_a} \tag{1}$$

se $b>a$ e $k>0$. Note-se que

$$\frac{T_{x+1}}{T_x} = \frac{n-x}{x+1} \times \frac{p}{q}$$

decresce quando x cresce. Daí resulta que para $b>a$ tem-se

$$\frac{T_{b+1}}{T_b} < \frac{T_{a+1}}{T_a} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{b+1}}{T_{a+1}} < \frac{T_b}{T_a}.$$

Mudando b e a respectivamente por $b+1$, $a+1$, $b+2$, $a+2$,..., $b+k$, $a+k$, a última desigualdade fica com a seguinte forma

[1] - Uspensky, J. V. (1937). Introduction To Mathematical probability, pp. 96-101.

$$\frac{T_{b+k}}{T_{a+k}} < \frac{T_{b+k-1}}{T_{a+k-1}} < \ldots < \frac{T_{b+1}}{T_{a+1}} < \frac{T_b}{T_a}$$

i.e.

$$\frac{T_{b+k}}{T_b} < \frac{T_{a+k}}{T_a}$$

b. Considere dois números inteiros λ e μ satisfazendo as desigualdades

$$\lambda-1<np\leq\lambda$$

$$\mu-1<np+n\epsilon\leq\mu.$$

Com A e C denotando as probabilidades das desigualdades

$$0\leq\frac{m}{n}-p<\epsilon \quad e \quad \frac{m}{n}-p\geq\epsilon$$

respectivamente, claramente tem-se:

$$A=T_\lambda+T_{\lambda+1}+\ldots+T_{\mu-1}$$

$$C=T_\mu+T_{\mu+1}+\ldots+T_n$$

A expressão para A contém $\mu-\lambda = g$ termos. Combinando os termos da segunda soma em grupos de g termos (o último grupo pode consistir de menos de g termos) e fazendo

$$A_1 = T_\mu + T_{\mu+1} + \ldots + T_{\mu+g-1}$$

$$A_2 = T_{\mu+g} + T_{\mu+g+1} + \ldots + T_{\mu+2g-1}$$

$$A_3 = T_{\mu+2g} + T_{\mu+2g+1} + \ldots + T_{\mu+3g-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

obtém-se

$$C = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

Vamos demonstrar que

$$\frac{A_1}{A} < \frac{T_\mu}{T_\lambda}, \quad \frac{A_2}{A_1} < \frac{T_\mu}{T_\lambda}, \quad \ldots \qquad (2)$$

De facto:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{T_{\lambda+g} + T_{\lambda+g+1} + \ldots + T_{\lambda+2g-1}}{T_\lambda + T_{\lambda+1} + \ldots + T_{\lambda+g-1}}$$

é menor que o maior dos números

$$\frac{T_{\lambda+g}}{T_\lambda}, \quad \frac{T_{\lambda+g+1}}{T_{\lambda+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{T_{\lambda+2g-1}}{T_{\lambda+g-1}}$$

Mas pela desigualdade (1)

$$\frac{T_{\lambda+g}}{T_\lambda} > \frac{T_{\lambda-g+1}}{T_{\lambda+1}} > \ldots > \frac{T_{\lambda+2g-1}}{T_{\lambda+g-1}}$$

consequentemente

$$\frac{A_1}{A} < \frac{T_\mu}{T_\lambda}.$$

Similarmente

$$\frac{A_2}{A_1} < \frac{T_{\mu+g}}{T_\mu}, \quad \frac{A_3}{A_2} < \frac{T_{\mu+2g}}{T_{\mu+g}}, \quad \ldots$$

e aplicando outra vez a desigualdade (1) obtém-se

$$\frac{T_{\mu+g}}{T_\mu} < \frac{T_{\lambda+g}}{T_\lambda}, \quad \frac{T_{\mu+2g}}{T_{\mu+g}} < \frac{T_{\mu+g}}{T_\mu}, \quad \ldots$$

Consequentemente

$$\frac{A_2}{A_1} < \frac{T_\mu}{T_\lambda}; \quad \frac{A_3}{A_2} < \frac{T_\mu}{T_\lambda}; \ldots$$

e assim as desigualdades (2) estão estabelecidas.

c. Para $x \geq \lambda$

$$\frac{T_{x+1}}{T_x} < 1$$

É suficiente mostrar que

$$\frac{T_{\lambda+1}}{T_\lambda}=\frac{n-\lambda}{\lambda+1}\,\frac{p}{q}<1\,.$$

Como $\lambda \geq np$

$$\frac{n-\lambda}{\lambda+1}\,\frac{p}{q}\leq\frac{npq}{npq+q}<1$$

o que mostra que

$$\frac{T_{\lambda+1}}{T_\lambda}<1$$

A inequação assim estabelecida, mostra que na seguinte expressão

$$\frac{T_\mu}{T_\lambda}=\frac{T_\mu}{T_{\mu-1}}\cdot\frac{T_{\mu-1}}{T_{\mu-2}}\cdots\frac{T_{\mu-\alpha+1}}{T_{\mu-\alpha}}\cdot\frac{T_{\mu-\alpha}}{T_{\mu-\alpha-1}}\cdots\frac{T_{\lambda+1}}{T_\lambda}$$

todos os factores são menores que 1. Consequentemente, se se mantever os primeiros α factores ($\alpha \leq g$) e substituindo os outros por 1, obtem-se

$$\frac{T_\mu}{T_\lambda}\leq\frac{T_\mu}{T_{\mu-1}}\cdot\frac{T_{\mu-1}}{T_{\mu-2}}\cdots\frac{T_{\mu-\alpha+1}}{T_{\mu-\alpha}}$$

Além disso,

$$\frac{T_\mu}{T_{\mu-1}}<\frac{T_{\mu-1}}{T_{\mu-2}}<\ldots<\frac{T_{\mu-\alpha+1}}{T_{\mu-\alpha}}\,.$$

Donde resulta a seguinte desigualdade

$$\frac{T_\mu}{T_\lambda} < \left(\frac{n-\mu+\alpha}{\mu-\alpha+1} \frac{p}{q} \right)^\alpha, \tag{3}$$

sendo α um número inteiro positivo arbitrário menor ou igual a g.

Suponha que ϵ é um número positivo arbitrário. Então, pode-se mostrar que para

$$n \geq \frac{\alpha(1+\epsilon)-q}{\epsilon(p+\epsilon)} \tag{4}$$

tem-se

(*i*) $\quad \dfrac{n-\mu+\alpha}{\mu-\alpha+1} \dfrac{p}{q} \leq \dfrac{p}{p+\epsilon};$

(*ii*) $\quad \alpha \leq g$

Dado que $\mu \geq np+n\epsilon$, é suficiente mostrar que (i) é satisfeita para $\mu = np+n\epsilon$.

Se $\mu = np+n\epsilon$ a desigualdade (i) é equivalente a

$$\frac{nq-n\epsilon+\alpha}{np+n\epsilon-\alpha+1} \leq \frac{q}{p+\epsilon}$$

ou, após simplificações óbvias

$$n\epsilon(p+\epsilon)\geq\alpha(1+\epsilon)-q$$

Mas esta desigualdade resulta de (4).

Para estabelecer (ii), já que α e g são inteiros, bastará mostrar-se que $\alpha<g+1$.

Mas, $\mu\geq np+n\epsilon$, $\lambda<np+1$ e consequentemente $g+1>n\epsilon$. Consequentemente (ii) será estabelecida se se poder mostrar que $n\epsilon\geq\alpha$, que em virtude de (4) será verdadeira se

$$\frac{\alpha(1+\epsilon)-q}{p+\epsilon}\geq\alpha$$

que equivale a

$$\alpha(1+\epsilon)-q\geq\alpha p+\alpha\epsilon \quad \text{ou} \quad \alpha q-q\geq 0$$

o que é obviamente verdadeiro, sendo α um inteiro positivo.

d. O inteiro auxiliar α está à nossa disposição e temos liberdade de escolha. Dado um número arbitrário positivo η <1, determinar-se-á α como o menor inteiro que satisfaz a desigualdade

$$\left(\frac{p}{p+\epsilon}\right)^{\alpha}\leq\eta \quad \text{ou} \quad \alpha\geq\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log\left(1+\frac{\epsilon}{p}\right)}$$

Ao mesmo tempo

$$\frac{\log\frac{1}{\eta}}{\log(1+\frac{\epsilon}{p})} > \alpha - 1$$

e já que $\log(1+\frac{\epsilon}{p}) > \frac{\epsilon}{p+\epsilon}$, tem-se

$$\alpha < 1 + \frac{p+\epsilon}{\epsilon}\log\frac{1}{\eta}$$

e

$$\frac{\alpha(1+\epsilon)-q}{\epsilon(p+\epsilon)} < \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\epsilon}$$

Consequentemente, se

$$n \geq \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\epsilon} \tag{5}$$

em virtude de (i) e (3)

$$\frac{T_\mu}{T_\lambda} < \eta$$

e em virtude de (2)

$$A_1 < A\eta \quad ; \quad A_2 < A_1\eta < A\eta^2 \quad ; \quad A_3 < A_{2\eta} < A_{\eta^3} \quad ; \ \ldots$$

Daí

$$C < A\eta + A\eta^2 + A\eta^3 + \ldots = \frac{A\eta}{1-\eta} \tag{6}$$

Esta desigualdade é válida se n satisaz (5). Não existe nenhum rasto de α .

e. Considere as inequações

$$-\epsilon<\frac{m}{n}-p<0 \quad \text{e} \quad \frac{m}{n}-p\leq-\epsilon$$

e sejam B e D as respectivas probabilidades. Estas inequações são equivalentes a

$$0<\frac{n-m}{n}-q<\epsilon \quad \text{e} \quad \frac{n-m}{n}-q\geq\epsilon$$

É claro que pode-se interpretar B e D como probabilidades de que o número de ocorrências $m'=n-m$ do evento F oposto a E em n provas satisfará ou a desigualdade $0<\frac{m'}{n}-q<\epsilon$ ou $\frac{m'}{n}-q\geq\epsilon$. Já que o membro direito de (5) contém somente os números ϵ e η dados, é claro que

$$D<\frac{B\eta}{1-\eta} \tag{7}$$

se (5) é satisfeita.

Sendo A+B=P a probabilidade da desigualdade

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\epsilon$$

e C+D=Q a probabilidade da desigualdade oposta

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq\epsilon$$

tem-se P+Q=1. Por causa de (6) e (7)

$$Q<\frac{P\eta}{1-\eta}$$

Consequentemente,

$$P+\frac{P\eta}{1-\eta}>1$$

ou

$$P>1-\eta$$

se

$$n\geq\frac{1+\epsilon}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\epsilon}$$

Isto completa a demonstração do Teorema de Bernoulli.

Podemos questionar sobre a influência de p em n, uma vez que pela demonstração nos paree que n não tem nenhum papel sobre p.

2.2 - A DESIGUALDADE DE TSHEBYCHEFF. UMA OUTRA DEMONSTRAÇÃO

DO TEOREMA DE BERNOULLI

Na presente secção pretende-se demonstrar o teorema de Bernoulli tendo como base o desigualdade de Tshebycheff. De referir que esta demonstração é muito mais simples que a demonstração original de Bernoulli.

Desigualdade de Tshebycheff

Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 finitas, então para qualquer valor de $\epsilon > 0$ tem-se:

$$P(|X-\mu|<\epsilon) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Demonstração: Nós vamos restringir-nos ao caso de uma variável aleatória discreta. De referir que poderá ser considerado o caso de variáveis aleatórias contínuas, bastando substituir os somatórios por integrais. Sendo os acontecimentos definidos pelas desigualdades $|X-\mu|<\epsilon$ e $|X-\mu|\geq\epsilon$ opostos, então a soma das respectivas probabilidades é igual a 1, i.e.

$$P(|X-\mu|<\epsilon)+P(|X-\mu|\geq\epsilon)=1.$$

Daqui segue-se

$$P(|X-\mu|<\epsilon)=1-P(|X-\mu|\geq\epsilon) \qquad (1)$$

Em seguida vai-se avaliar a probabilidade $P(|X-\mu|\geq\epsilon)$.

Como é sabido a fórmula para o cálculo da variância de uma variável aleatória X discreta que toma os valores x_i com probabilidades p_i respectivamente onde $1\leq i\leq n$ é dada por:

$$\sigma^2=[x_1-\mu]^2p_1+[x_2-\mu]^2p_2+...+[x_n-\mu]^2p_n \ .$$

Claramente se vê que todas as parcelas desta soma são positivas.

Deprezando as parcelas nas quais $|x_i-\mu|<\epsilon$ e considerando aquelas em que $|x_j-\mu|\geq\epsilon$ é evidente que a soma diminui. Admitindo que se desprezam as primeiras k parcelas, obtem-se:

$$\sigma^2\geq[x_{k+1}-\mu]^2p_{k+1}+[x_{k+2}-\mu]^2p_{k+2}+...+[x_n-\mu]^2p_n. \qquad (2)$$

Note-se que todos os membros da desigualdade $|x_j-\mu|\geq\epsilon$ $(j= k+1,\ k+2,\ ...,\ n)$ são estritamente positivos, por isso, elevando-os ao quadrado, obtem-se a desigualdade equivalente a $|x_j-\mu|^2\geq\epsilon^2$. Substituindo em (2) cada $|x_j-\mu|^2$ por ϵ^2 obtem-se:

$$\sigma^2\geq\epsilon^2(p_{k+1}+p_{k+2}+...+p_n) \ . \qquad (3)$$

Usando o teorema de adição, a soma das probabilidades $p_{k+1}+p_{k+2}+...+p_n$ é a probabilidade de X assumir um dos valores $x_{k+1},\ x_{k+2},\ ...,\ x_n,$ e cada um satisfaz a inequação $|x_j-\mu|^2\geq\epsilon$. Então deduz-se que $p_{k+1}+p_{k+2}+...+p_n$ expressa a probabilidade

$$P(|X-\mu|\geq\epsilon) \ .$$

Logo

$$\sigma^2 \geq \epsilon^2 P(|X-\mu| \geq \epsilon)$$

i.e.

$$P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}. \qquad (4)$$

De (4) e (1), obtem-se

$$P(|X-\mu| < \epsilon) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}, \qquad \text{c.q.d.}$$

Agora passemos a demonstração do teorema de Bernoulli enunciado em 2.1, mas desta vez aplicando a desigualdade de Tshebycheff.

