UNIVERSIDADE
EDUARDO
MONDLANE

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

Curso de Licenciatura em Física

Comparação das características da velocidade de uma esfera de aço em movimento sobre um plano inclinado e em lançamento oblíquo

Semim Álvaro Sumila

Maputo, Março de 2025

UNIVERSIDADE
EDUARDO
MONDLANE

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

Curso de Licenciatura em Física

Comparação das características da velocidade de uma esfera de aço em movimento sobre um plano inclinado e em lançamento oblíquo

Semim Álvaro Sumila

Supervisor: Prof. Dr. Adriano R. Sacate

Co-Supervisor: Dr. Narcíso Francisco Canda

Maputo, Março de 2025

DECLARAÇÃO DE HONRA

Eu, **Semim Álvaro Sumila**, declaro, por minha honra, que este trabalho é submetido ao Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Declaro ainda que este trabalho é da minha inteira autoria e nunca foi anteriormente apresentado para avaliação. Os resultados nele contidos decorrem da minha análise da informação obtida ao longo da investigação, sendo que todas as fontes utilizadas são fidedignas e encontram-se devidamente citadas.

O Autor

_____

(**Semim Álvaro Sumila**)

Maputo, Março de 2025

DEDICATÓRIA

À **Alessandro Maria Calanchi,** que assim quis, então fui à faculdade.

AGRADECIMENTOS

"Gostaria de expressar meus mais profundos agradecimentos:

Ao **Prof. Dr. Adriano R. Sacate**, meu estimado supervisor e orientador, pela magnífica orientação e sábia condução ao longo desta jornada acadêmica. Seu apoio incansável, conselhos valiosos e orientação perspicaz foram pilares fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Ao **Dr. Narcíso Francisco Canda**, pelo valioso tempo dedicado e pelas ideias fundamentais na concepção do Plano Inclinado, assim como pelo auxílio no levantamento de dados, contribuindo significativamente para o desenvolvimento deste trabalho.

À **Secretaria do Curso**, pela colaboração incansável e apoio essencial em todos os momentos.

Não poderia deixar de registrar meu profundo reconhecimento à minha família e amigos, pilares inestimáveis, cujo apoio incondicional foi crucial para superar os desafios deste percurso acadêmico.

Por fim, estendo meu agradecimento a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta pesquisa. A cada um de vocês, o meu mais sincero reconhecimento pelo papel fundamental desempenhado nessa jornada."

EPÍGRAFE

“A menos que modifiquemos à nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”. (Albert Einstein)

RESUMO

Esta pesquisa teve como objectivos comparar as velocidades de rolamento de uma esfera de aço ao descer um plano inclinado com as velocidades obtidas a partir do lançamento oblíquo no mesmo plano. A pesquisa explora a relação entre a teoria da cinemática e os experimentos práticos, analisando como diferentes ângulos de inclinação afectam as velocidades observadas. Utilizando uma metodologia experimental detalhada, foram selecionados diversos ângulos para investigar a influência do ângulo na velocidade e no tempo de rolamento da esfera. Medições precisas foram realizadas, considerando factores como atrito, massa e raio da esfera, para garantir resultados confiáveis. Calculadas as velocidades finais através de três métodos diferentes: sensores fotoeléctricos, alcance horizontal e conservação da energia foram obtidos os seguintes resultados: a velocidade medida pelos sensores foi $v_s = 2{,}958 \pm 0{,}152\ m/s$, a velocidade calculada pelo alcance horizontal foi $\mathrm{v_a} = 3{,}128 \pm 0{,}277\ \mathrm{m/s}$, e a velocidade derivada da conservação da energia foi $\mathrm{v_e} = 2{,}958 \pm 0{,}152\ \mathrm{m/s}$. Essas velocidades apresentaram dispersões significativas em torno das linhas de ajuste, indicando variações nos dados experimentais. Os dados obtidos foram analisados estatisticamente para identificar correlações significativas entre as variáveis. Os resultados destacam a importância do ângulo na determinação das velocidades de rolamento e fornecem insights valiosos para compreender as relações entre teoria e prática.

Palavras-chave: Cinemática, Plano Inclinado, Correlação Estatística, Relações Cinemáticas.

ABSTRACT

This research aimed to compare the rolling speeds of a steel ball when descending an inclined plane with the speeds obtained from an oblique launch on the same plane. The research explores the relationship between kinematic theory and practical experiments, analyzing how different inclination angles affect observed speeds. Using a detailed experimental methodology, several angles were selected to investigate the influence of angle on ball rolling speed and time. Precise measurements were carried out, considering factors such as friction, mass and sphere radius, to ensure reliable results. Calculating the final speeds using three different methods: photoelectric sensors, horizontal range and energy conservation, the following results were obtained: the speed measured by the sensors was $v_s = 2{,}958 \pm 0{,}152\ m/s$, the speed calculated by the horizontal range was $\mathrm{v_a} = 3{,}128 \pm 0{,}277\ \mathrm{m/s}$ and the speed derived from the conservation of energy was $\mathrm{v_e} = 2{,}958 \pm 0{,}152\ \mathrm{m/s}$. These velocities showed significant dispersions around the fit lines, indicating variations in the experimental data. The data obtained was statistically analyzed to identify significant correlations between the variables. The results highlight the importance of angle in determining rolling speeds and provide valuable insights into understanding the relationships between theory and practice.

Keywords: Kinematics, Inclined Plane, Statistical Correlation, Kinematic Relationships.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Forças que atuam sobre um corpo rígido de secção circular de raio R que rola com deslizamento. (Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013)) 16
Figura 2: Gráfico da velocidade do centro de massa em função do tempo. (Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013)) 19
Figura 3: Forças qual actuam sobre um corpo deformável. [Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013)] 20
Figura 4:Cilindro que rola sem escorregar pela acção de F (movimento uniforme). [Fonte: (Caldas & Magalhães, 2000)] 24
Figura 5: Forças que actuam sobre um corpo deformável que rola num plano inclinado. [Fonte (Andrade-Neto & Leyva-Cruz, 2015)] 26
Figura 6: Esquema da montagem experimental que envolve rolamento num plano inclinado e lançamento oblíquo. [Fonte: (Andrade-Neto & Leyva-Cruz, 2015] 27
Figura 7:Pontos relactivos à Tab. 3: energia mecânica final versus energia mecânica inicial 29
Figura 8: Sensores fotoeléctricos ligados a dois cronômetros digitais no plano inclinado. [Fonte: Adaptado pelo autor] 34
Figura 9: (a) Esquema da montagem do trilho vista frontal (b) Esquema da montagem do trilho vista posterior. [Fonte: Adaptado pelo autor] 35
Figura 10: Mecanismo de arranque composto. [Fonte: Adaptado pelo autor] 36
Figura 11: Recipiente plano contendo areia colocado. [Fonte: Adaptado pelo autor] 37
Figura 12: Esquema da estrutura da mesa e o recipiente plano contendo areia colocado . [Fonte: Adaptado pelo autor] 37
Figura 13: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 6º 49
Figura 14: Gráfico Normal para o tempo 2, ângulo de 6º 49
Figura 15: Gráfico Normal para o alcance (X), ângulo de 6º 50
Figura 16: Gráfico Normal do valor observado para t1, ângulo de 6º 51
Figura 17: Gráfico Normal do valor observado para t2, ângulo de 6º 51
Figura 18: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 6º 52
Figura 19: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 15º 54
Figura 20: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 15º 55
Figura 21: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 15º. 55
Figura 22: Gráfico Normal do valor observado para t_1, ângulo de 15º. 56
Figura 23: Gráfico Normal do valor observado para t2, ângulo de 15º 57
Figura 24: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 15º. 57
Figura 25: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 26º. 60
Figura 26: Gráfico Normal para o tempo 2, ângulo de 26º. 60
Figura 27: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 26º. 61
Figura 28: Gráfico Normal do valor observado para t_1, ângulo de 26º. 62
Figura 29: Gráfico Normal do valor observado para t_1, ângulo de 26º. 62
Figura 30: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 26º. 63
Figura 31: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 36º 65
Figura 32: Gráfico Normal para o tempo 2, ângulo de 36º. 66
Figura 33: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 36º. 66
Figura 34: Dispersão simples com linha de ajuste da velocidade registada pelos sensores em função da raiz quadrada da altura. 69

Figura 35: Dispersão simples com linha de ajuste da velocidade do alcance horizontal em função da raiz quadrada da altura. 70
Figura 36: Dispersão simples com linha de ajuste da velocidade pela conservação de energia em função da raiz quadrada da altura. 71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Valores do raio de giração e de algumas relações envolvendo essa grandeza para a esfera, o cilindro e o anel. Fonte: (Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013)) 16
Tabela 2: Energia mecânica inicial e final para cada angulo fixado (Silva, et al., 2003) 29
Tabela 3: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor] 41
Tabela 4: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 8º [Fonte: Adaptado pelo autor] 41
Tabela 5: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 11º [Fonte: Adaptado pelo autor] 42
Tabela 6: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 13º [Fonte: Adaptado pelo autor] 42
Tabela 7: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 15º [Fonte: Adaptado pelo autor] 42
Tabela 8: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 17,5º [Fonte: Adaptado pelo autor] 43
Tabela 9: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de19º [Fonte: Adaptado pelo autor] 43
Tabela 10: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 21,5º [Fonte: Adaptado pelo autor] 44
Tabela 11: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 23,5º [Fonte: Adaptado pelo autor] 44
Tabela 12: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 26º [Fonte: Adaptado pelo autor] 44
Tabela 13: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 27,5º [Fonte: Adaptado pelo autor] 45
Tabela 14: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 29,5º [Fonte: Adaptado pelo autor] 45
Tabela 15: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 32º [Fonte: Adaptado pelo autor] 45
Tabela 16: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 34º [Fonte: Adaptado pelo autor] 46
Tabela 17: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 36º [Fonte: Adaptado pelo autor] 46
Tabela 18: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 6º. [Fonte: Adaptado pelo autor] 48
Tabela 19: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor] 48
Tabela 20: Gráficos p-p (O gráfico Probability-Probability) - Distribuição normal para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor] 49
Tabela 21: Gráfico Q-Q - Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor] 50
Tabela 22: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 8º. [Fonte: Adaptado pelo autor] 52