Demonstração: Denote-se por X_1 a variável aleatória igual ao número de ocorrências de um acontecimento na primeira prova, por X_2 na segunda prova, ..., X_n na n-ésima prova. É evidente que cada uma das variáveis pode assumir apenas dois valores: 1 (o acontecimento ocorre) com probabilidade p e 0 (o acontecimento não ocorre) com probabilidade 1-p=q.

Seja a variável aleatória $Y=\frac{S_n}{n}$, onde $S_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. Claramente se verifica que

$\mu(\frac{S_n}{n}) = p$ e $\sigma^2(\frac{S_n}{n}) = \frac{pq}{n^2}$, pelo facto de se tratar de variáveis aleatórias de Bernoulli.

Vamos em seguida demonstrar que $|\frac{S_n}{n} - \mu(\frac{S_n}{n})| < \epsilon$.

Usando o teorema de Tshebycheff obtem-se:

$$\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \mu(X)\right| < \epsilon$$

1. Repare-se que a esperança matemática $\mu(X)$ de cada uma das variáveis X_i (ou seja a esperança matemática do número de ocorrências numa prova) é igual a probabilidade p. Isto deve-se ao facto da variável aleatória x (o número de ocorrências do acontecimento numa prova) poder assumir apenas dois valores $X_1 = 1$ (o acontecimento ocorreu), com probabilidade p e $X_2 = 0$ (o acontecimento não ocorreu) com probabilidade q=1-p. Pela definição de esperança matemática $\mu(X) = 1 . p + 0 . q = p$.

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - \mu(X)\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} - p\right| < \epsilon$$

2. Resta demonstrar que $\frac{X_1+X_2+...+x_n}{n} = \frac{m}{n}$.

Evidentemente, cada $X_1, X_2, ..., X_n$ é igual a 1, se o acontecimento ocorrer na prova correspondente. Consequentemente, a soma $X_1+X_2+...+X_n=m$ dá-nos o número de ocorrências do acontecimento em n provas. Donde

$$\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}=\frac{m}{n} \Rightarrow \left|\frac{X_1+...+X_n}{n}-\mu(X)\right|<\epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{m}{n}-p\right|<\epsilon$$

Note-se que $P[|\frac{S_n}{n}-p|\leq\epsilon]=P[|S_n-E(S_n)|\leq\epsilon n]\leq\frac{1}{\epsilon^2 n^2}\sigma^2(S_n)=\frac{pq}{\epsilon^2 n}\to 0$. Onde

$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Assim está demosnstrado o teorema de Bernoulli.

2.3 - ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DE MEDIDA

A noção de medida é introduzida com ajuda do conceito de função e para se definir uma função é necessário especificar, para além da própria lei que dá a função, o domínio e o contradomínio. No caso de medida o domínio consiste de conjuntos (subconjuntos de um conjunto fixo) os quais são sujeitos a determinadas restrições para que a medida como função seja um conceito valioso. O contradomínio consiste do intervalo semi-infinito $[0,+\infty[$, existindo extensões em que as medidas tomam valores negativos ou mesmo complexos, mas elas não serão consideradas neste trabalho.

Definição 2.3.1: Um sistema $\mathcal{G}$ de subconjuntos de um conjunto Ω não vazio chama-se σ ***-álgebra*** em Ω se é válido:

a) $A \in \mathcal{L}$;

b) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$;

c) $A_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

Definição 2.3.2: Seja $\mathcal{L}$ uma σ -álgebra em Ω . O par $(\Omega, \mathcal{L})$ chama-se *espaço mensurável.*

Definição 2.3.3: Seja $\mathcal{L}$ uma σ -álgebra em Ω . Uma aplicação P: $\mathcal{L} \to \mathbb{R}$ chama-se ***medida probabilística sobre*** $\mathcal{L}$ se:

a) $P(A) \geq 0 \;, \quad \forall A \in \mathcal{L}$;

b) $P(\Omega) = 1$

c) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Para cada sucessão de elementos de $\mathcal{L}$, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Ao tripleto $(\Omega, \mathcal{L}, P)$ chama-se ***espaço probabilístico***, onde P é uma probabilidade. Ao Conjunto Ω chama-se ***espaço amostral***, aos elementos de Ω ***eventos elementares*** e aos elementos de $\mathcal{L}$ ***eventos***.

Definição 2.3.4: Suponha que a cada ponto de um espaço amostral se atribua um número, então obtém-se uma função definida no espaço amostral. Esta função é chamada ***variável aleatória***.

Tipos de convergência

É sabido que o processo de medição está sujeito a erros, o que faz com que medições da mesma matéria tenham resultados diferentes. É usual tomar-se a média dos valores obtidos como medida (ou aproximação da medida). É de esperar que quanto mais medições se efectuar mais próximo se está do resultado correcto. Vide o livro de **Rao (1984)**[2].

Tomando n medições sucessivas pode-se afirmar que cada medição é uma variável aleatória X_i e a sua média $S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ será também uma variável aleatória. Espera-se que S_n se aproxime da medida real μ, da matéria medida, ou seja usando uma linguagem matemática, espera-se que S_n convirja para μ. Naturalmente que é necessário primeiro fixar ideias sobre

[2]- Rao, M. M.(1984) Probability Theory With Applications, pp. 45-47.

o que se entende por convergência, e é o que a seguir se apresenta, indicando-se por último as relações existentes entre os diferentes tipos de convergência.

1 - Sejam X_1, X_2,... variáveis aleatórias. Diz-se que X_n converge em ***quase toda a parte (q.t.p)*** ou converge ***quase seguramente (q.s)*** para a variável aleatória X quando $n\to\infty$ se $P(\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega) \text{ quando } n\to\infty\}) = 1$

Simbolicamente: $X_n \underset{qtp}{\to} X,\ n\to\infty$

O seguinte teorema diz que uma sequência X_n, X_n,... que converge q.s. tem um limite único, no seguinte sentido:

Se $X_n \underset{qtp}{\to} X$ e $X_n \underset{qtp}{\to} Y$ então $X \underset{qtp}{=} Y$, i.e. $P(\{\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$

Teorema 2.3.1 Seja X_1, X_2,... uma sucessão de variáveis aleatórias. Se X_n converge q.s, então o limite (que é também uma variável aleatória) é único.

Nota: 1) À convergência quase segura dá-se também o nome de *convergência com probabilidade 1*;

2) Para compreender a convergência quase segura, pegue num determinado $\omega \in \Omega$ e construa a sucessão $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$, esta sucessão pode convirgir ou divirgir. O que a definição de convergência diz é que o conjunto dos ω's para os quais $X_n(\omega)$ não converge tem medida zero.

2 - Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias. X_n converge ***em probabilidade*** para a variável aleatória X quando $n \to \infty$ se para qualquer $\varepsilon > 0$

$$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) \to 0, \quad n \to \infty$$

Simbolicamente: $X_n \underset{p}{\to} X, \; n \to \infty$

Teorema 2.3.2 Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sucessão de variáveis aleatórias. Se X_n converge em probabilidade, então o limite (que é também variável aleatória) é único.

Nota: O conceito de convergência em probabilidade difere do da convergência quase segura nos seguintes aspectos:

1) Na convergência em probabilidade é desenhada uma banda de raio ε a volta do limite. Para cada variável aleatória X_n constrói-se o conjunto $D_n(\varepsilon)$ daqueles $\omega \in \Omega$ para os quais o desvio de X_n em relação a X, i.e. $|X_n(\omega) - X(\omega)|$ é maior que ε. Calcula-se a medida de $D_n(\varepsilon)$, $P(D_n(\varepsilon))$. De acordo com a definição da convergência em probabilidade $P(D_n(\varepsilon)) \to 0$, quando $n \to \infty$. Note que, em geral, os D_n diferem para cada n, por maior que este seja;

2) Na convergência q.s o que se verifica é que para n suficientemente grande os conjuntos $D_n(\varepsilon)$ são iguais (pois para aqueles ω em que há convergência $|X_n(\omega)-X(\omega)|<\varepsilon$, para n suficientemente grande) e coincide com o conjunto em que há divergência da sucessão X_n.

3 - Seja X_1, X_2,... uma sucessão de variáveis aleatórias. A sucessão X_n converge ***em distribuição*** para a variável aleatória X quando $n\to\infty$, se

$$F_{X_n}(x)\to F_X(x)\,,\quad n\to\infty$$

para todos os $x\in C(F_X)$ onde $C(F_X)=\{x: F_X(x)\ \textit{é contínua em}\ x\}$, o conjunto de continuidade de F_X. Sendo F_{x_n} e F_x as funções de distribuição de X_n e X respectivamente.

Simbolicamente: $X_n \underset{d}{\to} X,\ n\to\infty$.

Teorema 2.3.3 Seja $X_1,X_2,\ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias. Se X_n converge em distribuição, então a distribuição limite é única.

Nota: No caso da convergência em distribuição, a unicidade significa, se $X_n \underset{d}{\to} X$ e $X_n \underset{d}{\to} Y$, então $X \underset{d}{=} Y$ (X é igual a Y em distribuição), i.e. $F_X(x)=F_Y(x)$, <u>para todos os x</u>.

4 - *Relação entre os diferentes tipos de convergência*

As questões que se levantam são:

Como é que a diferenças entre os conceitos de convergência atrás introduzidos se apresentam?

Por outras palavras, quais são as implicações de um determinado tipo de convergência para os outros tipos de convergência?

A resposta para esta questão será dada pelo seguinte teorema o qual não iremos demonstrar:

Teorema 2.3.4 Sejam X e $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias. Então tem lugar as seguintes implicações, para $n \to \infty$:

$$X_n \underset{qtp}{\to} X \Rightarrow X_n \underset{P}{\to} X \Rightarrow X_n \underset{d}{\to} X$$

2.4 - OUTRAS VERSÕES DA LEI DOS GRANDES NÚMEROS

O teorema de Bernoulli conduz naturalmente à seguinte questão:

- O que se pode dizer no caso de se ter uma sequência de variáveis aleatórias obdecendo a uma distribuição arbitrária que não seja obrigatoriamente a de Bernoulli?

Outra questão que se pode levantar é a seguinte:

- O teorema de Bernoulli afirma que a grandeza $\frac{S_n}{n}$, onde $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$, converge em probabilidade para o valor p, sendo X_i variável de Bernoulli. Existirá alguma afirmação análoga mas envolvendo convergência em qtp?

A tentativa de resposta a estas duas perguntas conduz a uma série de diferentes versões das leis dos grandes números, procurando-se sempre formular estas leis sob as condições mais gerais possíveis.

Antes de continuar apresentemos a seguinte

Definição 2.4.1: Uma sucessão X_i de variáveis aleatórias reais cada uma com esperança matemática $E(X_i)$ diz-se satisfazer a ***lei fraca dos grandes números*** se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))=0$$

é válido no sentido de convergência em probabilidade i.e.

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))|\geq\epsilon)\to 0,\ \forall\epsilon>0$$

analogamente a sucessão X_i diz-se satisfazer a ***lei forte dos grandes números*** se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))=0$$

é válido no sentido de convergência qtp i.e.

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))=0)=1$$

Assim, as leis dos grandes números dividem-se em dois grandes grupos; as **leis fracas** e as **leis fortes**, conforme as suas afirmações se referem a convergência em probabilidade ou convergência em qtp, respectivamente.

Exemplo das leis dos grandes números.

Passamos a apresentar um exemplo de uma operação de dealing (compra e venda de moeda) num banco. Seja X_k, variável aleatória, que representa um ganho na k-ésima operação. Então $S_n=X_1+...+X_n$ representa o número acumulado de ganhos em n operações independentes.

Para cada perda o banco fica lesado em V_k, então $P_k=V_1+...+V_k$ representa o valor acumulado de perdas. Assim, S_n-P_k o valor real acumludo ganho ou perdido. A lei dos grandes números aplica-se quando existe $\mu=E(X_k)$. Esperamos que $\frac{P_k}{n}<\mu$, i.e., mais ganhos que perdas. Então, o caso $\frac{P_k}{n}<\mu$ é favorável ao banco e $\frac{P_k}{n}>\mu$ desfavorável.

No caso em que $\frac{P_k}{n}=\mu$ para n grande podemos afirmar que o valor ganho é justo, o que significa que as operações de dealing foram justas.

A seguir vamos apresentar diferentes versões das leis fracas dos grandes números, mas sem apresentar as respectivas demonstrações. Os interessados nas demonstrações poderão encontrá-las no livro de **Rao (1984)**[3].

Tshebycheff (1882) estabeleceu o seguinte.