Tabela 23: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 8º [Fonte: Adaptado pelo autor] 52
Tabela 24: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 11º. 52
Tabela 25: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 11º [Fonte: Adaptado pelo autor] 53
Tabela 26: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 13º. [Fonte: Adaptado pelo autor] 53
Tabela 27: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 13º. [Fonte: Adaptado pelo autor] 53
Tabela 28: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 15º. [Fonte: Adaptado pelo autor] 53
Tabela 29: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 15º 54
Tabela 30: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 15º. 54
Tabela 31: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 15º. 56
Tabela 32: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 17.5º. 58
Tabela 33: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 17,5º 58
Tabela 34: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 19º. 58
Tabela 35: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 19º 58
Tabela 36: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 21, 5º. 58
Tabela 37: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 21,5º 59
Tabela 38: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 23, 5º 59
Tabela 39: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 23,5º 59
Tabela 40: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 26º 59
Tabela 41: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 26º 59
Tabela 42: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 26º 59
Tabela 43: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 26º 61
Tabela 44: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 27,5º 63
Tabela 45: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo 27,5º 63
Tabela 46: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 29,5º 63
Tabela 47: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 29,5º 64
Tabela 48: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 32º 64
Tabela 49: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 32º 64
Tabela 50: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 34º. 64
Tabela 51: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 34º. 64
Tabela 52: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 36º. 64
Tabela 53: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 36º. 65
Tabela 54: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 36º 65
Tabela 55: Ângulo, altura em que a esfera é solta, altura do lançamento obliquo, altura raiz quadrada da altura, espaço percorrido pela esfera durante o rolamento na canaleta, tempo para percorrer a canaleta, alcance horizontal, alcance horizontal e três modos diferentes. 67

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Grego

ω	Velocidade angular de rotação do corpo em torno de um eixo
μ_r	Coeficiente de atrito de rolamento ou coeficiente de resistência ao rolamento
μ_e	Coeficiente de atrito estático
μ_c	Coeficiente de atrito cinético
λ	Coeficiente de resistência ao rolamento
θ	Angulo do plano e a velocidade do centro de massa da esfera no final do plano inclinado.
α	Aceleração angular

Alfabeto Latino

$\mathbf{v_{cm}}$	Velocidade de translação do centro de massa do corpo
$\mathbf{a_{cm}}$	Aceleração do centro de massa
R	Raio
k	Raio de giração do corpo
$\mathbf{v_0}$	Velocidade inicial
$\mathbf{F_{at}}$	Módulo da força de atrito
M	Massa do corpo que rola
I	Momento de inércia do corpo
$\mathbf{F_{at}}$	Força de atrito
g	Aceleração de gravidade na terra
h	Altura

LISTA DE ACRÔNIMOS

PEA	O processo de ensino e aprendizagem
PSSC	Physical Science Study Committee
FAI	Física Auto-Instrutiva
PEF	Projeto de Ensino de Física
BSCS	Biological Science Curriculum Study

Índice

DECLARAÇÃO DE HONRA i
DEDICATÓRIA ii
AGRADECIMENTOS iii
EPÍGRAFE iv
RESUMO v
LISTA DE ILUSTRAÇÕES vii
LISTA DE TABELAS ix
CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO E OBJECTIVOS 2
1.1. Introdução 2
1.2. Contextualização do tema da pesquisa 3
1.3. Objectivos da pesquisa 4
1.3.1. Objectivo geral 4
1.3.2. Objectivos específicos 4
1.4. Justificativa 4
1.5. Metodologia 5
1.6. Estrutura do Trabalho 6
CAPÍTULO II: REVISÃO DA LITERATURA 7
2.1. Actividades experimentais na formação científica 7
2.1.1. Divergências e confluências em relação a inserção dessas actividades experimentais no ensino de física 9
2.1.2. Caso de Moçambique 10
2.1.3. Importância das actividades experimentais na formação científica 12
2.2. Movimento de esferas em planos inclinados 14
2.3. Rolamento puro e com deslizamento de um corpo rígido 16
2.4. Rolamento de um corpo deformável 19
2.4.1. Atrito de rolamento 19
2.5. Por que o corpo Pará? 21
2.6. Rolamento sem deslizamento 21
2.7. Atrito no movimento de rolamento sem escorregamento 22
2.7.1. Contacto entre sólidos 22
2.8. Atrito estático 22
2.9. Atrito de rolamento 23
2.10. Rolamento em plano inclinado-Abordagem teórica 25
2.11. Expressão para o coeficiente de atrito de rolamento 27

2.11.1. Experimentos de rolamento de esfera em plano inclinado 28
2.12. Análise dos experimentos 30
CAPÍTULO III: MATERIAL E MÉTODOS 32
3.1. Tipo de pesquisa 32
3.2. Amostra e Método de Amostragem 32
3.3. Material e método 33
3.4. Colecta de dados 36
3.5. Métodos de análise de dados 38
3.5.1. IBM SPSS Statistics Base 25 38
3.5.5. Inferências estatísticas: Estimação e teste de hipóteses 39
CAPÍTULO IV: RESULTADOS E DISCUSSÃO 41
4.1 Resultados 41
4.1.1 Apresentação dos dados obtidos nos experimentos 41
4.2 Análise estatística dos resultados 46
4.2.1 Estatística Descritiva 46
4.2.2 Gráficos P-P 47
4.2.3 Gráficos Q-Q 47
4.2.4 Teste de significação 47
4.3 Analise estatística para o ângulo de 6º. 48
4.3.2 Analise estatística para o ângulo de 8º. 52
4.3.3 Análise estatística para o ângulo de 11º 52
4.3.4 Analise estatística para o ângulo de 13º. 53
4.3.5 Análise estatística para o ângulo de 15º. 53
4.3.6 Analise estatística para o ângulo de 17, 5º. 58
4.3.7 Análise estatística para o ângulo de 19º. 58
4.3.8 Análise estatística para o ângulo de 21, 5º. 58
4.3.9 Análise estatística para o ângulo de 23, 5º. 59
4.3.10 Análise estatística para o ângulo de 26º. 59
4.3.11 Análise estatística para o ângulo de 27,5 º 63
4.3.12 Análise estatística para o ângulo de 29,5 º. 63
4.3.13 Análise estatística para o ângulo de 32 º. 64
4.3.14 Análise estatística para o ângulo de 34 º. 64
4.3.15 Análise estatística para o ângulo de 36 º. 64
4.4 Comparação das velocidades de rolamento e lançamento oblíquo 67
4.5. Discussão dos resultados 67

4.5.1. Interpretação dos resultados obtidos 67
4.5.2. Média das velocidades 72
4.5.3. Representação de Incertezas 73
4.5.4. Comparação das incertezas 74
CAPITULO VI: CONCLUSÃO 75
6.1. Síntese dos Principais Achados da Pesquisa 75
6.2. Confirmação ou Refutação da Hipótese 75
6.3. Contribuição do estudo para o conhecimento científico 75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 77

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO E OBJECTIVOS

O primeiro capítulo de introdução e objectivos foi dedicado à contextualização do tema da pesquisa, objectivos da pesquisa, justificativa, pergunta de pesquisa e organização da pesquisa.

1.1. Introdução

O processo de ensino e aprendizagem nas ciências naturais, particularmente da Física, pode ser um desafio tanto para professores quanto para alunos. Uma das dificuldades enfrentadas é a compreensão de conceitos abstractos e complexos. Nesse sentido, é fundamental que haja a realização de experimentos que possam ilustrar os conceitos teóricos e despertar o interesse dos alunos pelo fenómeno em questão. A experimentação permite que os estudantes visualizem e compreendam de forma mais clara os conceitos discutidos em sala de aula, além de estimular o pensamento crítico e a curiosidade.

Este trabalho apresenta uma proposta de experimento com o objetivo de despertar o interesse e a atenção dos alunos em relação aos fenómenos físicos, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo. A experiência visa, sobretudo, contribuir para a superação dos desafios enfrentados no ensino da física no nível médio, onde o acesso a recursos laboratoriais é muitas vezes limitado. No entanto, sua aplicação também pode enriquecer o ensino no nível superior, ao oferecer uma abordagem experimental acessível e contextualizada.

O estudo comparativo das velocidades de rolamento e de lançamento oblíquo no plano inclinado contribui para a compreensão da relação entre forças, acelerações e velocidades no movimento de um objecto. De acordo com a Lei de Newton, as forças que atuam sobre um objecto em movimento são responsáveis por sua aceleração e, consequentemente, sua velocidade.

É importante destacar que o rolamento de uma esfera de aço constitui um exemplo clássico de movimento composto, caracterizado pela combinação simultânea de translação e rotação. Em contrapartida, o lançamento oblíquo a partir de um plano inclinado possui uma natureza distinta, pois envolve a atuação de uma força resultante que impulsiona o corpo em trajetória parabólica, submetido às leis do movimento de projéteis. Essa distinção conceitual entre os dois tipos de movimento é fundamental para a compreensão das variáveis envolvidas no experimento.

Para uma compreensão mais aprofundada desses fenômenos, recorre-se aos fundamentos da cinemática e da dinâmica, que permitem descrever quantitativamente os movimentos tanto da esfera em rolamento quanto do corpo lançado. Por meio da medição das velocidades e da análise comparativa dos resultados experimentais, torna-se possível avaliar a correlação entre as forças atuantes e os comportamentos cinemáticos observados em cada situação.

Este estudo tem como objetivo comparar as características das velocidades resultantes do rolamento de uma esfera de aço com aquelas associadas ao lançamento oblíquo, ambos realizados sobre um plano inclinado. A proposta visa analisar as distinções entre os dois tipos de movimento e compreender suas relações com os princípios da física clássica. Para tal, foram conduzidos experimentos controlados em que a esfera foi submetida ao rolamento sobre a superfície inclinada e, posteriormente, ao lançamento oblíquo nas mesmas condições. As velocidades correspondentes foram registadas, analisadas e comparadas, permitindo uma avaliação mais precisa dos fatores físicos envolvidos.

1.2. Contextualização do tema da pesquisa

O estudo comparativo das velocidades de rolamento de uma esfera de aço com a velocidade do lançamento oblíquo no plano inclinado é relevante em diversas áreas da física, tais como a mecânica, a cinemática e a dinâmica. Além disso, o entendimento das leis que governam esses movimentos é fundamental para a compreensão do funcionamento de diversas máquinas, como engrenagens, roldanas e motores eléctricos.

Em particular, a comparação entre os movimentos de rolamento e de lançamento oblíquo pode ser aplicada em diversas áreas da engenharia, como na construção de transportadores de correia, escadas rolantes e sistemas de transporte de cargas. Além disso, o conhecimento desses movimentos é importante na indústria automotiva, para o desenvolvimento de sistemas de transmissão de força e de freios.

Por outro lado, a comparação entre os movimentos também pode ser aplicada em outras áreas da ciência, como na biomecânica, que estuda o movimento humano e animal, e na física experimental, que utiliza esses conceitos para o desenvolvimento de novos materiais e tecnologias.

De maneira geral, o estudo comparativo das velocidades de rolamento de uma esfera de aço com a velocidade do lançamento oblíquo no plano inclinado tem grande

importância na física e em outras áreas do conhecimento, contribuindo para a compreensão das leis que governam o movimento de objectos e sua aplicação em diversas áreas da engenharia e da ciência.

1.3. Objectivos da pesquisa

A presente pesquisa tem como objectivos:

1.3.1. Objectivo geral

- Comparar as velocidades do rolamento e do lançamento oblíquo de uma esfera de aço num plano inclinado.

1.3.2. Objectivos específicos

- Realizar as medições das velocidades de rolamento de uma esfera de aço em um plano inclinado e da velocidade do lançamento oblíquo em diferentes ângulos de inclinação.
- Discutir os resultados obtidos à luz das teorias da Física envolvidas, propondo possíveis explicações para as diferenças e correlações encontradas.

1.4. Justificativa

A compreensão dos movimentos dos corpos e das forças que os causam é um tema fundamental no estudo da Física. Dentre os diferentes tipos de movimentos, destacam-se o rolamento de esferas e o lançamento oblíquo em planos inclinados. Estudar a relação entre esses movimentos, comparando as velocidades de rolamento de uma esfera de aço com a velocidade do lançamento oblíquo no plano inclinado, pode contribuir para a compreensão dos conceitos teóricos envolvidos, além de ser útil para aplicações práticas em diferentes áreas da engenharia e da tecnologia.

A análise das velocidades de rolamento de uma esfera de aço em um plano inclinado pode ser útil para a construção de equipamentos e máquinas que utilizam esse tipo de movimento, como roldanas, carrinhos de transporte e engrenagens. Já o estudo do lançamento oblíquo em planos inclinados tem aplicações em diversas áreas, como na construção de rampas de acesso para pessoas com mobilidade reduzida, na criação de equipamentos para movimentação de cargas, entre outras.

Além disso, o trabalho sobre as velocidades de rolamento de uma esfera de aço com a velocidade do lançamento oblíquo no plano inclinado pode abrir caminho para novas pesquisas e descobertas na área de Física, possibilitando a identificação de novas

relações entre os conceitos estudados e o desenvolvimento de novas aplicações prácticas.

Assim, a justificativa para a realização desta pesquisa está na sua relevância tanto teórica quanto práctica, contribuindo para o avanço do conhecimento na área de Física e para o desenvolvimento de tecnologias que possam melhorar a qualidade de vida das pessoas.

Segundo Oliveira e Simões (2019), a compreensão dos movimentos em Física é de grande importância para o desenvolvimento de tecnologias em diferentes áreas, como a automotiva, aeroespacial e naval. Além disso, a aplicação prática dos conceitos estudados na Física permite a optimização de processos industriais, como na construção de maquinarias, na produção de peças e na criação de ferramentas. Nesse sentido, o trabalho proposto pode contribuir para a melhoria dos processos industriais e para o desenvolvimento de tecnologias mais eficientes.

Ainda de acordo com Oliveira e Simões (2019), a investigacção sobre a relacção entre os movimentos de rolamento de esferas e o lançamento oblíquo em planos inclinados pode ser útil para a resolucção de problemas cotidianos, como a locomoção de objectos em superfícies inclinadas e a construção de rampas de acesso em locais com desnível.

Deste modo, o trabalho proposto não apenas contribui para a compreensão dos conceitos teóricos em Física, mas também pode ser útil para a resolucção de problemas práticos e para o desenvolvimento de tecnologias mais eficientes e inovadoras em diferentes áreas. Sendo assim, a realização deste trabalho se justifica por sua relevância para a sociedade e para o avanço científico e tecnológico.

1.5. Metodologia

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi baseada na realizacção de experimentos com esferas de aço em um plano inclinado. Inicialmente, foi construído um dispositivo experimental com o plano inclinado e um cronómetro acoplado para medir o tempo de queda das esferas. As esferas foram abandonadas com velocidade inicial igual a zero em diferentes ângulos, e o tempo que a esfera leva para percorrer a caneleta foi registrado. A partir destes dados, foi possível calcular as velocidades de rolamento das esferas.

Foram utilizadas esferas de aço de mesmo diâmetro e massa, para evitar variações nas medições. Foram realizadas 10 medições para cada condição de velocidade e ângulo, a fim de garantir uma amostragem robusta. Os dados colectados foram analisados

estatisticamente, utilizando-se cálculos de média, desvio padrão e intervalo de confiança, para avaliar a precisão das medições.

O estudo foi conduzido em um ambiente controlado, com temperatura e umidade estáveis, a fim de minimizar o efeito de factores externos nas medições. Foram realizados testes preliminares para calibrar o dispositivo experimental e garantir que as medições sejam precisas e confiáveis.

Os resultados obtidos foram analisados estatisticamente e comparados com os valores teóricos esperados, utilizando conceitos de cinemática e mecânica clássica. Foram também realizadas comparações entre as diferentes condições de velocidade e ângulo, para avaliar a influência desses factores nas velocidades de rolamento das esferas.

1.6. Estrutura do Trabalho

A estrutura do trabalho foi dividida em cinco capítulos: o capítulo I, da introdução, que apresenta o tema, o problema e os objectivos da pesquisa; a revisão da literatura constitui o segundo capítulo, que tratou os principais conceitos e teorias relacionados ao tema; o terceiro capítulo e o da metodologia, que explica os procedimentos utilizados para a colecta e análise dos dados; o quarto capítulo da apresentacção e análise dos resultados, que apresenta os dados coletados e faz a sua interpretacção; e o quinto e último capítulo da conclusão, que resume os principais achados da pesquisa, discute suas limitações e apresenta sugestões para futuras pesquisas. O trabalho também conta com referências bibliográficas.

CAPÍTULO II: REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo faz uma revisão da literatura sobre as actividades experimentais na formação científica, divergências e confluências em relação a inserção dessas actividades experimentais no ensino de física, movimento de esferas em planos inclinados, rolamento puro e deslizamento de um corpo rígido e por fim, atrito no movimento de rolamento sem escorregamento.

2.1. Actividades experimentais na formação científica

A importância atribuída à componente prático-experimental no ensino de ciências, especialmente no ensino de física, tem sido amplamente discutida e documentada em diversos trabalhos académicos. Esta temática é abordada em artigos publicados em eventos da área de ensino de ciências, assim como em periódicos científicos que exploram o papel do laboratório didáctico no ensino e aprendizagem. Além disso, a história da inserção e valorização destas práticas experimentais no ensino de física é frequentemente investigada em dissertações de mestrado e teses de doutorado. Por exemplo, em Moçambique, Sacate (2004) publicou uma pesquisa intitulada "uma exploração da contribuição de algumas estratégias para promover o desenvolvimento conceptual no domínio da electricidade". Através destas publicações, é possível explorar em detalhes a evolução, os desafios e os benefícios da abordagem experimental no contexto nacional e internacional do ensino de física.