Teorema 2.4.1. Seja X_1, X_2,... uma sequência de variáveis aleatórias independentes sobre o espaço de probabilidade (Ω, Σ, P) com médias $\mu_1, \mu_2, \ldots$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ tal que se tem $\frac{\sigma^2(S_n)}{n^2} \to 0$ quando $n \to \infty$, onde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Então esta sequência obdece a **lei fraca dos grandes números**, o que significa que dado um $\varepsilon > 0$ temos

$$\lim_{n\to\infty} P[|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| \geq \varepsilon] = 0$$

Nota: Este resultado é válido em particular para o caso em que as variáveis aleatórias têm a mesma distribuição, pois neste caso $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma^2$, o que implica que

$$\frac{\sigma^2(S_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0.$$

Em **Khintchine (1928)** obtém o mesmo resultado assumindo simplesmente a existência do primeiro momento das variáveis aleatórias X_1, X_2,...independentes e identicamente distribuídas (i.e. $P[X_n < x] = F(x), x \in \mathbb{R}, n \geq 1$).

[3]- Rao, M. M. (1984). Probability Theory With Applications, pp. 57-62.

É possível ainda obter os mesmos resultados relaxando a condição de independência das variáveis aleatórias. Exemplo desses resultados são os seguintes:

Corolário 2.4.1. Seja X_1, X_2,..., X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes duas a duas definidas sobre o espaço (Ω, Σ, P), com a mesma distribuição e com o primeiro momento finito. Então, esta sequência obdece a lei dos grandes números.

O seguinte teorema obtido por **Rajchman (1930)** constitui a ponte de passagem das leis fracas para as fortes.

Teorema 2.4.2. Seja $\{X_n,\ n\geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas definidas em (Ω, Σ, P) tais que $\sigma^2(X_n) \leq M < \infty,\ n\geq 1$. Então $\dfrac{[S_n - E(S_n)]}{n} \underset{qtp}{\to} 0$.

Neste resultado embora trabalhemos com ausência de correlação, que é a hipótese fraca que a independência, tivemos que exigir a limitação uniforme das variâncias que tem como efeito a hipótese forte.

Agora vamos passar a consideração das **Leis Fortes**.

A demonstração da versão forte correspondente ao Teorema de Bernoulli foi efectuada por **Émil Borel (1909)** e esta constitui a primeira forma das leis dos grandes números. Ele efectua esta demonstração para variáveis aleatórias de Bernoulli:

Teorema 2.4.3 (lei dos grandes números de Borel-1909). Para o caso de variáveis de Bernoulli

$$P[\frac{S_n}{n} \to p] = 1$$

Naturalmente se coloca a questão se estas leis são válidas para outras variáveis diferentes das de Bernoulli.

À semelhança das leis fracas não iremos apresentar demosntrações remetendo o leitor para a literatura atrás referenciada. Iremos aqui enunciar diferentes versões das leis fortes dos grandes números, que consideramos de destaque dentro deste tipo de resultados.

Teorema 2.4.4 (Primeira Forma da Lei Forte dos Grandes Números). Se $X_1, X_2, \ldots$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes definidas sobre (Ω, Σ, P) com médias 0 e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$, então a sequência obdece a lei forte dos grandes números, i.e.

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \underset{qtp}{\to} 0, \quad n \to \infty.$$

Este resultado foi obtido por Kolmogoróv assim como o resultado seguinte que é a célebre ***lei forte dos grandes números de Kolmogoróv***. Ambos foram obtidos em **1928**.

Teorema 2.4.5 (Principal Lei Forte dos Grandes Números). Seja $\{X_n, \ n \geq 1\}$ variáveis aleatórias independentes defenidas em (Ω, Σ, P) com uma distribuição comum e

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Então $\frac{S_n}{n} \underset{qtp}{\to} \alpha_0$ sse $(E|X_i|) < +\infty$ e neste caso $\alpha_0 = E(X_1)$. Por outro

lado, se $E(|X_i|) = +\infty$, então $\operatorname{limsup}_n(\frac{|S_n|}{n}) \underset{qtp}{=} +\infty$.

Outro resultado de destaque na classe das leis fortes dos grandes números é provado por **Etemadi (1981)**.

Teorema 2.4.5 (Etemadi). Cada sucessão X_n de variáveis aleatórias reais, independentes aos pares, com o primeiro momento e com a mesma distribuição satisfaz a lei forte dos grandes números.

2.5 - ILUSTRAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta secção vamos apresentar ilustrações gráficas das leis dos grandes números, como resultados de programas desenvolvidos em linguagem de programação Pascal. A escolha desta linguagem deveu-se ao facto da autora estar familiarizada com a mesma e ser adequada para modelação gráfica.

Vamos passar a apresentar, os resultados de um programa (***vide anexo I e II***) que gera n números aleatórios obdecendo uma determinada distribuição escolhida, calcula a média desses n números aleatórios e exibe o respectivo gráfico.

Em seguida passamos a apresentar alguns comentários sobre esses resultados. De salientar que estes comentários são efectuados de uma forma empírica.

Distribuição Binomial

O algorítmo consiste em gerar n vezes números aleatórios e comparar com a probabilidade p. Se o número aleatório gerado fôr menor que p então a variável aleatória de Bernoulli X será igual a unidade, se não será igual a zero. Achar a média dos números aleatórios gerados e fazer o respectivo gráfico .

Variando o valor de p e mantendo n,´podemos notar que a medida que p aumenta a média n tende mais rapidamente para p, achamos que isto deve-se ao facto de maior quantidade de números gerados ser menor que p. Isto também lava-nos a supor que na demonstração de Bernoulli, em que este conclui que $n \geq \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2} \log \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\epsilon}$, talvez Bernoulli tenha perdido p ao longo da demonstração.

Mantendo o valor de p e variando o valor de n, podemos ver que a medida que n aumenta, a média dos n números gerados tende para p.

Distribuição de Poisson

Para esta distribuição o algorítimo consiste em gerar a variável aleatória X e para esta variável aleatória achar a probabilidade, até que a variável aleatória gerada seja menor que a probabilidade p. Achar a média dos números gerados e efectuar o respectivo gráfico.

Podemos reparar que a medida que λ descresce a média dos números aleatórios gerados aproxima-se mais da esperança. Isto deve-se ao facto de $\lambda = np$ e como mantemos o valor de n e variamos o valor de λ , então significa que a medida que λ decresce p cresce e mais uma vez p tem uma influência bastante positiva sobre n.

Mantendo o valor de λ e variando o valor de n, podemos notar que à medida que n aumenta a média dos valores aleatórios gerados apróxima-se de λ .

Distribuição Uniforme

Gerados n numeros aleatórios obdecendo a distribuição uniforme, podemos observar que a medida que a esperança matemática aumenta, mais a média dos números gerados aproxima-se dessa esperança.

Mantendo os valores de a e b, portanto da esperança matemática, e variando o valor de n vemos que a média aproxima-se da esperança à medida que n cresce.

Distribuição Normal

Nesta distribuição a convergência da média dos valores aleatórios gerados em relação à esperança matemática, tem o mesmo comportamento quando se mantém o mesmo valor de n e se aumenta o valor da esperança. Portanto, o valor da esperança não influencia a convergência da média.

Em relação a variação de n e manutenção do valor da esperança, mais os valores da média se aproximam da esperança matemática.

Distribuição Exponencial

Quanto maior fôr o valor de λ mais a média dos números gerados se aproxima da esperança matemática $1/\lambda$.

Em relação a variação de n e manutenção do valor da esperança a situação é a mesma descrita acima.

COMPARAÇÃO ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES

Distribuição mais convergente

Fazendo uma comparação entre os resultados do programa que faz a demonstração da Lei dos Grandes Números (*vide anexo I -programa Simula 1*) podemos reparar que a **Distribuição Uniforme** (*vide gráfico da pag. 84*) é a que mais rapidamente a média dos números gerados se aproxima da esperança matemática. Olhando para o gráfico desta distribuição onde a esperança matemática é igual a 9, reparamos que quase todos os valores da média coincidem com o valor da esperança matemática.

Distribuição mais divergente

Usando os resultados do mesmo programa chegamos a conclusão que a **Distribuição Normal** (*vide anexo II, pag. 86-88*) é a que tem os valores da média mais divergentes em relação à esperança matemática. Mesmo variando o valor da esperança matemática a situação, em termos de convergência, se mantém muito semelhante.

III - APLICAÇÃO DAS LEIS DOS GRANDES NÚMEROS

Neste capítulo vamos mostrar a aplicação das leis dos grandes números em Filas de Espera e Passeio Errante. Os teoremas que são aqui apresentados não iremos demonstrá-los podendo os interessados nas suas demonstrações obterem no livro de **Rao (1984)**[4]. Através de aplicação computacional podemos demonstrar os teorema 3.1.1, sobre filas de espera.

3.1 - FILAS DE ESPERA

Em seguida iremos apresentar aplicação das Leis dos Grandes Números na Teoria de Filas de Espera. Semelhante resultado foi considerado por **A. Kolmogoróv (1936)** e é equivalente ao modelo de um servidor.

Em geral um Sistema de Filas de Espera consiste de três elementos:
i) os clientes;
ii) o serviço e
iii) a fila.

Estes são termos gerais que podem se referir a pessoas num serviço dum hospital, numa caixa dum banco, etc. A chegada de clientes é tida como aleatória e o mesmo acontece com o tempo de serviço bem como com o tempo de espera na fila. Seja a_k o tempo de chegada entre o k-ésimo e o $(k+1)$-ésimo clientes, b_k o tempo de serviço e W_k o tempo de espera do

4- Rao M. M. (1984). Probability Theory With Applications, pp. 74-84.

k-ésimo cliente. Quando o primeiro cliente chega assume-se que este não espera. Assim, assume-se $a_0=W_0=0$. b_k+W_k é o tempo em que o $(k+1)$-ésimo cliente espera na fila antes de ser atendido na caixa. Assumimos o tempo entre chegadas de k-ésimo e $(k+1)$-ésimo clientes variáveis aleatórias não negativas com distribuição comum e similar, b_k é não negativo e identicamente distribuído e independente de a_k. Iremos assumir que a probabilidade básica de espaços é suficiente para suportar sequências semelhantes independentes, ou por outra é possível alargá-la por auxílio até a sua realização. O tempo de espera é também uma variável aleatória positiva. Se $a_{k+1}>b_k+W_k$, então o $(k+1)$-ésimo cliente obviamente não estará interessado em aguardar na fila, mas se $a_{k+1}\leq b_k+W_k$, ele irá esperar $b_k+W_k-a_{k+1}$ unidades de tempo. Então,

$$W_{k+1}=\max(W_k+b_k-a_{k+1},0), \quad k\geq 0. \tag{1}$$

Se tomarmos $X_k=b_{k-1}-a_k$, então os X_k são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e em (1) tem-se $W_0=0$ e $W_{k+1}=\max(W_k+X_{k+1},0)$, $k\geq 0$. Note que sempre que $W_k=0$ para algum k, o servidor está livre e a situação é semelhante à inicial, assim tem-se um modelo recorrente. Esta recorrência é a chave para a solução do problema do comportamento limite da sequência W_k. É chamado de ***Problema Simples de Servidor da Fila***.

Considere $S_0=0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$. Então a sequência $\{S_n, n\geq 0\}$ diz-se também tomar a forma de um passeio errante em $\mathbb{R}$ e se $S_k\in A$ para algum $k\geq 0$ e conjunto A de Borel, que diz que o caminho S_n visita A no estágio k. Numa situação de fila, temos a seguinte afirmação sobre o processo $\{W_n, n\geq 0\}$.

Teorema 3.1.1. Seja $X_k = b_{k-1} - a_k$, $k \geq 1$, e $\{S_n, n \geq 0\}$ com as mesmas condições acima referidas. Então para cada $n \geq 0$, as quantidades W_n e $M_n = \max\{S_j, 0 \leq j \leq n\}$ são variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Portanto, se $F_n(x) = P[W_n < x]$, então

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

existe para cada x, mas $F(x) \equiv 0$ é possível.

Se $E(X_1)$ existe, então $x \in \mathbb{R}$, sempre que $E(X_1) \geq 0$, e F(.) define uma função de distribuição real quando $E(X_1) < 0$, i.e., $F(+\infty) = 1$.

A última afirmação diz que se $E(b_k) \geq E(a_k)$, $k \geq 1$, então o tempo de serviço esperado não é similar ao tempo entre chegadas, então a fila de clientes vai certamente crescer bastante sem limite (i.e. com probabilidade 1).

Suponha que $E(|X_1|) < \infty$. Vamos considerar separadamente três casos, da demonstração deste teorema, pelo facto de se aplicar a Lei dos Grandes Números: (i) $E(X_1) > 0$, (ii) $E(X_1) < 0$, e (iii) $E(X_1) = 0$ para o cálculo de probabilidade de A_x, quando $A_x = [supr_{n \geq 0} S_n \leq x]$.

Caso (i) $\mu = E(X_1) > 0$. Pela Lei Forte dos Grandes Números, $\frac{S_n}{n} \underset{qtp}{\rightarrow} E(X_1)$, para n suficientemente grande, $S_n > E(X_1) \times n$ qtp. Entretanto $A_x = \bigcap_{n \geq 0} [S_n \leq x] \subset \{\omega : S_n(\omega) > n\mu,\ n \geq n_\omega\}^c$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$ e assim $P(A_x) = 0$, ou F(x)=0, $x \in \mathbb{R}^+$, neste caso.