A corrida espacial no final da década de 1950, em plena Guerra Fria, com o lançamento pela União Soviética do primeiro satélite artificial, o Sputnik, em 1957, motivou movimentos de reforma curricular do ensino das ciências naturais. Desta forma, particularmente nos Estados Unidos, na década de 1960, projectos como o Physical Science Study Committee (PSSC), Harvard e o Biological Science Curriculum Study (BSCS) vieram acompanhados da ênfase na com-ponente prático-experimental para o ensino das ciências naturais como resposta a uma suposta supremacia do ensino de ciências das escolas soviéticas. No caso da física, especificamente, esta componente muito se aproximava de um laboratório científico de cunho experimental, em que o aluno percorreria etapas pré-determinadas na realização de um experimento científico tal como um aprendiz de cientista, fazendo uso "do método científico" (Pereira & Moreira, 2017).

Não demorou muito para que tais projectos de ensino fossem conhecidos internacional-mente e, assim, traduzidos e/ou adaptados para o contexto brasileiro, com destaque, no

ensino da física, para os projectos Harvard e PSSC (que requereria professores bem formados e treinados para uso do material sugerido, além de espaço físico dedicado a um laboratório bem equipado). Marcados pela necessidade de reformas e pela relação entre o ensino de ciências e as actividades prático-experimentais, projectos brasileiros foram desenvolvidos e, na década de 1970, surgiram os projectos Física Auto-Instrutiva (FAI) e o Projecto de Ensino de Física (PEF), que enfatizavam um ensino que colocava o aluno em um papel mais activo, inclusive em relação ao laboratório didáctico, e não como mero reprodutor de etapas de um roteiro fechado a serem seguidas.

Em Moçambique, a história e o PEA de Física estão vinculados ao processo histórico e evolutivo da educação moçambicana, concretamente nos processos e trajectos sobre a sua inserção nos currículos escolares e as visões que têm sido dadas ao ensino desta ciência ao longo da história educacional do país. Nas primeiras décadas do século XX, a abrangência da escola era muito restrita. De facto, o projecto do País colonizador (Portugal) tinha no trabalho forçado sua principal base de sustentação econômica e política, justificando-o e tornando-o aceitável, através do corolário da educação e civilização do indígena (Ribeiro, 2015 citado em Fortes, Beirão, & Santos, 2021).

Cabaço (2009) descreve o sistema educacional colonial como:

Um sistema unificado a todo império pelo modelo em vigor na metrópole. Na escola primária, em Moçambique, estudava-se, até meados da década de 1960, em textos que se referiam à vida rural em Portugal, sua vegetação, sua fauna, sua paisagem, seus usos e costumes. Era a tentativa de alienação física do espaço sociocultural e da natureza que cercava a criança das colônias. As disciplinas de História e Geografia, Física, Humana e Económica, que se prolongavam por todo o ensino médio, referiam-se as questões de Portugal, visando a comprometer deliberadamente o universo da imaginação e mitificar a metrópole (Cabaço, 2009, p. 15).

Após a independência nacional, em 1975, e sobretudo depois dos primeiros anos da década dos anos 90, houve uma expansão massiva de instituições de todos os níveis de ensino, em todo o território nacional. Este processo contribuiu para o desenvolvimento sociocultural e económico do País, possibilitando a inovação tanto das práticas comuns, como da ciência e da tecnologia (Terenciano; Natha, 2016 citado em Fortes, Beirão, & Santos, 2021).

Actualmente, o sistema de ensino de Física em Moçambique ainda se fundamenta no ensino livresco, conteudista e centrado na transmissão de conhecimentos, que Langa (2015) caracterizou como o ensino centrado no docente, que privilegia o método de transmissão vertical (docente para estudante), estruturado em torno da sala de aulas. O professor verbaliza explicações de conceitos apresentados nos livros didáticos, resolve e propõe exercícios de fixação. A investigação, a experimentação e as demonstrações representam atividades subsidiárias que, quando se faz, ocorre quando sobra algum tempo após a atividade principal, dar-aulas (Fortes, Beirão, & Santos, 2021).

A necessidade da abordagem prático-experimental no processo de ensino-aprendizagem de uma ciência natural como a física decorre da legitimação da experimentação como a busca por desvelar a natureza, a ciência da experiência. Para Pinho-Alves (2000, p. 175), se para fazer física é preciso do laboratório, então, para aprender física ele também é necessário – "a aceitação tácita do laboratório didático no ensino de Física é quase um dogma". A realização de atividades no laboratório didático de física ganha uma conotação de imprescindibilidade, notadamente aceita tanto por professores em todos os níveis, quanto por pesquisadores da área.

Tal necessidade encontra respaldo na prerrogativa de que tais actividades podem facilitar a compreensão de conceitos físicos, além de encorajar a aprendizagem ativa, motivar, des-pertar o interesse, desenvolver o raciocínio lógico, a comunicação, estimular a capacidade de iniciativa e de trabalho em grupo (Hofstein; Lunetta, 2004 citado em Pereira & Moreira, 2017).

No entanto, o questionamento da eficiência do laboratório didáctico de física, tal como realizado, remonta à mesma época de sua valorização – desde a segunda metade do século XX – quando as pesquisas costumavam apontar o laboratório como um dos grandes potencializa-dores da melhoria do ensino da física, em que a experimentação por parte do estudante era considerada a salvação para o fracasso, um tipo de "vareta mágica" (Colinvaux; Barros, 2002).

2.1.1. Divergências e confluências em relação a inserção dessas actividades experimentais no ensino de física

A inserção das atividades experimentais no ensino de física é amplamente discutida e estudada na literatura académica. Diversos autores ressaltam a importância dessas práticas como parte integrante do processo de aprendizagem. Segundo Tobias et al.

(2001), "actividades experimentais permitem aos alunos construir conhecimento de forma mais efetiva, explorando conceitos científicos por meio de investigações concretas". Nesse sentido, a abordagem hands-on[1], em que os estudantes realizam experimentos práticos, é considerada uma estratégia eficaz para a compreensão dos fenômenos físicos (Bybee, 2000).

No entanto, algumas pesquisas têm apontado desafios e divergências em relação à inserção das atividades experimentais no ensino de física. Conforme destacado por Millar (2006), "a disponibilidade de recursos e a falta de infraestrutura adequada são obstáculos significativos na implementação de práticas experimentais nas escolas". Além disso, a falta de preparo dos professores para orientar e conduzir as actividades práticas também é um ponto de discussão (Hofstein e Lunetta, 2004).

Por outro lado, pesquisadores como Ainsworth (2006) afirmam que a integração entre teoria e prática por meio das actividades experimentais contribui para uma aprendizagem mais significativa e duradoura. Segundo a autora, "a interação entre a teoria e a prática permite aos estudantes verificarem suas ideias, confrontarem concepções prévias e construírem um conhecimento mais sólido e coerente". Essa abordagem ativa e exploratória, aliada à reflexão e discussão em sala de aula, promove uma compreensão mais profunda dos conceitos científicos.

Portanto, a literatura académica destaca tanto a importância das actividades experimentais no ensino de física, como forma de promover a compreensão dos fenômenos e despertar o interesse dos alunos, quanto os desafios e divergências em relação à sua implementação. A busca por estratégias eficazes, o investimento em infraestrutura adequada e a formação contínua dos professores são aspectos fundamentais para uma inserção bem-sucedida das actividades experimentais no contexto educacional (Hodson, 2003; Lunetta et al., 2007).

2.1.2. Caso de Moçambique

Em Moçambique, a inserção de actividades experimentais no ensino de física apresenta algumas divergências e confluências que reflectem os desafios e as perspectivas dessa abordagem pedagógica. Diversos estudos têm analisado essa questão, buscando compreender as experiências dos professores e os recursos disponíveis, além de identificar os impactos e as dificuldades enfrentadas nesse contexto.

[1] **Hands-On**- emprestimo linguistico para “pratica”

Sacate e Mutimucuio (2023) realizaram um estudo sobre a inclusão de experiências demonstrativas na exploração das dificuldades dos alunos sobre os conceitos do princípio de “acção –reacção” e o da “força de atrito”.

Lopes, Macheve e Massingue (2014) ressaltam a importância das actividades experimentais no ensino de física em Moçambique, destacando sua contribuição para a motivação dos estudantes e para a integração entre teoria e prática. No entanto, eles também apontam que a falta de recursos e infraestrutura adequados pode limitar a implementação dessas actividades, evidenciando uma das divergências enfrentadas no país.

Mabote, Cossa e Nhantumbo (2017) realizaram um estudo sobre a utilização das actividades experimentais em Moçambique, analisando os recursos disponíveis e os desafios enfrentados pelos professores. Eles identificaram que a falta de materiais e equipamentos adequados, assim como a falta de formação específica dos professores, são obstáculos significativos para a inserção dessas atividades nas aulas de física.

A formação de professores é um aspecto fundamental nesse contexto, como apontado por Nhantumbo e Chissano (2019). Eles destacam a necessidade de investimentos na formação inicial e contínua dos professores, a fim de capacitá-los para utilizar efetivamente as atividades experimentais em suas práticas pedagógicas.

Sequeira, Machava e Andrade (2018) abordam os desafios e as perspectivas da utilização de atividades experimentais no ensino de física em Moçambique. Eles destacam a importância de superar as dificuldades enfrentadas, como a falta de recursos e a ausência de laboratórios bem equipados, e sugerem estratégias para promover a inserção dessas atividades, como a adaptação de materiais e a busca por parcerias com instituições de ensino superior e centros de pesquisa.

Xavier, Macuacua e Nhantumbo (2016) discutem as perspectivas e os desafios do ensino experimental de física em Moçambique. Eles ressaltam a necessidade de integrar as atividades experimentais de forma mais significativa no currículo escolar, promovendo uma abordagem contextualizada e favorecendo o desenvolvimento de habilidades científicas nos estudantes.

Esses estudos evidenciam a existência de divergências em relação à inserção de atividades experimentais no ensino de física em Moçambique, principalmente

relacionadas à falta de recursos e formação dos professores. No entanto, também destacam a importância e as perspectivas positivas dessa abordagem, ressaltando a necessidade de investimentos e estratégias para superar os desafios e promover uma educação científica de qualidade no país.

2.1.3. Importância das actividades experimentais na formação científica

Desde o final do século passado, o laboratório tem sido considerado um importante meio instrucional no ensino de ciências. Em 1886, a Universidade de Harvard publicou uma lista de experimentos que deveriam ser incluídos em aulas de Física para alunos de segundo grau que pretendessem estudar em Harvard (MOYER, 1976). O ensino de laboratório era considerado essencial porque provia treinamento em observação, fornecia informações detalhadas e estimulava o interesse dos alunos. As mesmas razões são ainda aceitas quase 100 anos depois. Shulman e Tamir, no Second Handbook of Research on Teaching (Travers, org., 1973), listaram cinco grupos de objetivos que podem ser atingidos através do uso do laboratório em aulas de ciências:

(a) habilidades - de manipular, questionar, investigar, organizar e comunicar;

(b) conceitos - como hipótese, modelo teórico, categoria taxionômica;

(c) habilidades cognitivas - pensamento crítico, solução de problemas, aplicação, análise, síntese;

(d) compreensão da natureza da ciência - empreendimento cientifico, cientistas e como eles trabalham, existência de uma multiplicidade de métodos científicos, inter-relações entre ciência e tecnologia e entre as várias disciplinas científicas;

(e) atitudes - como curiosidade, interesse, correr risco, objectividade, precisão, confiança, perseverança, satisfação, responsabilidade, consenso, colaboração, gostar de ciência. (Blosser, 1988)

Um experimento pode ser concebido considerando-se diferentes abordagens. A maneira clássica de utilizar o experimento é aquela em que o aluno não tem que discutir; ele aprende como se servir de um material, de um método; a manipular uma lei fazendo variar os parâmetros e a observar um fenômeno.

Há outro tipo de abordagem onde a lei não é questionada, ela é conhecida e utilizada para calcular um parâmetro, analogamente ao que é feito em um laboratório de metrologia ou de testes. No ensino podem ser mencionados alguns exemplos, common

comparar métodos experimentais ou determinar a velocidade do som no ar. Nesse caso, é preciso fazer uso de uma competência suplementar que é a de avaliar. Essa competência é raramente utilizada no ensino. Assim, ao resolver um problema aplicando as leis de Newton, geralmente, encontra-se um único resultado. Ao contrário, ao pedir ao aluno que meça um parâmetro, o professor tenta fazê-lo perceber que o resultado é uma informação (Coelho, 1993,1998; Séré et al.,1993), um meio de comunicação entre duas pessoas, duas comunidades e que ele vai julgar esse parâmetro sem ter que fornecer um único resultado.

Um enfoque cada vez mais considerado graças ao uso da informática consiste em traduzir sob diferentes formas um conjunto de dados relativos a um fenômeno: coletar dados e selecioná-los eventualmente; encontrar modelos diferentes e testá-los no computador. Essa é uma maneira de servir-se da teoria. Assim, é possível antes de ensinar uma lei, pedir aos alunos que imaginem um modelo.

Outra possibilidade é a que remete às actividades de produção, onde a relação entre a teoria e o experimento é bastante interessante. O que se aprende de teórico é utilizado de forma diferente do habitual, pois mesmo um engenheiro em uma construção não está todo o tempo servindo-se da física, mas agindo frequentemente por tentativa e erro. As operações intelectuais utilizadas durante a acção diferem das necessárias para a resolução de problemas do tipo papel e lápis. Teorias modernas da psicologia e da ergonomia, pouco conhecidas, mostram que os físicos aplicam com frequência regras intuitivas, derivadas de seus conhecimentos procedurais, de hábitos adquiridos ou simplesmente do bom senso, ao invés de princípios físicos elaborados.

Portanto, o professor pode optar por diferentes enfoques ao propor um experimento, o que implicaria em diferentes actividades para o aluno. A importância das actividades experimentais na formação científica tem sido amplamente reconhecida e enfatizada por diversos autores em todos os níveis de ensino. Essas actividades têm um papel significativo na promoção do interesse e da motivação dos estudantes em relação à ciência, uma vez que permitem uma abordagem práctica e tangível dos conceitos teóricos.

Ao realizar experimentos, os alunos têm a oportunidade de observar fenômenos reais, coletar dados, realizar medições e análises, e tirar conclusões com base em evidências concretas. Isso estimula o pensamento crítico, a curiosidade científica e a capacidade de

resolver problemas, além de proporcionar uma experiência mais envolvente e significativa no processo de aprendizagem.

Além disso, as atividades experimentais promovem a integração entre a teoria e a prática, permitindo que os alunos relacionem os conceitos abstratos com os fenômenos do mundo real. Essa conexão entre a teoria e a práctica é fundamental para uma compreensão mais profunda dos princípios científicos, uma vez que os estudantes podem visualizar e explorar diretamente as relações causa-efeito, as regularidades e as variações nos experimentos.

Dessa forma, as actividades experimentais desempenham um papel crucial na formação científica dos alunos, proporcionando uma base sólida de conhecimentos, habilidades e atitudes necessárias para o desenvolvimento de uma mentalidade científica. Elas contribuem para a construção do conhecimento, o desenvolvimento das habilidades prácticas e investigativas, e a promoção de uma aprendizagem mais significativa e duradoura.

2.2. Movimento de esferas em planos inclinados

As teorias sobre o movimento de esferas em planos inclinados têm sido objecto de estudo e investigação no campo da física há muitos anos. Diversos pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento dessas teorias, fornecendo '**insights**'[2] valiosos sobre os princípios físicos envolvidos nesse fenômeno.

Um dos principais conceitos teóricos relacionados ao movimento de esferas em planos inclinados é a aplicação das leis do movimento de corpos em rampas. Isaac Newton, em sua obra "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" (1687), estabeleceu as bases para a compreensão do movimento de objectos em diferentes superfícies, incluindo planos inclinados. Suas leis do movimento e a lei da gravitação universal são fundamentais para a análise do movimento de esferas em planos inclinados.

Além de Newton, outros cientistas contribuíram para o estudo do movimento de esferas em planos inclinados. Johann Bernoulli, no século XVIII, desenvolveu a chamada "lei das rampas", que relaciona à altura, o comprimento e a inclinação de uma rampa com a velocidade e a aceleração de um objecto em movimento sobre ela.

[2] **Insights-** referem-se a compreensões profundas e perspicazes sobre os fenômenos físicos observados ou sobre os resultados experimentais obtidos.

Mais recentemente, pesquisadores têm utilizado abordagens mais avançadas para estudar o movimento de esferas em planos inclinados, como a análise por meio de equações diferenciais e a aplicação de conceitos de dinâmica de sistemas. Essas abordagens permitem uma compreensão mais detalhada e precisa do comportamento das esferas em planos inclinados, considerando factores como atrito, rotação e interações com o meio ambiente.

Além das teorias clássicas, também são exploradas abordagens experimentais e computacionais para investigar o movimento de esferas em planos inclinados. Essas abordagens permitem validar as teorias existentes, realizar simulações computacionais e explorar fenômenos mais complexos, como a interação de múltiplas esferas em um mesmo plano inclinado.

O movimento de um corpo solido sobre uma superfície plana é uma situação bastante comum. Esse movimento pode ser um escorregamento puro, um rolamento puro (também chamado de rolamento sem deslizamento) e, no caso mais geral, rolamento com deslizamento. Obviamente, a forma geométrica do corpo é fundamental para o tipo de movimento. Em geral, quando falamos de um escorregamento puro nos referimos ao movimento de um bloco sobre uma superfície, o qual na maioria das vezes é representado no contexto de um modelo de partícula, embora isto não seja muito rigoroso.

Por sua vez, rolamento puro se refere ao movimento de um corpo que possui uma secção circular (cilindro ou esfera, por exemplo). Movimentos de corpos que rolam são muito comuns no dia a dia. Como exemplos óbvios podemos citar os movimentos das rodas de uma bicicleta ou de um automóvel.

Quando um corpo com simetria axial (um cilindro, uma esfera, um anel) rola sobre uma superfície plana e cada ponto da periferia do corpo não desliza sobre o plano, dizemos que acontece um rolamento sem deslizamento ou rolamento puro. Se v_{cm} é a velocidade de translação do centro de massa do corpo, para que ocorra rolamento puro devemos ter

$$v_{cm} = \omega \cdot R \qquad [1]$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular de rotação do corpo em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e **R** é o seu raio.

2.3. Rolamento puro e com deslizamento de um corpo rígido

Considere-se a seguinte situação. Um corpo rígido de secção circular de raio **R** é lançado com velocidade inicial $\boldsymbol{v_0}$ horizontal e sem rotação inicial ($\boldsymbol{\omega_0}$**= 0**) sobre uma superfície horizontal cujo coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície é $\boldsymbol{\mu_c}$. No princípio do movimento acontece um rolamento com deslizamento e as forças que atuam sobre o corpo nesse estágio estão indicadas na Fig. 1. Como estamos considerando o corpo como rígido, a forca normal **N** passa pelo centro de massa do corpo.