Caso (ii) $\mu = E(|X_1|) < 0$. Novamente, pela Lei Forte dos Grandes Números, $\frac{S_n}{n} \underset{qtp}{\rightarrow} E(X_1)$, e tendo $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, existe $N_{\varepsilon\delta}$: $n \geq N_{\varepsilon\delta} \Rightarrow$

$$P\left[\left| \left(\frac{S_n}{n}\right) - E(X_1) \right| \leq \varepsilon,\ n \geq N_{\varepsilon\delta} \right] \geq 1 - \delta. \tag{2}$$

Isto pode ser expresso da seguinte maneira. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $E(X_1) + \varepsilon < 0$. Então, para $0 < \delta < \frac{1}{2}$, existe $N_{\varepsilon\delta}$ tal que com (4),

$$\begin{aligned} P[S_n < 0,\ n \geq N_{\varepsilon\delta}] &\geq P[S_n \leq n(\mu + \varepsilon),\ n \geq N_{\varepsilon\delta}] \\ &\geq P[n(\mu - \varepsilon) \leq S_n \leq (\mu + \varepsilon)n,\ n \geq N_{\varepsilon\delta}] \geq 1 - \delta \end{aligned} \tag{3}$$

Para $N_{\varepsilon\delta}$, considere o conjunto finito $S_1, S_2, \ldots, S_{N_{\varepsilon\delta}-1}$. Desde que sejam variáveis aleatórias reais, podemos encontrar $x_\delta \in \mathbb{R}^+ :\ x \geq x_\delta \Rightarrow$

$$P[S_1 < x, \ldots, S_{N_{\epsilon\delta}-1} < x] > 1-\delta. \tag{4}$$

Se

$$\tilde{A}_x = \bigcap_{n \geq N_{\epsilon\delta}} [S_n < x], \quad B_x = \bigcap_{k=1}^{N_{\epsilon\delta}-1} [S_k < x], \quad A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} [S_n < x],$$

então $A_x = \tilde{A}_x \cap B_x$, para $x \geq 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= P(A_x) = P(\tilde{A}_x \cap B_x) \\ &= P(\tilde{A}_x) + P(B_x) - P(\tilde{A}_x \cup B_x) \qquad \text{[De (3) e (4)]} \\ &\geq 2(1-\delta) - 1 = 1 - 2\delta \end{aligned}$$

Caso (iii) $E(X_1)=0$. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1$, é uma sequência de variáveis aleatórias simetricamente dependentes e $S_0 = 0$. $\underset{n\geq 0}{supr} S_n \underset{qtp}{\geq} 0$, desde que assumamos que $X_1 \underset{qtp}{\neq} 0$, todos os S_n não desaparecem de forma idêntica em qtp. Considere a variável aleatória $\limsup_n S_n$. Então $Y[=Y(S_n,\ n \geq 1)]$ é simetricamente dependente em S_n e mensurável em σ-*álgebra*. Entretanto, isto é igual a uma constante k_0 qtp. Isto será considerado no Teorema 3.2.4 em que $\frac{S_n}{n} \underset{qtp}{\to} 0$ pela Lei Forte dos Grandes Números, S_n

tem valores positivos e negativos infinitivamente. $k_0 \geq 0$, mas entretanto

$$\begin{aligned} 0 \leq Y &= \limsup_{n\geq 1} S_n = \limsup_{n\geq 1} (X_1 + .. + X_n) \\ &= X_1 + \limsup_{n\geq 2} (X_2 + .. + X_n) \underset{D}{=} X_1 + Y \end{aligned} \tag{5}$$

Desde que $Y = K_0$ qtp e X_1 é uma variável aleatória real diferente de zero, (5) pode acontecer somente se $k_0 = +\infty$. $[\limsup_{n\geq 1} S_n = +\infty] \subset [\sup_{n\geq 0} r S_n = \infty]$, e assim voltamos a situação

vista no caso (i), i.e., $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Isto completa a demonstração deste teorema.

O resulatdo precedente pode nos induzir a várias questões, como as que a seguir se indicam. Quando $E(X_1) < 0$, diz-se que o tempo de espera $W_n \underset{D}{\to} W$ onde W é uma variável aleatória.

Assim, neste caso, se Q_n é o número de clientes na fila quando o serviço do n-ésimo cliente terminou, então Q_n é uma variável aleatória. Mas, qual será a distribuição de Q_n e será que $Q_n \underset{D}{\to} Q$? Desde que Q_n não seja maior que k ssé o términus do tempo de serviço do n-ésimo

cliente não é maior que o tempo entre chegadas dos últimos k clientes, obtemos

$$P[Q_n < k] = P[W_n + b_n \leq a_{n+1} + ... + a_{n+k}] . \tag{6}$$

Na verdade, as variáveis aleatórias são independentes e assim, em princípio podem ser calculadas explicitamente. Entretanto, pode ser ilustrado que $Q_n \underset{D}{\to} Q$ desde que $W_n \underset{D}{\to} W$ e b_n e a_n sejam identicamente distribuídas. Outras questões semelhantes estão relacionadas com a distribuição dos tempos $W_n=0$.

Todas estas questões dizem respeito a problemas de filas com um servidor. E como será com problemas análogos com vários servidores? Isto é mais envolvente, mas não será aqui considerado.

3.2 - PASSEIO ERRANTE

No teorema 3.1.1 verificamos que o comportamento da sequência do tempo de espera é ditado por $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k,$ a sequência de somas parciais de variáveis aleatórias identicamente distribuídas.

Definição 3.2.1: Chamamos de ***Passeio Errante*** ao inesperado comportamento da sequência de tempo ditado por $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k,$ a sequência de somas parciais de variáveis aleatórias identicamente distribuídas.

Definição 3.2.2: Um estado $x \in \mathbb{R}$ é chamado ***Ponto Recorrente*** do intervalo da sequência se para cada $\varepsilon>0$, $P[|S_n-x|<\varepsilon, i.o.]=1$, isto é o passeio errante *visita* infinitamente x com probabilidade 1.

Definição 3.2.3: Seja R o conjunto de todos os pontos recorrentes de $\mathbb{R}$. O ponto $y\in\mathbb{R}$ é designado ***valor possível*** da sequência se para cada $\varepsilon>0$, existe k, tal que $P[|S_k-y|<\varepsilon]>0$.

Teorema 3.2.1 Para o passeio errante $\{S_n, n\geq 1\}$, o conjunto R de valores recorrentes (pontos) com a seguinte descrição: qualquer $R=\emptyset$ ou $R\subset\mathbb{R}$ é um subgrupo fechado. No caso em que $R\neq\emptyset$, $R=\{0\}$ sse $X_1=0$ qtp e se $X_1\neq 0$ qtp, obtemos ambos $R=\mathbb{R}$ ou então $R=\{nd: n=0,\pm 1,\pm 2,...\}$ o Grupo cíclico infinito gerado pelo número $d>0$.

É claro que da forma acima resulta que 0 gera uma regra chave num fenómeno recorrentedo Passeio Errante. A caracterização disto é avaliável:

Teorema 3.2.2 Seja $\{X_n, n\geq 1\}$ variáveis aleatórias indenpendentes e identicamente distribuídas em $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ e $\{S_n, n\geq 0\}$ a sequência do Passeio Errante correspondente.

Se $\forall\varepsilon>0$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|S_n|<\varepsilon]<\infty \qquad (1)$$

então 0 não é o valor recorrente de $\{S_n,\ n\geq 0\}$. Se, por outro lado, para todo $\varepsilon>0$ é verdade que a série em (1) diverge, então 0 é recorrente.

Teorema 3.2.3 Seja $\{X_n,\ n\geq 1\}$ variáveis aleatórias indenpendentes e identicamente distribuídas em (Ω,Σ,P) e $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0=0$, onde $k\geq 1$. Então 0 é o valor recorrente do Passeio Errante k-dimensional $\{S_n,\ n\geq 0\}$ *ssé* $\forall\varepsilon>0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|S_n|<\varepsilon]=+\infty. \qquad (2)$$

Além disso, o conjunto de todos os valores recorrentes R formam um subgrupo fechado do grupo aditivo $\mathbb{R}^k$.

Definição 3.2.4: Se $R=\varnothing$ então o Passeio Errante é chamado ***Transitório*** e de ***Recorrente*** se $R\neq\varnothing$.

Agora podemos conhecer a condição suficiente para a recorrência do Passeio Errante e isto completa a demonstração do caso (iii) do teorema 3.1.1.

Teorema 3.2.4 Seja $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\{X_n,\ n \geq 1,\ i.i.d.\}$ uma sequência de Passeio Errante (real) em (Ω, Σ, P) tal que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[p]{} 0$. Então é recorrente.

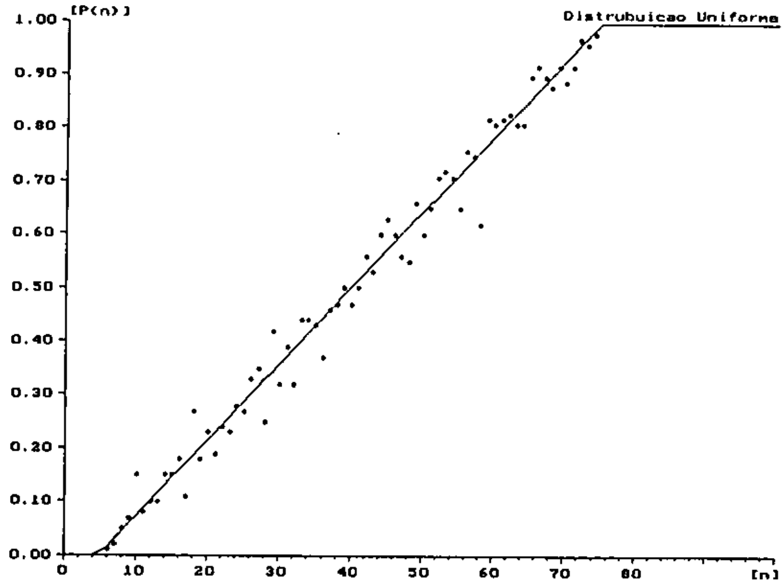
Observaçao: Esta condição contém variáveis aleatórias simétricas sem a existência do primeiro momento. Por outro lado se $E(|X_1|) < \infty$, então é sempre verdadeiro pela Lei Forte dos Grandes Números ou pela Lei Fraca dos Grandes números. Podemos estabelecer este resultado com a hipótese fraca. O resultado não é válido em dimensões elevadas (> =3). É verdadeira na segunda dimensão, mas precisa de diferentes métodos de Funções Características.

3.3 - ILUSTRAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta secção vamos apresentar a ilustração computacional como demonstração do teorema 3.1.1 da aplicação da lei dos grandes números em filas de espera em que

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

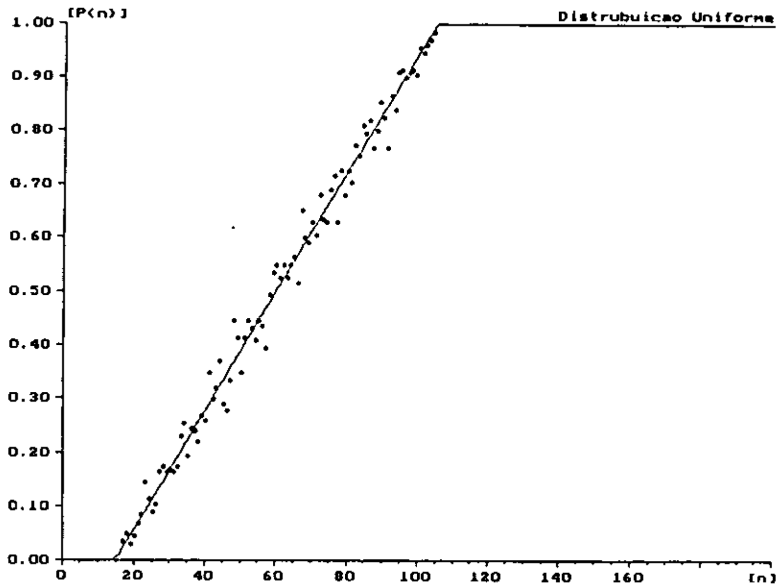
sendo $F_n(x) = P[W_n < x]$.



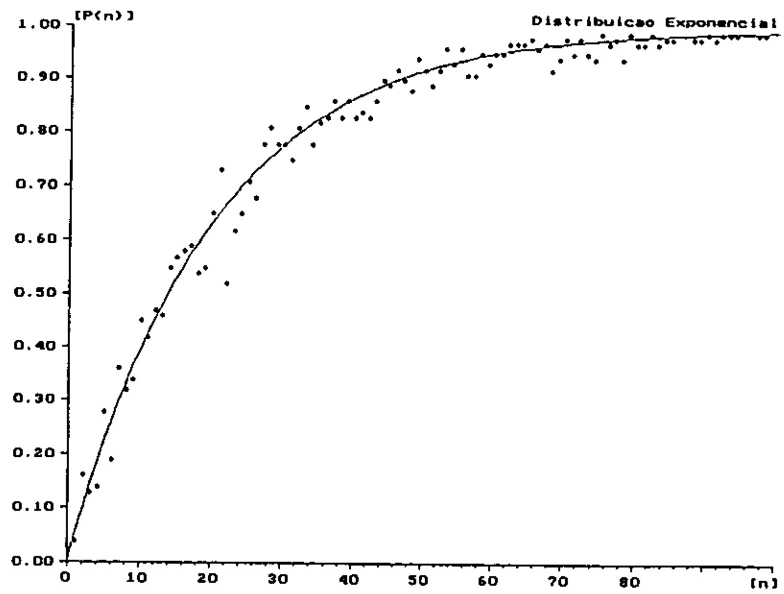
Sendo: a=5;

b=75;

n=100.

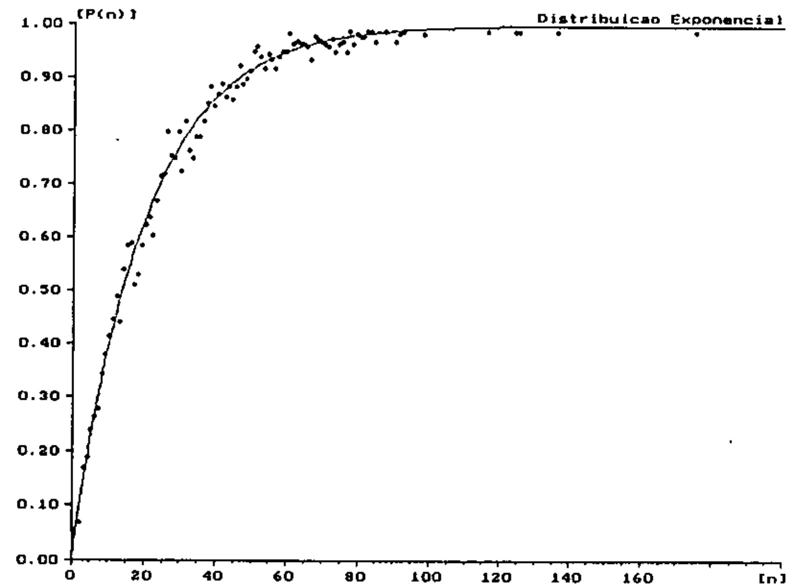


Sendo: a=15;
b=100;
n=200.



Sendo: λ=0.05;

n=100.



Sendo: $\lambda=0.02$;

n=200.

Como podemos deparar tanto na distribuição uniforme como na exponencial a medida que n aumenta a probabilidade de $X_i < x$ tende para a função de distribuição. O que notamos é que tanto para a distribuição uniforme como para a exponencial a medida que o valor de n aumenta mais rapidamente a probabilidade aproxima-se da função de distribuição.

É importante dizermos que este programa (***Vide anexo I-Programa Simula** 2*) faz também uma ilustração da convergência em distribuição.

IV - CONCLUSÕES E ALGUMAS SUGESTÕES DA CONTINUAÇÃO DESTE TRABALHO

SUGESTÕES

Várias sugestões podem ser apresentadas para a continuidade deste trabalho, mas é interessante ter em consideração as seguintes:

- Podem ser investigadas outras propriedades do Ponto Errante recorrente. Para tal é necessário efectuarmos um estudo aprofundado de funções características e funções de distribuição. Necessidade existirá de efectuarmos um estudo profundo do somatório de variáveis aleatórias independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas.
- Estudo de aplicação das leis dos grandes números em filas de espera envolvendo mais de um servidor.
- Estudo aprofundado da influência de p em n, para variáveis de Bernoulli no Teorema de Bernoulli.
- Simulação de um passeio errante no computador.
- Estudo aprofundado das distribuições na modelação das leis dos grandes números.

CONCLUSÕES

Na distribuição binomial para variáveis aleatórias de Bernoulli, a esperança matemática p tem influência sobre n.

Gerando n números aleatórios segundo uma determinada distribuição, nota-se que de facto que a média tende para a esperança matemática em quase toda a parte (probabilidade igual a unidade), o que comprova a definição da lei forte dos grandes números.

Fazendo uma comparação com os teoremas tratados ao longo deste trabalho podemos comprovar que para o caso de variáveis de Bernoulli (*vide Teorema 2.4.3, pág. 30*) a média de variáveis aleatórias tende para a probabilidade (*vide os resultados das páginas 77-79*).

De salientar que os resultados seguintes (*vide páginas 80-91*) comprovam os Teoremas 2.4.4, 2.4.5 e 2.4.6 com demonstrrações de Kolmogoróv e Etemadi e dão uma resposta clara a questão levantada sobre as leis dos grandes números para variáveis que não sejam de Bernoulli.

A probabilidade do tempo de permanência na fila de espera de pessoas segundo uma determinada distribuição tende para a função de distribuição.

Esse tempo de permanência de clientes converge em distribuição para a função de distribuição.

Na Distribuição de Poisson, à medida que λ cresce mais μ_n se aproxima de μ. Isto deve-se ao facto de $\lambda = np$, como mantemos n então significa que p cresce.

A Distribuição mais convergente é a Distribuição Uniforme na modelação das leis dos grandes números.

A distribuição mais divergente é a Distribuição Normal na modelação das leis dos grandes números.