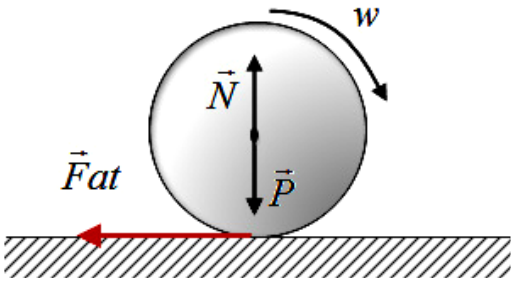


Figura 1: Forças que atuam sobre um corpo rígido de secção circular de raio R que rola com deslizamento. (Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013))

As equações de movimento são:

$$F_{at} = -M \cdot a_{cm} \qquad [2]$$

onde F_{at} é o modulo da força de atrito (no caso, força de atrito cinético, já que há um rolamento com deslizamento), M é a massa do corpo que rola e a_{cm} é a aceleração do centro de massa do corpo em relação a um referencial inercial.

A força de atrito exerce um torque em relação ao centro de massa do corpo que o faz girar no sentido horário. Tomando esse sentido como positivo temos que

$$F_{at} \cdot R = I\alpha = MK^2\alpha \qquad [3]$$

Onde: **I** é o momento de inercia do corpo, calculado em relação a um eixo passando pelo seu centro de massa, $\boldsymbol{\alpha}$ é a aceleração angular em torno desse eixo e **k** é o raio de giração do corpo.

A Tabela 1 mostra os valores do raio de giração e de algumas relações úteis envolvendo essa grandeza para a esfera, o cilindro e o anel.

Tabela 1: Valores do raio de giração e de algumas relações envolvendo essa grandeza para a esfera, o cilindro e o anel. Fonte: (Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013))

	Esfera	Cilindro	Anel
k^2	$\frac{2}{5}R^2$	$\frac{1}{2}R^2$	R^2
$\frac{k^2}{(k^2+R^2)}$	$\frac{2}{7}=0{,}29$	$\frac{1}{3}=0{,}33$	$\frac{1}{2}=0{,}5$
$\frac{R^2}{(R^2+k^2)}$	$\frac{5}{7}=0{,}71$	$\frac{2}{3}=0{,}67$	$\frac{1}{2}=0{,}5$

Das Eqs. (2) e (3) vemos que a força de atrito diminui a velocidade de translação do centro de massa e, ao mesmo tempo, produz um torque que faz aumentar a velocidade de rotação do corpo. Desse modo, inicialmente a velocidade de translação diminui e a velocidade de rotação aumenta até a condição de rolamento puro, $v_{cm} = \omega \cdot R$, ser estabelecida. O tempo transcorrido para que isso aconteça e o valor da velocidade nesse instante podem ser facilmente calculados, conforme mostrado a seguir.

A aceleração do centro de massa e a aceleração de rotação em torno do eixo que passa pelo centro do corpo são facilmente obtidas das Eqs. (2) e (3)

$$a_{cm} = -\mu_c \cdot g \qquad [4]$$

$$\alpha = \frac{R}{k^2} \cdot \mu_c \cdot g \qquad [5]$$

As velocidades de translação e de rotação são as expressões usuais do movimento retilíneo uniformemente acelerado

$$v_{cm}(t) = v_0 - \mu_c \cdot g \cdot t \qquad [6]$$

$$\omega(t) = \frac{R}{k^2} \cdot \mu_c \cdot g \cdot t \qquad [7]$$

Das Eqs. (6) e (7) obtemos o tempo $\boldsymbol{t = t_1}$ para o qual teremos a condição de rolamento puro

$$\boldsymbol{t_1 = \frac{k^2}{(k^2+R^2)} \cdot \frac{v_0}{\mu_c g}} \qquad [8]$$

Na primeira etapa do movimento temos um rolamento com deslizamento ($\boldsymbol{v_{cm} > \omega \cdot R}$) e conforme mostram as Eqs. (6) e (7) a $\boldsymbol{v_{cm}}$ decresce linearmente com o tempo enquantoω cresce linearmente até o instante $\boldsymbol{t = t_1}$. Para tempos maiores que $\boldsymbol{t_1}$ a força de atrito entre as superfícies deixa de existir e teremos um rolamento puro e, mais

que isso, um movimento uniforme ($\boldsymbol{v_{cm} = \omega \cdot R = constante}$). A Fig. 2 ilustra essa situação para uma esfera.

Utilizando os valores da Tabela 1, temos que

$$\boldsymbol{t_1} = \begin{cases} \frac{2}{7}\frac{\boldsymbol{v_0}}{\mu_c g}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{1}{3}\frac{\boldsymbol{v_0}}{\mu_c g}, & \text{para um cilindro} \\ \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{v_0}}{\mu_c g}, & \text{para um anel.} \end{cases} \qquad [9]$$

Utilizando a Eq. (9) na Eq. (6) obtemos o valor da velocidade do centro de massa para a qual $\boldsymbol{v_{cm} = \omega \cdot R}$, ou seja,

$$v_{cm}(t = t_1) = \frac{R^2}{(R^2 + k^2)} v_0 = \begin{cases} \frac{5}{7} v_0, & \text{para uma esfera} \\ \frac{2}{3} v_0, & \text{para um cilindro} \\ \frac{1}{2} v_0, & \text{para um anel} \end{cases} \qquad [10]$$

O que acontece para tempos maiores que t_1? Quais são as forças que actuam no corpo nesse caso? Supondo que haja uma força de atrito e que o sentido dessa força seja contrário ao movimento de translação, o torque produzido por essa força aumentar a velocidade angular do corpo. Então teremos um movimento de rotação cada vez mais rápido. Se, ao contrário, a força de atrito tiver o mesmo sentido do movimento de translação, haverá uma força resultante no sentido do movimento e, portanto, aumentar a velocidade do centro de massa do corpo. Ambas as situações são absurdas e violariam a segunda lei da termodinâmica. Logo, para $t \geq t_1$, considerando o corpo como rígido e desprezando a resistência do ar, as únicas forças que atuam no corpo que rola são a força peso e a força normal, ambas passando pelo centro de massa do corpo. Em suma, para $t \geq t_1$ o corpo rola sem deslizamento com velocidade constante, já que a força de atrito desaparece pelas razões expostas acima.

Desse modo, podemos dividir o movimento em duas etapas. A primeira se desenrola desde o instante inicial em que o corpo lançado toca a superfície horizontal até o instante $t = t_1$; enquanto a segunda etapa ocorre para $t > t_1$.

Na primeira etapa do movimento temos um rolamento com deslizamento ($v_{cm} > \omega \cdot R$) e conforme mostram as Eqs. (6) e (7) a v_{cm} decresce linearmente com o tempo

enquanto ω cresce linearmente até o instante t = t_1. Para tempos maiores que t_1 a força de atrito entre as superfícies deixa de existir e teremos um rolamento puro e, mais que isso, um movimento uniforme ($v_{cm} = \omega \cdot R$ = constante). A Fig. 2 ilustra essa situação para uma esfera.

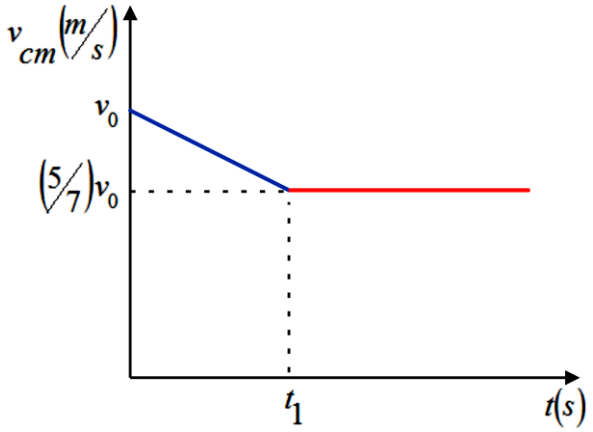


Figura 2: Gráfico da velocidade do centro de massa em função do tempo. (Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013))

Contudo, sabemos da experiência que um corpo rolando sobre uma superfície horizontal Pará após algum tempo. Isso nos leva a seguinte questão. Como explicar esse fato já que, como vimos acima, a força de atrito se anula para t > t_1? A resposta a essa questão ser a abordada a seguir.

2.4. Rolamento de um corpo deformável

2.4.1. Atrito de rolamento

É evidente da experiência que um corpo sólido que rola em um plano horizontal perde velocidade e Pará após certo tempo, em contradição com a previsão teórica para um corpo perfeitamente rígido. Por que isso acontece?

A resposta a esta questão expõe o limite de aplicação do modelo de corpo rígido. Além da resistência do ar (arrasto aerodinâmico) há o atrito de rolamento que surge devido ao fato de que nem o corpo nem o plano são perfeitamente rígidos e, assim, ambos sofrem deformações, o que dá origem ao atrito de rolamento.

Vamos considerar que as deformações ocorrem exclusivamente no corpo que rola. Um exemplo dessa situação seria um pneu de automóvel trafegando sobre uma pista horizontal de concreto ou asfalto. A Fig. 3 mostra as forças que atuam sobre o corpo onde desprezaremos a resistências do ar.