V - ANEXOS

ÍNDICE

ANEXO I - PROGRAMA EM TURBO PASCAL

```
Program Simula1;

{*Este programa gera n números aleatórios segundo uma determinada distribuição,
calcula a média desses números e exibe o respectivo gráfico*}

uses Dos, crt, Graph, Cp3;

Const e=2.718281828459045235 36;
      pi=3.1415927;

Type Array1= array [1..3000] of real;


Var rnd, soma, p, lambda, a, b, med, desvio: real;
    i, n, opcao, aux, min, max: integer;
    media: array1;
    cc:char;
    Titulo:String[36];


Function LeadingZero (w:word):string;
Var s:string;

Begin
     Str(w:0,s);
     if Length(s)=1 then
        s:='0'+s;
     LeadingZero:=s;
end; {LeadingZero}


Procedure Tempo;
Const Days:Array[0..6] of string[9]=('Domingo','2ª Feira','3ª Feira','4ª Feira',
                                     '5ª Feira', '6ª Feira', 'Sabado');
Var ano,mes,dia,H,M,S,hund,dow:word;
Begin
```

```
    TextColor(Yellow);
    GotoXY(5,2);
    GetDate(ano,mes,dia,dow); Write(days[dow]);
    GotoXY(4,3);write(' ',dia,'/',mes,'/',ano);
    TextColor(Yellow);
    GotoXY(68,3);
    GetTime (H,M,S,hund);
    Write(LeadingZero(H),':',LeadingZero(M),':',LeadingZero(S));
end; {Tempo}


Procedure Menu;
Const Title= 'TRABALHO DE LICENCIATURA';
var i,j:integer;
    t:boolean;

Begin
    TextColor(LightCyan);
    for i:= 10 to 70 do
    begin
        GotoXY(i,1);
        writeln (Chr(177));
    end;
    for j:= 2 to 9 do
    begin
        gotoXY(10,j);writeln (Chr(177));
        gotoXY(70,j);writeln (Chr(177));
    end;
    for i:= 10 to 70 do
    begin
        GotoXY(i,9);
        writeln (Chr(177));
    end;
    GotoXY(28,4);
    TextColor(White);
    writeln(title);
    GotoXY(29,6);
    writeln('Os Teoremas do Limite');
    writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;
    TextColor(White);
    writeln('Por':42);writeln;
    writeln('Paula Libombo':48);writeln;writeln;
    TextColor(12);
```

```
    writeln('Maputo, Julho de 1996':53);writeln;writeln;writeln;
    TextColor(27);
    write('Tecle <F1> para continuar');
    Repeat
    until (Keypressed)
end; {Menu}


Procedure Binomial (p:real; n:integer);
var X, i, j:integer;
   c, F, pr: real;

Begin
    min:=0;
    max:=1;
    Soma:=0;
    For j:= 1 to n do
    Begin
       rnd:= random;
       if (rnd<p) then
         X:=1
       else
         X:=0;
       Soma:=Soma+X
    end;
    media[aux]:=Soma/n
end; {Binomial}


Procedure Validap (Var p:real);
Begin
       Repeat
          readln (p);
          if ((p<0) or (p>1)) then
          begin
             GotoXY (15,16);
             Writeln ('Valor de p esta errado!');
             GotoXY(15,18);
             Write ('Reintroduza ')
          end
       until ((p>=0) and (p<=1))
end; {ValidaP}
```

```
Procedure Poisson (n:integer; lambda:real);
Var X, i, j, l: Integer;
   c, F, pr: real;

Begin
     X:=0;
     i:=0;
     Soma:=0;
     min:=0;
     max:=round(Lambda+Lambda);
     p:=exp(-lambda);
     F:=p;
     For j:= 1 to n do
     Begin
         rnd := random;
         while not (rnd<F) do
         {if not (rnd<F) then}
         begin
               p:=(lambda*p)/(i+1);
               F:=F+p;
               i:=i+1
         end;
         X:=i;
         soma:=soma+X;
         p:=exp(-lambda);
         F:=p;
         i:=0
     end;
     media[aux]:=soma/n
end;  {Poisson}


Procedure uniforme (n:integer; a,b:real);
Var j:integer;
   X:real;

Begin
     Soma:=0;
     min:=trunc(a);
     max:=trunc(b);
     For j:= 1 to n do
     Begin
         rnd := random;
```

```
        X:=a+rnd*(b-a);
        Soma:=Soma+X;
    end;
    media [aux]:=soma/n
end;  {Uniforme}


Procedure normal1 (n:integer; med,desvio:real);
{Metodo de Box-Muller}
Var rnd1, rnd2, X, V: real;
   j:integer;

Begin
    Soma:=0;
    min:=0;
    max:=round(2*med);
    For j:= 1 to n do
    Begin
       rnd1:= random;
       rnd2:= random;
       V:=SQRT(-2*ln(rnd1))*(cos (2*pi*rnd2));
       X:=med+V*desvio;
       Soma:=Soma+X
    end;
    Media[aux]:=Soma/n
end; {Normal1-Box Muller}


Procedure Exponencial (n:integer; lambda:real);
Var j:integer;
   X:real;

Begin
    Soma:=0;
    max:=round(2*1/lambda);
    For j:= 1 to n do
    begin
    For i:=1 to n do
    begin
       rnd := random;
       X:=1/Lambda*ln(1/(1-rnd));
       Soma:=Soma+X;
    end;
```

```
        media[j]:=soma/n;
        soma:=0;
    end
end;  {Exponencial}

Procedure Grafico;
{Faz o Grafico de Pontos}

var xi1,yi1, xi2,yi2:LongInt;
    i,J: integer;
    us:string;

Begin
     Clrscr;
     RcMask(1);
     RcRange (min,0,n,max);
     RcTitle (Titulo);
     CpColor(Red,Black);
     RcSetDecPlaces(0);
     RcXax(6,num,'n');
     RcSetDecPlaces(2);
     RcYax(6,num,'Medias');
     CpColor(Brown,Black);

     for i:= 0 to n do
          Case opcao of
          1: RcDrawTo (i,p);
          2: RcDrawTo (i,Lambda);
          3: RcDrawTo (i,(b+a)/2);
          4: RcDrawTo (i,med);
          5: RcDrawTo (i,1/lambda)
          end;
     j:=1;
     for i:= 1 to n do
        if (i mod 2 = 0) then
        begin
         RcMark(i,media[j],7);
         j:=j+1;
        end;
      CpStatLin('Imprimir (S/N)?');
      cc:=upcase (readKey);
      if cc='S' then
      begin
```

```
        CpStatLin('');
        CpHardcopy (true, HPLJII, Portrait,'')
    end;
    CpExit;
end; {Grafico}



Procedure SwitchToAlpha;
begin
    RestoreCrtMode;
end; {SwitchToAlpha}


Procedure SwitchToGraph;
begin
    SetGraphMode (GetGraphMode);
end; {SwitchToGraph}


Procedure Cabeca;
Var i:integer;

Begin
    ClrScr;
    TextColor(LightCyan);
    for i:= 2 to 79 do
    begin
        GotoXY(i,2);
        if (i=2) then write(chr(201)) else
          if (i=79) then write(chr(187)) else
          write(chr(205));
    end;
    for i:= 3 to 23 do
    begin
        GotoXY(79,i); write (Chr(186));
        GotoXY(2,i); write (Chr(186));
    end;
    for i:= 2 to 79 do
    begin
        GotoXY(i,23);
        if (i=2) then write(chr(200)) else
          if (i=79) then write(chr(188)) else
```

```
            write(chr(205));
    end;
    TextColor (LightRed);
    GotoXY (25,3);
    Writeln ('UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE');
    GotoXY (20,4);
    Writeln ('Departamento de Matemática e Informática');
end;  {Cabeca}


Procedure Entrada;
Begin
    CASE opcao of
    1:begin
        ClrScr;
        cabeca;
        GotoXY (30,10); TextColor(LightCyan);
        writeln ('DISTRIBUICAO BINOMIAL');
        TextColor (white); GotoXY (15,12);
        writeln('Entre o valor de n positivo');
        GotoXY(45,12);
        repeat
          readln (n)
        until (n>0);
        GotoXY (15,14);
        TextColor(White);
        Writeln ('Entre o valor de p');
        GotoXY (45,14);
        validap (p);
        Titulo:='Caso Bernoulliano';
        For aux:= 1 to round(n/2) do
            Binomial (p,n)
    end;
    2: begin
        Cabeca;
        GotoXY (30,10); TextColor(LightCyan);
        Writeln ('DISTRIBUICAO DE POISSON');
        TextColor(white); GotoXY(15,12);
        writeln ('Entre o valor de n positivo');
        GotoXY(50,12);
        repeat
         readln (n)
        until (n>0);
```

```
        GotoXY(15,14);
        TextColor(White);
        Writeln ('Entre o valor de lambda positivo');
        GotoXY (50,14);
        readln (lambda);
        Cabeca;
        Titulo:='Distribuicao de Poisson';
        For aux:= 1 to n do
        Begin
           poisson (n,lambda);
        end
       end;
    3: begin
          Cabeca;
          GotoXY (30,10); TextColor(LightCyan);
          Writeln ('DISTRIBUICAO UNIFORME');
          TextColor(white); GotoXY(15,12);
          writeln ('Entre o valor de n positivo');
          GotoXY(45,12);
          repeat
            readln (n)
          until (n>0);
          GotoXY(15,14);
          TextColor(White);
          writeln('Entre o valor de a positivo');
          GotoXY (45,14);
          repeat readln (a) until (a>0);
          repeat
               GotoXY(15,16);
               Writeln ('Entre o valor de b (b>a)');
               GotoXY (45,16);
               readln (b);
               if (b<a) then
                  GotoXY (15,18);
                  writeln ('O valor de b deve ser maior ou igual que a');
          until (b>=a);
          Cabeca;
          Titulo:='Distrubuicao Uniforme';
          For aux:= 1 to n do
          Begin
               Uniforme (n,a,b);
          end
       end;
```

```
4: begin
       Cabeca;
       GotoXY (30,10); TextColor(LightCyan);
       writeln ('DISTRIBUICAO NORMAL-METODO DE BOX MULLER');
       GotoXY (15,12);
       TextColor(White);
       writeln('Entre o valor de n positivo');
       GotoXY(50,12);
       repeat
         readln(n)
       until (n>0);
       TextColor(white); GotoXY(15,14);
       writeln ('Entre o valor da média positivo');
       GotoXY(50,14);
       repeat readln (med) until(med>0);
       GotoXY(15,16);
       writeln ('Entre o valor do desvio positivo');
       GotoXY(50,16);
       repeat readln (desvio) until(desvio>0);
       Cabeca;
       Titulo:='Distribuicao Normal-Box Muller';
       For aux:= 1 to n do
       Begin
           Normal1 (n,med,desvio);
       end
   end;
 5: begin
     Cabeca;
     GotoXY (30,10); TextColor(LightCyan);
     Writeln ('DISTRIBUICAO EXPONENCIAL');
     TextColor(white); GotoXY(15,12);
     writeln ('Entre o valor de n positivo');
     GotoXY(50,12);
     repeat
      readln (n)
     until (n>0);
     GotoXY(15,14);
     TextColor(White);
     Writeln ('Entre o valor de lambda positivo');
     repeat
          GotoXY (50,14);
          readln (lambda);
     until(lambda>0);
```

```
            Cabeca;
            Titulo:='Distribuicao Exponencial';
            Exponencial (n,lambda);
      end;
      6: begin
             clrscr;
             Menu;
         end; {entrada}

      Else
            Cabeca;
            TextColor(Yellow);
            GotoXY (25,12);
            writeln ('Opçao errada!');
            GotoXY (25,14);
            writeln ('Pressione uma tecla para sair');
            Repeat Writeln(CHR(7)) Until Keypressed;
            Menu
      end;
end; {Entrada}


Procedure Menu2;
Const Title= 'TRABALHO DE LICENCIATURA';
Var i,j:integer;

Begin
      ClrScr;
      TextColor(LightCyan);
      for i:=1 to 4 do
      for j:= 1 to 80 do
      begin
          GotoXY(j,i);writeln (Chr(177))
      end;
      for i:=4 to 21 do
      for j:= 1 to 14 do
      begin
          GotoXY(j,i);writeln (Chr(177))
      end;
      for i:=4 to 21 do
      for j:= 70 to 80 do
      begin
          GotoXY(j,i);writeln (Chr(177))
```

```
end;
for i:=22 to 24 do
for j:= 1 to 80 do
begin
    GotoXY(j,i); write(chr(177))
end;

for i:= 14 to 70 do
begin
    GotoXY(i,5);
    if (i=14) then begin write(chr(201)); delay(100) end else
      if (i=70) then begin write(chr(187)); delay(100) end else
      begin write(chr(205)); delay(100) end
end;
for i:= 6 to 20 do
begin
    GotoXY(70,i); write (Chr(186)); delay(100);
    GotoXY(14,i); write (Chr(186)); delay(100);
end;
for i:= 14 to 70 do
begin
    GotoXY(i,21);
    if (i=14) then begin write(chr(200)); delay(100) end else
      if (i=70) then begin write(chr(188)); delay(100) end else
      begin write(chr(205)); delay(100) end
end;
for i:=22 to 24 do
for j:= 1 to 80 do
begin
    GotoXY(j,i); write(chr(177))
end;
Tempo;
TextColor(LightRed);
GotoXY(34,6); writeln ('MENU PRINCIPAL');
TextColor(White);
GotoXY (17,10); Writeln ('Opçao 1: DISTRIBUIÇAO BINOMIAL');
GotoXY(17,11);
Writeln ('Opçao 2: DISTRIBUIÇAO DE POISSON');
GotoXY(17,12);
Writeln ('Opcao 3: DISTRIBUICAO UNIFORME');
GotoXY(17,13);
Write ('Opçao 4: DISTRIBUICAO NORMAL - MÉTODO DE BOX-MULLER');
GotoXY (17,14);
```

```
    write ('Opçao 5: DISTRIBUICAO EXPONENCIAL');
    GotoXY (17,15);
    write ('Opçao 6: RETORNO');
    GotoXY (17,18);
    TextColor(Yellow);
    Writeln ('Introduza a sua opçao');
    TextColor(White);
    GotoXY(39,18);
    Readln (opcao);
end;  {Menu2}


Procedure Menciclo;
begin
    {inicialização do array de médias}
    For i:= 1 to 3000 do
       media [i]:= 0;
    ClrScr;
    Menu;
    Menu2;
    CpInit(Yellow);
    CpColor(Red,Black);
    TextColor(White);
    SwitchToAlpha;
    entrada;
    if (opcao<6) then
    begin
        TextColor(Black);
        SwitchToGraph;
        Grafico;
    end;
    menciclo
end; {Menciclo}


BEGIN { PROGRAMA PRINCIPAL }
    Menciclo
END.
```

```
Program Simula2;

{*Este programa gera n números aleatórios segundo uma determinada distribuição,
calcula a Probabilidade de nº aleatório ser menor que i (1<i<n) e exibe
o respectivo gráfico*}

uses Dos, crt, Graph, Cp3;

Const e=2.71828182845904523536;

Type Array1= array [1..3000] of real;

Var maxY,rnd, soma, p, lambda: real;
    a,b,i, n, opcao, aux, maxX: integer;
    Prob: array1;
    cc:char;
    Titulo:String[36];


Function LeadingZero (w:word):string;
Var s:string;

Begin
     Str(w:0,s);
     if Length(s)=1 then
        s:='0'+s;
     LeadingZero:=s;
end; {LeadingZero}


Procedure Tempo;
Const Days:Array[0..6] of string[9]=('Domingo','2ª Feira','3ª Feira','4ª Feira',
                                     '5ª Feira', '6ª Feira', 'Sabado');
Var ano,mes,dia,H,M,S,hund,dow:word;
Begin
     TextColor(Yellow);
     GotoXY(5,2);
     GetDate(ano,mes,dia,dow); Write(days[dow]);
     GotoXY(4,3);write(' ',dia,'/',mes,'/',ano);
     TextColor(Yellow);
     GotoXY(68,3);
     GetTime (H,M,S,hund);
     Write(LeadingZero(H),':',LeadingZero(M),':',LeadingZero(S));
```

```
end; {Tempo}


Procedure Menu;
Const Title= 'TRABALHO DE LICENCIATURA';
var i,j:integer;
    t:boolean;

Begin
     TextColor(LightCyan);
     for i:= 10 to 70 do
     begin
          GotoXY(i,1);
          writeln (Chr(177));
     end;
     for j:= 2 to 9 do
     begin
          gotoXY(10,j);writeln (Chr(177));
          gotoXY(70,j);writeln (Chr(177));
     end;
     for i:= 10 to 70 do
     begin
          GotoXY(i,9);
          writeln (Chr(177));
     end;
     GotoXY(28,4);
     TextColor(White);
     writeln(title);
     GotoXY(27,6);
     writeln('AS LEIS DOS GRANDES NÚMEROS');
     GotoXY(32,7);
     TextColor (Yellow);
     writeln('(Filas de Espera)');
     writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;writeln;
     TextColor(White);
     writeln('Por':42);writeln;
     writeln('Paula Libombo':48);writeln;writeln;
     TextColor(12);
     writeln('Maputo, Julho de 1996':53);writeln;writeln;writeln;
     TextColor(27);
     write('Tecle <F1> para continuar');
     Repeat
     until (Keypressed)
```

```
end; {Menu}


Procedure uniforme (n:integer; a,b:integer);
Var cont,j:integer;
   X:real;

Begin
    Soma:=0;
    maxX:=n;
    maxY:=1;
    cont:=0;
    For j:= a to b do
    begin
    For aux:= 1 to n do
    Begin
       rnd := random;
       X:=a+rnd*(b-a);
       if (X<j) and (j<>a) then
          Soma:=Soma+1;
    end;
    Prob [j]:=soma/n;
    soma:=0;
    end
end;  {Uniforme}


Procedure Exponencial (n:integer; lambda:real);
Var j:integer;
   X:real;

Begin
    Soma:=0;
    maxX:=n;
    maxY:=1;
    For j:= 1 to n do
    begin
    For i:=1 to n do
    begin
       rnd := random;
       X:=1/Lambda*ln(1/(1-rnd));
       if (X<j) then
          Soma:=Soma+1;
```

```
    end;
        Prob [j]:=soma/n;
        soma:=0;
    end
end;  {Exponencial}


Procedure Grafico;
{Faz o Grafico de Pontos}

var xi1,yi1, xi2,yi2:LongInt;
    i,J: integer;
    us:string;
    nabo:real;

Begin
     Clrscr;
     RcMask(1);
     RcRange (0,0,maxX,maxY);
     RcTitle (Titulo);
     CpColor(Red,Black);
     RcSetDecPlaces(0);
     RcXax(6,num,'n');
     RcSetDecPlaces(2);
     RcYax(6,num,'P(n)');
     CpColor(Brown,Black);

     for i:= 0 to n do
          Case opcao of

          1: begin
               if (i< a) then
                  RcDrawTo (i,0);
               if (i>a) and (i<=b) then
                  RcDrawTo (i,(i-a)/(b-a));
               if (i>b) then
                  RcDrawTo (i,1)
               end;
          2: RcDrawTo (i,1-1/exp(lambda*i))
          end;
     for i:= 1 to maxX do
         RcMark(i,Prob[i],7);
     CpStatLin('Imprimir (S/N)?');
```

```
    cc:=upcase (readKey);
    if cc='S' then
    begin
        CpStatLin('');
        CpHardcopy (true, HPLJII, Portrait,'')
    end;
    CpExit;
end; {Grafico}



Procedure SwitchToAlpha;
begin
    RestoreCrtMode;
end; {SwitchToAlpha}


Procedure SwitchToGraph;
begin
    SetGraphMode (GetGraphMode);
end; {SwitchToGraph}


Procedure Cabeca;
Var i:integer;

Begin
    ClrScr;
    TextColor(LightCyan);
    for i:= 2 to 79 do
    begin
        GotoXY(i,2);
        if (i=2) then write(chr(201)) else
          if (i=79) then write(chr(187)) else
          write(chr(205));
    end;
    for i:= 3 to 23 do
    begin
        GotoXY(79,i); write (Chr(186));
        GotoXY(2,i); write (Chr(186));
    end;
    for i:= 2 to 79 do
    begin
```

```
        GotoXY(i,23);
        if (i=2) then write(chr(200)) else
           if (i=79) then write(chr(188)) else
           write(chr(205));
    end;
    TextColor (LightRed);
    GotoXY (25,3);
    Writeln ('UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE');
    GotoXY (20,4);
    Writeln ('Departamento de Matemática e Informática');
end;  {Cabeca}


Procedure Entrada;
Begin
    CASE opcao of
    1: begin
          Cabeca;
          GotoXY (30,10); TextColor(LightCyan);
          Writeln ('DISTRIBUICAO UNIFORME');
          TextColor(white); GotoXY(15,12);
          writeln ('Entre o valor de n positivo');
          GotoXY(45,12);
          repeat
            readln (n)
          until (n>0);
          GotoXY(15,14);
          TextColor(White);
          writeln('Entre o valor de a positivo');
          repeat
               GotoXY (45,14);
               readln (a)
          until (a>=1);
          repeat
               GotoXY(15,16);
               Writeln ('Entre o valor de b (b>a)');
               GotoXY (45,16);
               readln (b);
               if (b<a) then
                  GotoXY (15,18);
                  writeln ('O valor de b deve ser maior ou igual que a');
          until (b>=a);
          Cabeca;
```

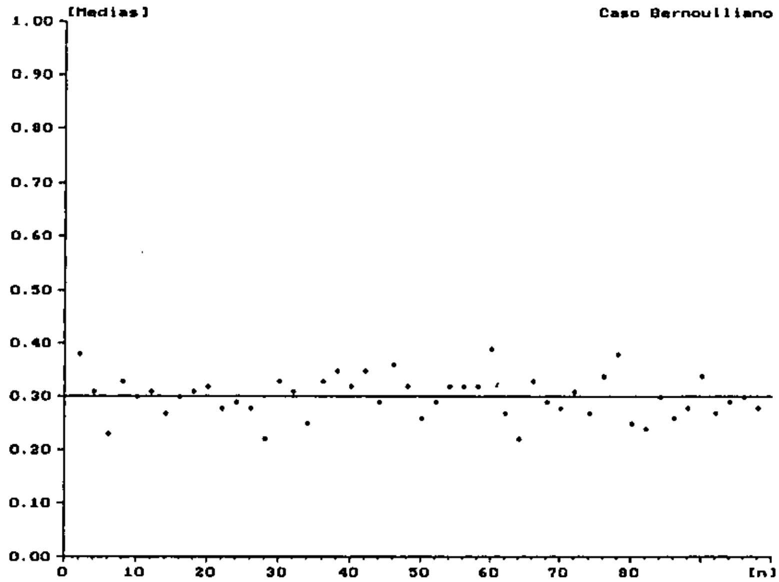
```
          Titulo:='Distrubuicao Uniforme';
          Uniforme (n,a,b)
       end;

    2: Begin
        Cabeca;
        GotoXY (30,10); TextColor(LightCyan);
        Writeln ('DISTRIBUICAO EXPONENCIAL');
        TextColor(white); GotoXY(15,12);
        writeln ('Entre o valor de n positivo');
        GotoXY(50,12);
        repeat
         readln (n)
        until (n>0);
        GotoXY(15,14);
        TextColor(White);
        Writeln ('Entre o valor de lambda positivo');
        repeat
              GotoXY (50,14);
              readln (lambda);
        until(lambda>0);
        Cabeca;
        Titulo:='Distribuicao Exponencial';
        Exponencial (n,lambda);
       end;
    3: begin
           clrscr;
           CpExit;
           Menu;
       end; {entrada}

     Else
         Cabeca;
         TextColor(Yellow);
         GotoXY (25,12);
         writeln ('Opçao errada!');
         GotoXY (25,14);
         writeln ('Pressione uma tecla para sair');
         Repeat Writeln(CHR(7)) Until Keypressed;
         Menu
     end;
end; {Entrada}
```

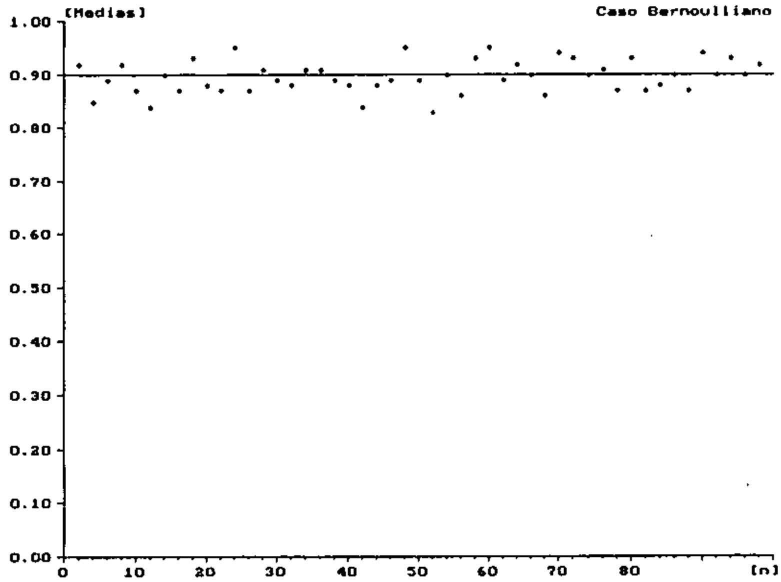
```
Procedure Menu2;
Const Title= 'TRABALHO DE LICENCIATURA';
Var i,j:integer;

Begin
    ClrScr;
    TextColor(LightCyan);
    for i:=1 to 4 do
    for j:= 1 to 80 do
    begin
        GotoXY(j,i);writeln (Chr(177))
    end;
    for i:=4 to 21 do
    for j:= 1 to 14 do
    begin
        GotoXY(j,i);writeln (Chr(177))
    end;
    for i:=4 to 21 do
    for j:= 70 to 80 do
    begin
        GotoXY(j,i);writeln (Chr(177))
    end;
    for i:=22 to 24 do
    for j:= 1 to 80 do
    begin
        GotoXY(j,i); write(chr(177))
    end;

    for i:= 14 to 70 do
    begin
        GotoXY(i,5);
        if (i=14) then begin write(chr(201)); delay(100) end else
          if (i=70) then begin write(chr(187)); delay(100) end else
          begin write(chr(205)); delay(100) end
    end;
    for i:= 6 to 20 do
    begin
        GotoXY(70,i); write (Chr(186)); delay(100);
        GotoXY(14,i); write (Chr(186)); delay(100);
    end;
    for i:= 14 to 70 do
    begin
        GotoXY(i,21);
```

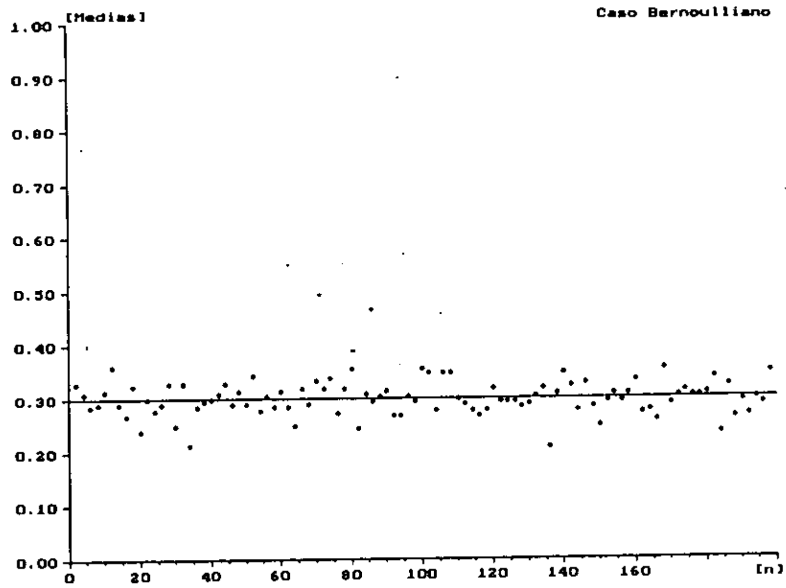
```
        if (i=14) then begin write(chr(200)); delay(100) end else
          if (i=70) then begin write(chr(188)); delay(100) end else
          begin write(chr(205)); delay(100) end
    end;
    for i:=22 to 24 do
    for j:= 1 to 80 do
    begin
        GotoXY(j,i); write(chr(177))
    end;
    Tempo;
    TextColor(LightRed);
    GotoXY(34,6); writeln ('MENU PRINCIPAL');
    TextColor(White);
    GotoXY (17,10); Writeln ('Opçao 1: DISTRIBUIÇAO UNIFORME');
    GotoXY(17,12);
    Writeln ('Opçao 2: DISTRIBUIÇAO EXPONENCIAL');
    GotoXY(17,14);
    Writeln ('Opçao 3:RETORNO');
    GotoXY (17,18);
    TextColor(Yellow);
    Writeln ('Introduza a sua opçao');
    TextColor(White);
    GotoXY(39,18);
    Readln (opcao);
end;  {Menu2}


Procedure Menciclo;
begin
    {inicialização do array de médias}
    For i:= 1 to 3000 do
        Prob [i]:= 0;
    ClrScr;
    Menu;
    Menu2;
    CpInit(Yellow);
    CpColor(Red,Black);
    TextColor(White);
    SwitchToAlpha;
    entrada;
    if (opcao<5) then
    begin
        TextColor(Black);
```

```
        SwitchToGraph;
        Grafico;
    end;
    menciclo
end; {Menciclo}


BEGIN { PROGRAMA PRINCIPAL }
    Menciclo
END.
```

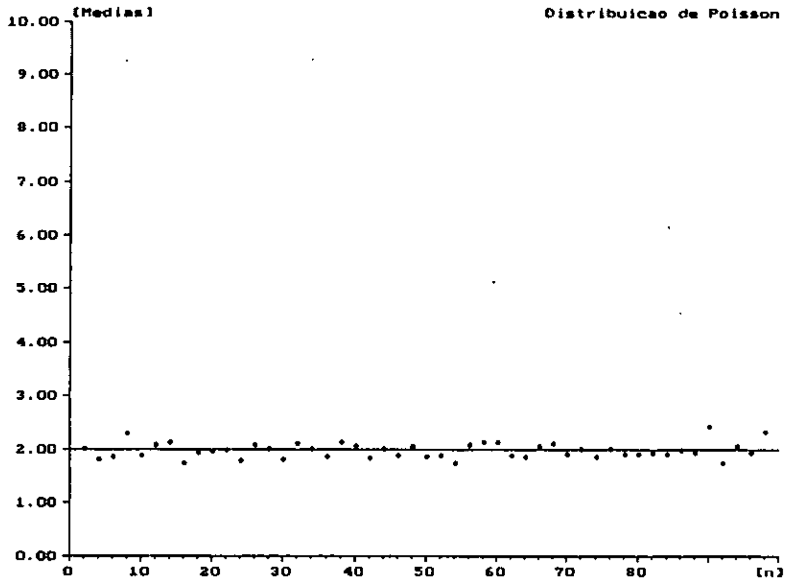
ANEXO II - RESULTADOS DO PROGRAMA
Distribução Binomial

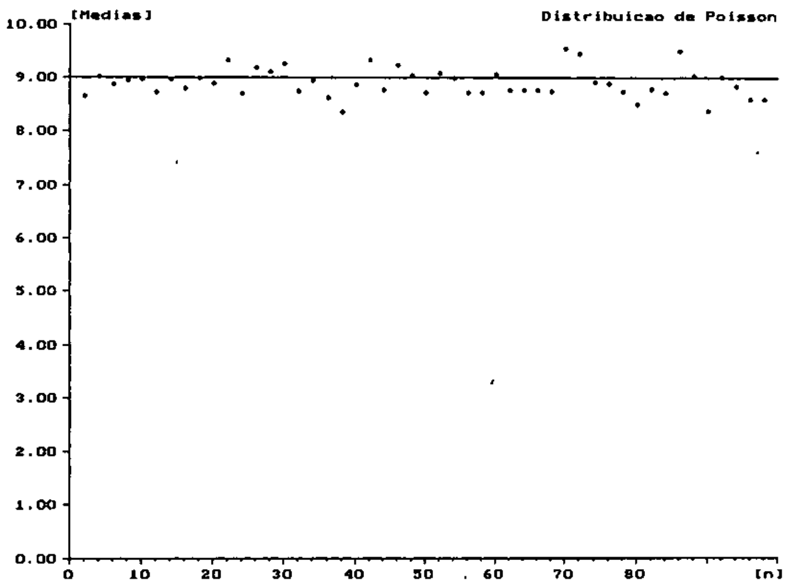


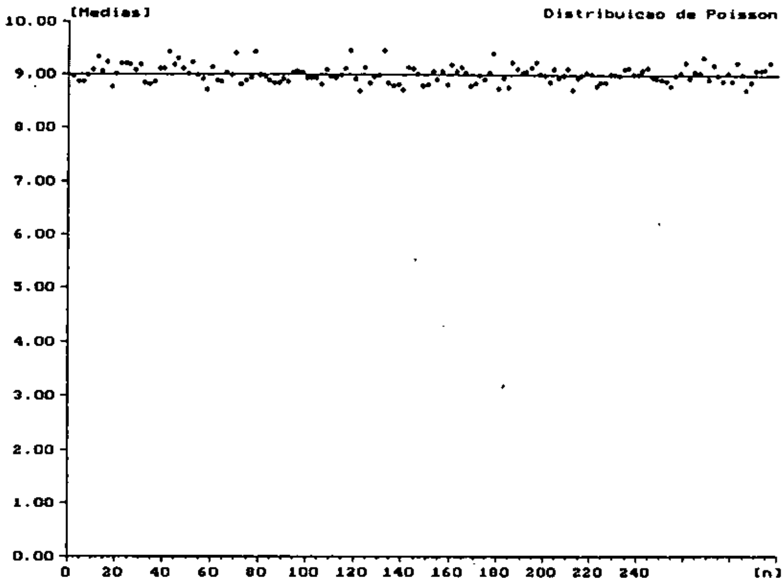

[Medias]
Caso Bernoulliano
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
0
10
20
30
40
50
60
70
80
[n]


[Medias]
Caso Bernoulliano
1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
0
20
40
60
80
100
120
140
160
[n]