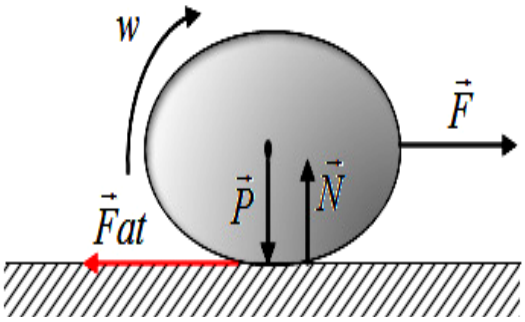


Figura 3: Forças qual actuam sobre um corpo deformável. [Fonte: (Andrade-Neto, Cruz, Militão, & Ferreira, 2013)]

Deve ser notado que a força N está deslocada em relação à posição de um corpo perfeitamente rígido. Devido ao achatamento do corpo, o ponto de aplicação de **N** será deslocado para frente por uma distância **x** em relação ao ponto em que **N** atua no caso do corpo indeformável (Silveira, 2011); isso acontece porque a pressão na região de contato com o plano horizontal não é uniforme, aumentando no sentido do deslocamento do centro de massa do corpo que rola, **F** é uma força horizontal aplicada em uma altura h = R na direção do movimento de translação e $\mathbf{F}_{at}$ é a força de atrito. As equações dinâmicas ficam agora

$$F - F_{at} = Ma_{cm} \qquad [11]$$

$$F_{at}R - Nx = I \propto \qquad [12]$$

Vamos inicialmente considerar que o corpo se desloca com velocidade do centro de massa constante. Para essa situação as Eqs de movimento são

$$F = F_{at} \qquad [13]$$

$$F_{at}R = Nx \qquad [14]$$

Da Eq. (14) podemos definir uma grandeza adimensional μ_r tal que

$$\mu_r = \frac{x}{R} = \frac{F_{at}}{N} \qquad [15]$$

onde μ_r é denominado coeficiente de atrito de rolamento ou coeficiente de resistência ao rolamento. Deve ser observado que se o corpo é perfeitamente rígido x = 0 e, desse modo, $\mu_r = 0$. Isso explica porque no rolamento puro de um corpo rígido a força de atrito é nula. Valores típicos de μ_r para pneus de carro sobre asfalto são da ordem de 0,01 enquanto o coeficiente de atrito estático μ_e é da ordem de 0,9, ou seja, μ_r é cerca de 90 vezes menor que μ_e. Estes valores explicam porque é tão mais fácil deslocar um objecto que possui rodas em comparação com o mesmo objecto sem rodas.

2.5. Por que o corpo Pará?

Se o corpo rola sobre uma superfície horizontal e não está submetido a uma força motriz, as Eqs. (11) e (12) ficam

$$F_{at} = -Ma_{cm} \quad [16]$$

$$Nx - F_{at}R = -I \propto \quad [17]$$

Utilizando que N = P = Mg e as Eqs. (16) e (15) em (17) obtemos

$$a_{cm} = -\frac{R^2}{(R^2+k^2)}\mu_r g = \begin{cases} -\frac{5}{7}\mu_r g, & \text{para uma esfera} \\ -\frac{2}{3}\mu_r g, & \text{para um cilindro} \\ -\frac{1}{2}\mu_r g, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad [18]$$

A equação horaria para a velocidade fica

$$v(t) = \begin{cases} v_0 - \frac{5}{7}\mu_r g t, & \text{para uma esfera} \\ v_0 - \frac{2}{3}\mu_r g t, & \text{para um cilindro} \\ v_0 - \frac{1}{2}\mu_r g t, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad [11]$$

o que nos permite calcular o tempo $\mathbf{t_p}$ para o qual o corpo entrará em repouso

$$t_p = \begin{cases} \frac{7}{5}\frac{v_0}{\mu_r g}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{3}{2}\frac{v_0}{\mu_r g}, & \text{para um cilindro} \\ 2\frac{v_0}{\mu_r g}, & \text{para um anel.} \end{cases} \quad [20]$$

Desprezando a resistência do ar e considerando, como fizemos aqui, que as deformações ocorrem exclusivamente no corpo que rola, a energia inicial do corpo é transformada em energia interna do corpo que rola provocando, assim, seu aquecimento. No caso mais geral em que ambos os corpos (o corpo que rola e o plano horizontal) se deformam, a dissipação da energia inicial do corpo provocará o aumento da energia interna de ambos os corpos.

2.6. Rolamento sem deslizamento

O rolamento sem deslizamento é um fenômeno fundamental na mecânica e é amplamente estudado devido à sua relevância em diversas aplicações prácticas. Esse tipo de movimento ocorre quando um objecto rola sobre uma superfície sem deslizar, e

a relação entre as velocidades de rotação e translação é determinada pelo raio efectivo de rolamento.

2.7. Atrito no movimento de rolamento sem escorregamento

2.7.1. Contacto entre sólidos

O contacto entre um sólido e a superfície sobre a qual se apoia pode realizar-se em um ou vários pontos (contatos pontuais), segundo uma curva (contato linear) ou, o mais frequentemente, segundo uma área (contato superficial).

Na verdade, não existe contato rigorosamente pontual ou linear, pois estes são contatos teóricos (ideais): o contato sempre se efectua segundo uma pequena área, que inclui a linha, o ponto ou os pontos de contato supostos.

Assim, os contatos teóricos supõem a perfeição geométrica e a rigidez infinita dos sólidos em contacto, o que constitui uma idealização da realidade, não só quanto à perfeição geométrica dos sólidos, mas também quanto ao conceito de sólido indeformável: existe sempre uma ligeira deformação por contacto, por menor que ela seja, o que implica que a zona de contato não pode ser rigorosamente pontual ou linear.

Entretanto, isto não significa que a idealização dos contactos não permita uma boa aproximação na maioria dos fenômenos observados.

2.8. Atrito estático

Quando os sólidos e as superfícies sobre as quais eles rolam são considerados indeformáveis, os contactos serão pontuais teóricos, como no caso da esfera ou lineares teóricos, como o cilindro.

Desta forma, se nos detivermos no movimento de rolamento sem escorregamento, por exemplo, de uma esfera, veremos que a velocidade relativa de escorregamento do ponto de contacto da esfera em relação à superfície é nula, pois não existe deslizamento[3]. translada-se, isto é, está animado de um movimento de translação em relação à superfície sobre a qual rola; portanto, deste ponto de vista, o sólido não está em repouso, mas o atrito presente é estáctico.

Então, seria inadequado afirmar, de forma geral, que quando o atrito entre os sólidos em contacto é estáctico, os corpos estão em repouso ou em eminência de movimento, pois

[3] ***Deslizamento*** **e** ***escorregamento*** são os dois termos utilizados na literatura para descrever o movimento em questão; então, serão aqui tratados como sinônimos. Da mesma forma, *velocidade relactiva de escorregamento = velocidade relactiva de deslizamento*.

os objectos em estudo podem ter um movimento em relação a um dado referencial e o atrito ser estáctico. Assim, o repouso ao qual está associado o atrito estáctico é o repouso relactivo das superfícies em contacto, umas em relação às outras, ou melhor, é o movimento de não escorregamento relactivo das superfícies, umas em relação às outras.

Portanto, enquanto não houver deslizamento do sólido sobre a superfície, o atrito será sempre estáctico e o trabalho realizado pela força de atrito estáctico será nulo: a velocidade relactiva de deslizamento do ponto de contacto em relação à superfície será nula a cada instante, à medida que o sólido rola. Consequentemente, neste caso, a força de atrito não seria uma força dissipativa.

Assim sendo, como então os sólidos que rolam sem deslizar sobre uma superfície atingem o repouso ao fim de certo tempo? Seria somente a resistência do ar que os faria parar?

2.9. Atrito de rolamento

Quando consideramos a não rigidez dos corpos, devido à área de contato não mais se limitar a um ponto (contacto pontual teórico) ou a uma linha (contacto linear teórico), mas a uma área que envolve o ponto ou a linha de contato (contactos reais), aparece no movimento de rolamento o que é habitualmente chamado de momento de resistência ao rolamento: este momento (um torque) traduziria o fenômeno do atrito neste tipo de movimento, quando se considera a deformação dos sólidos em contacto que, para simplificar, poderemos chamar de atrito de rolamento.

Assim, o rolamento sem deslizamento de um sólido é sempre acompanhado de um atrito ligado às perdas de energia, isto é, à transformação de energia mecânica em energia térmica, devido à deformação das superfícies em contacto.

Efetivamente, um sólido que rola sem escorregar num plano horizontal vai progressivamente parar: além da resistência do ar, aparece igualmente o atrito de rolamento, que depende das propriedades dos materiais em contato.

Desta forma, a principal diferença entre o atrito estáctico (atrito que aparece no rolamento sem deslizamento quando consideramos os sólidos em contato como indeformáveis) e o atrito de rolamento (quando admitimos a deformação dos sólidos em contato, por menor que ela seja) é que, quando o atrito é estáctico, não existe a transformação de energia mecânica em calor.

Consideremos, então, um cilindro que rola sem escorregar numa superfície horizontal, sendo uniforme o seu movimento. No eixo do cilindro que rola sobre o plano horizontal, uma força horizontal constante **F** é aplicada na direcção do movimento.

A resultante **R** das forças de contato exercidas pelo plano horizontal sobre o cilindro, devido à deformação, será orientada e aplicada como mostra a Fig. 4: o ponto de aplicação de **R**, uma vez que o contacto não é mais pontual, porém, segundo uma dada área, será forçosamente deslocado de um determinado comprimento em relação a P, único ponto de contacto, se o contacto fosse pontual.