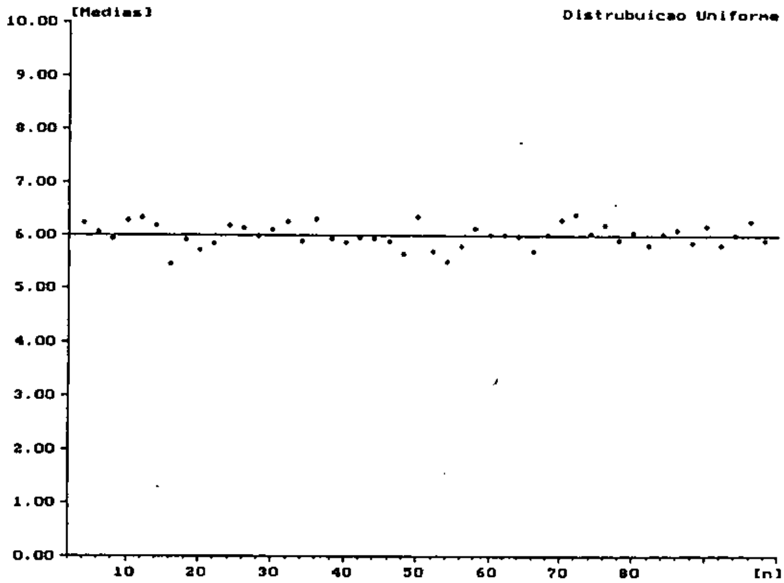
Distribuição de Poisson

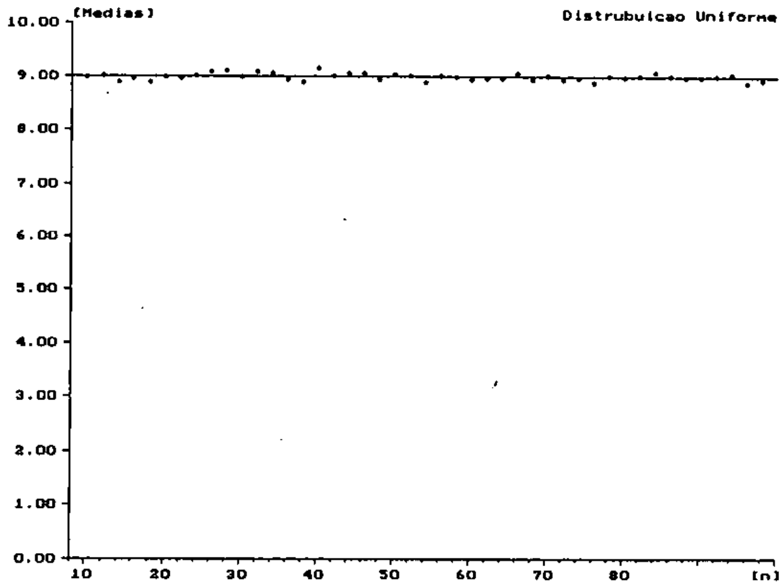


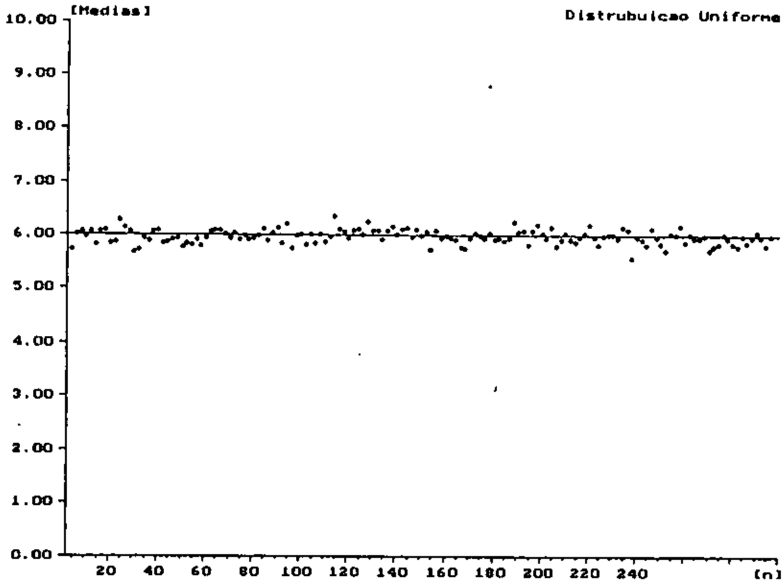

[Medias]
Distribuicao de Poisson
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
0
10
20
30
40
50
60
70
80
[n]


[Medias]
Distribuicao de Poisson
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 [n]

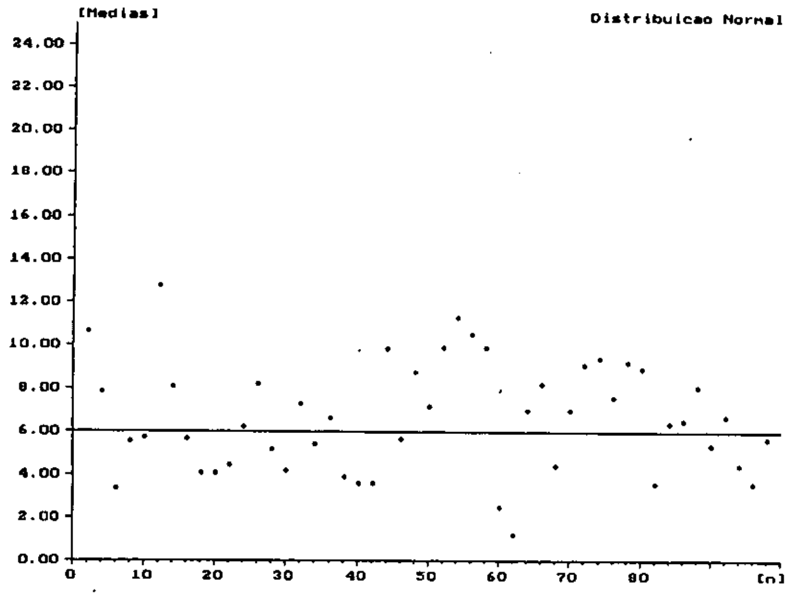
Distribuição uniforme

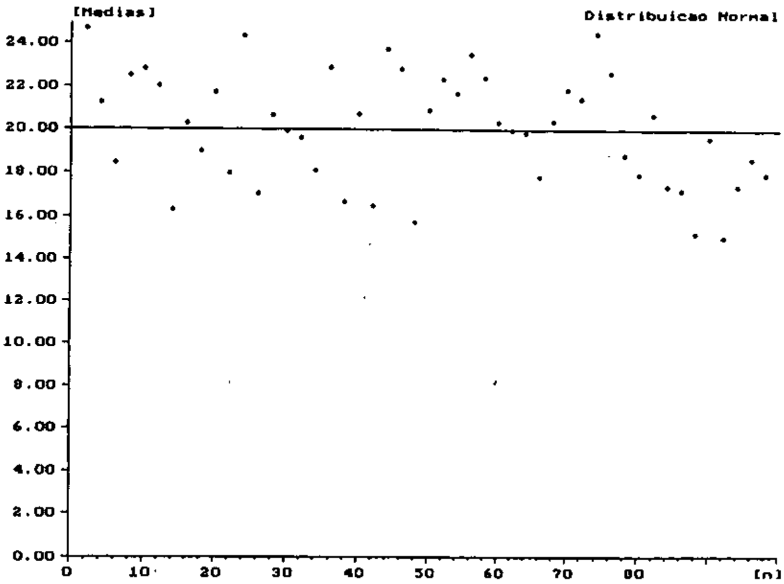


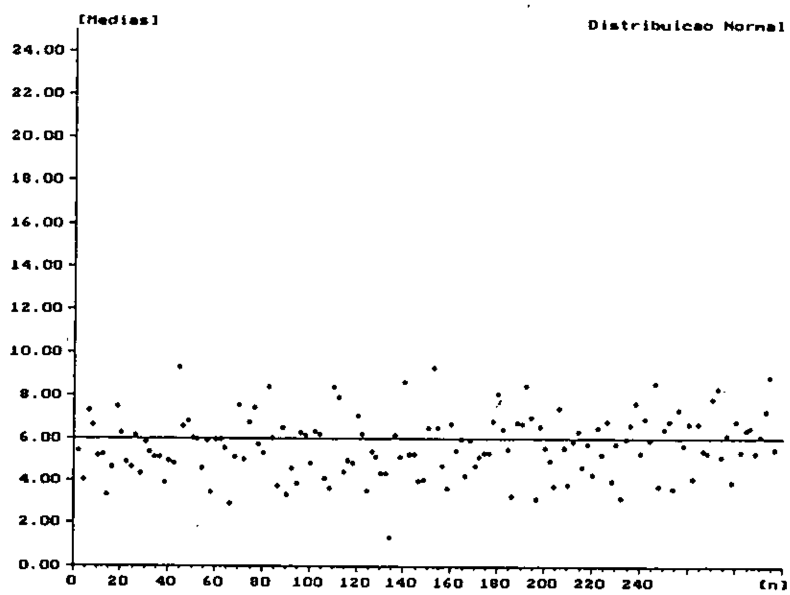

(Medias)
Distrubuicao Uniforme
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
10
20
30
40
50
60
70
80
[n]


[Medias]
Distrubuicao Uniforme
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
[n]

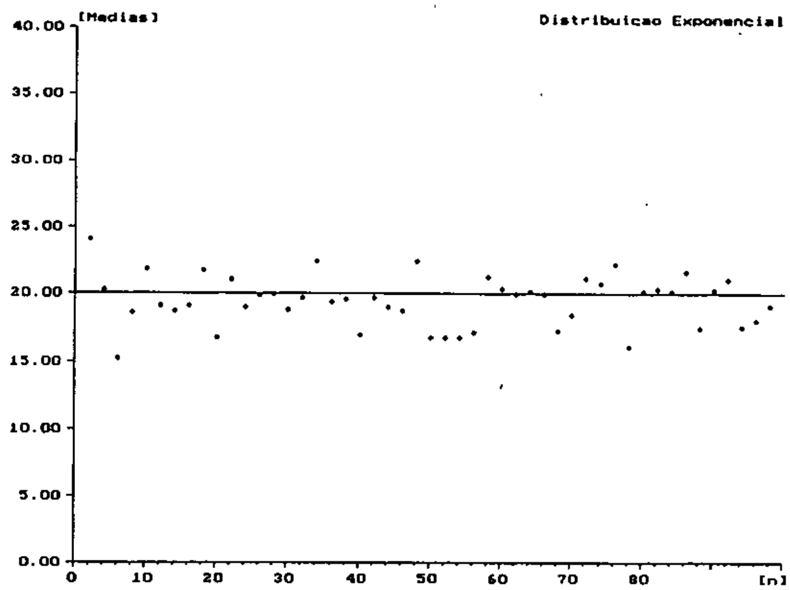
Distribuição Normal

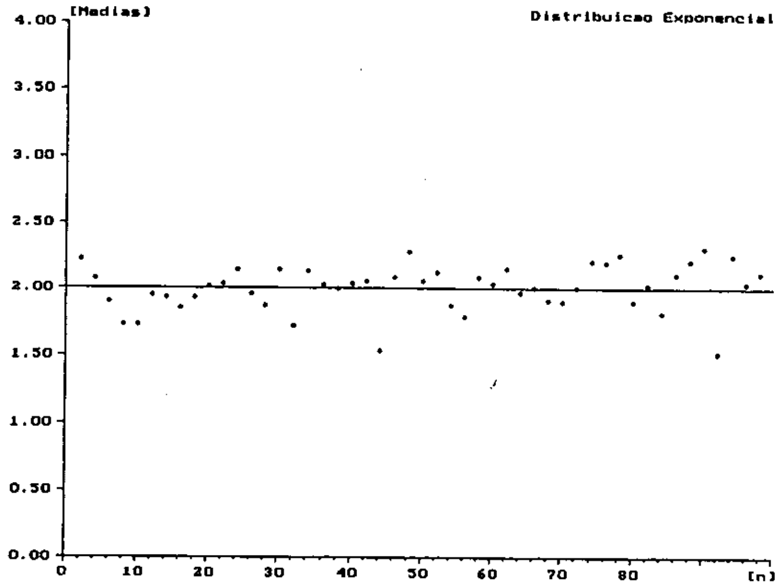


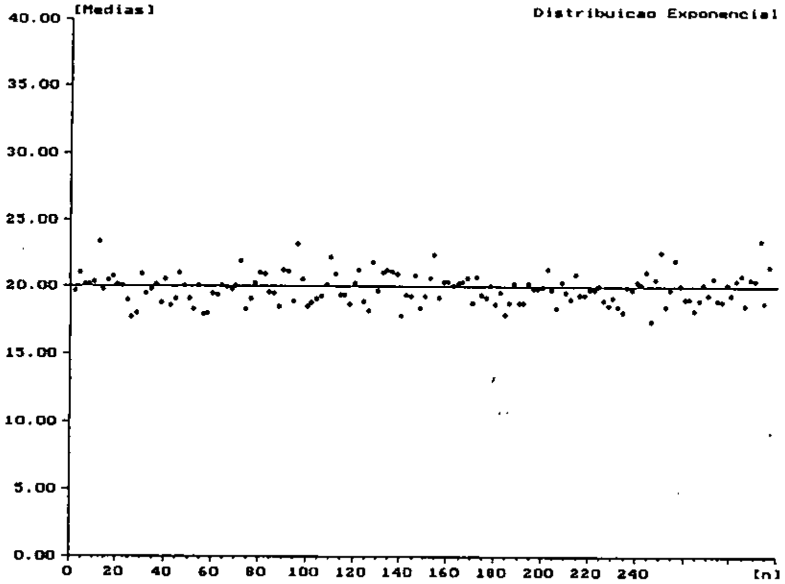

[Medias]
Distribuicao Normal
24.00
22.00
20.00
18.00
16.00
14.00
12.00
10.00
8.00
6.00
4.00
2.00
0.00
0
10
20
30
40
50
60
70
80
[n]


[Medias]
Distribuicao Normal
24.00
22.00
20.00
18.00
16.00
14.00
12.00
10.00
8.00
6.00
4.00
2.00
0.00
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
[n]

Distribuição Exponencial




[Medias]
Distribuicao Exponencial
4.00
3.50
3.00
2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
0
10
20
30
40
50
60
70
80
[n]


[Medias]
Distribuicao Exponencial
40.00
35.00
30.00
25.00
20.00
15.00
10.00
5.00
0.00
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
[n]

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

1. Bernoulli, Jacob (1713). Ars Conjectand.

21. Etemadi (1981). An Elementary Proof of the Strong Law Numbers Wahrscheinlichkeitsrechnung Verw. Geb. 55, 119-122.

3. Kolmogoróv, A. N. (1933). Grunderbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer-Verlag, Berlim.

4. Lipschutz, Seymour (1981). Álgebra Linear Editora McGraw-Hill do Brasil 413 pp.

5. Lohninger, Hans (1991). Turbo Pascal 6.0-toolbox:alle tools fur Programmierer IWT Verlag GmbH 349 pp.

6. Rao, M. M. (1984). Probability Theory with Applications. Califórnia, Academic Press, INC.

7. Ross, Sheldon M. (1990-1991). A Course in Simulation 199 pp. Maxwell Macmillan International Editions.

8. Uspensky, J. V. (1937). Introduction to Mathematical Probability. Nova Iorque e Londres, McGraw-Hill Book Company, INC.