A componente vertical desta força resultante **R** será a normal **N,** e a componente horizontal (e tangencial às superfícies em contacto) $\mathbf{f_r}$ será a força de atrito, cujo módulo será igual ao módulo da força **F**.

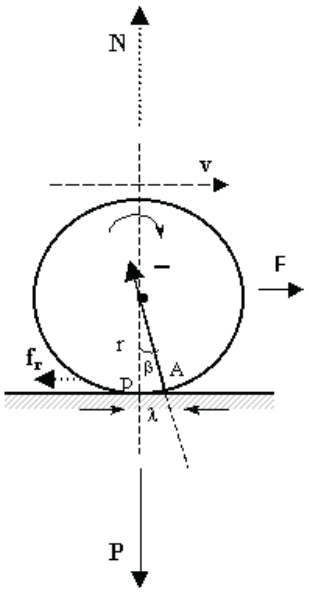


Figura 4:Cilindro que rola sem escorregar pela acção de F (movimento uniforme). [Fonte: (Caldas & Magalhães, 2000)]

Como o movimento do cilindro é uniforme e as suas acelerações de translação e angular são nulas, a força resultante **R** deverá passar pelo eixo do cilindro. Considerando que a distância **λ** é muito pequena em relação ao raio do cilindro ou que o ângulo de inclinação é muito pequeno, a intensidade de **R** é aproximadamente igual, neste caso, ao peso **P**. Assim:

$$N = P = R\cos\beta \;\; e \;\; F = R\sin\beta = f_r \qquad [21]$$

Considerando muito pequeno, podemos escrever:

$$P \cong R \; e \quad f_r \cong R\,\beta \cong P\,\lambda/r \rightarrow f_r r \cong \lambda P \qquad [22]$$

$M_r = \lambda P$ é o chamado **momento de resistência ao rolamento**. A grandeza **λ** expressa em unidades de comprimento, é normalmente chamada de **coeficiente de resistência ao rolamento**, dependendo essencialmente dos materiais em contacto. Se os materiais em contacto são suficientemente 'duros' e a pressão de contacto (força por unidade de área) é baixa, o coeficiente **λ** é ínfimo.

Provavelmente, este é um dos motivos pelo qual o momento de resistência ao rolamento não é geralmente estudado ou até mencionado, mesmo nos cursos universitários de Física Básica. Isto significa que se admite, implícita ou explicitamente, a aproximação de que os corpos são indeformáveis: o atrito no movimento de rolamento sem escorregamento é, então, tratado como sendo sempre estático.

2.10. Rolamento em plano inclinado-Abordagem teórica

As forças que actuam sobre um corpo deformável que rola em um plano inclinado estão indicadas na Fig. 5. Devido á deformação do corpo, o ponto de aplicação da força normal **N** será deslocado para frente por uma distância **x** em relação ao ponto em que **N** atua no caso do corpo indeformável (centro de massa do corpo).

Aplicando a segunda lei de Newton e considerando um rolamento puro (sem deslizamento) temos que

$$P \sin\theta - F_{at} = Ma_{cm} \qquad [23]$$

Onde $P = Mg$ é o módulo da força peso, F_{at} é o módulo da força de atrito, M é a massa do corpo que rola e a_{cm} é a magnitude da aceleração do centro de massa do corpo em relação a um referencial inercial.

A força de atrito exerce um torque sobre o corpo que o faz girar no sentido horário. Tomando esse sentido como positivo e tomando como referência o centro de massa do corpo temos que

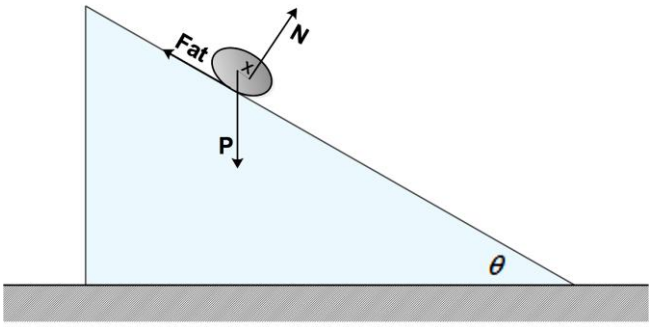


Figura 5: Forças que actuam sobre um corpo deformável que rola num plano inclinado. [Fonte (Andrade-Neto & Leyva-Cruz, 2015)]

A força normal está deslocada de uma distância x em relacção á posição de um corpo perfeitamente rígido.

Da Eq. (23) temos que

$$F_{at} = \frac{MK^2\alpha + xP\cos\theta}{R} \qquad [25]$$

Substituindo a Eq. (25) na Eq. (23) e usando a condição de rolamento puro ($\propto = a/R$) e a definição de coeficiente de atrito de rolamento ($\mu_r = x/R$) encontramos para a aceleração do centro de massa do corpo

$$a_{cm} = \left(\frac{R^2}{(K^2 + R^2)}\right) g(\sin\theta - \mu_r \cos\theta) \qquad [26]$$

Com

$$\frac{R^2}{(R^2 + k^2)} = \begin{cases} \frac{5}{7}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{2}{3}, & \text{para um cilindro} \\ \frac{1}{2}, & \text{para um anel.} \end{cases} \qquad [27]$$

Alguns casos conhecidos na literatura podem ser obtidos como casos particulares da Eq.26 conforme descrito a seguir.

(a) Corpo perfeitamente rígido.

Para essa situação temos que $\mu_r = 0$ e obtemos

$$a_{cm} = \left(\frac{R^2}{(K^2 + R^2)}\right) g \sin\theta \qquad [28]$$

(b) Movimento em um plano horizontal. Para esse caso $\theta = 0$ e a Eq. (26) torna-se

$$a_{cm} = \left(\frac{R^2}{(K^2 + R^2)}\right) g\mu_r \qquad [29]$$

que é a Eq. (18) da Ref. (Andrade-Neto, Cruz, Miltao, & Ferreira, 2013).

2.11. Expressão para o coeficiente de atrito de rolamento

Veremos agora como podemos obter uma expressão para o coeficiente de atrito de rolamento a partir da análise do movimento de um corpo que rola em um plano inclinado.

Como o movimento é uniformemente acelerado e considerando que o corpo parte do repouso de uma altura h e percorre uma distância L no plano inclinado (Fig.6), a velocidade do centro de massa do corpo ao final da distância L é dada pela expressão

$$v_{fcm}^2 = 2a_{cm}L = 2a_{cm}\frac{h}{\sin\theta} = \left(\frac{R^2}{(K^2+R^2)}\right)2gh\left(1-\frac{\mu_r}{\tan\theta}\right) \qquad [30]$$

Da Eq. (30) obtemos a seguinte expressão para o coeficiente de atrito de rolamento

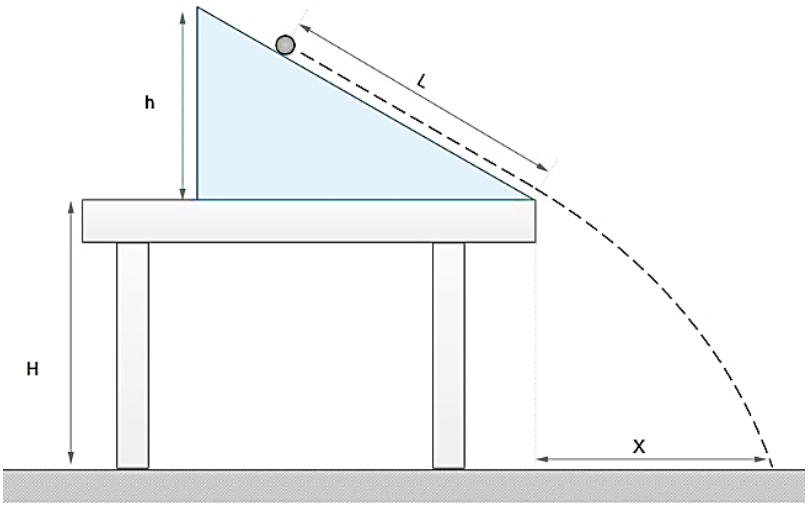


Figura 6: Esquema da montagem experimental que envolve rolamento num plano inclinado e lançamento oblíquo. [Fonte: (Andrade-Neto & Leyva-Cruz, 2015]

$$\mu_r = \left[1-\left(\frac{R^2}{(K^2+R^2)}\right)\frac{v_{fcm}^2}{2gh}\right]tan\,\theta \qquad [31]$$

Com

$$\frac{R^2+K^2}{R^2} = \begin{cases} \frac{7}{5}, & \text{para uma esfera} \\ \frac{3}{2}, & \text{para um cilindro} \\ 2, & \text{para um anel.} \end{cases} \qquad [32]$$

Da Eq. (31) vemos que o coeficiente de atrito de rolamento pode ser calculado se conhecemos a altura h no plano inclinado em que a esfera é solta, o angulo θ do plano e a velocidade do centro de massa da esfera no final do plano inclinado. As grandezas h e

θ são facilmente determinadas experimentalmente de forma direta, enquanto V_{fcm} é obtido por método indireto.

2.11.1. Experimentos de rolamento de esfera em plano inclinado

Em Goya, Laburú, & Filho e Silva, et al. (citados em Andrade-Neto & Leyva-Cruz, 2015), são apresentados experimentos de rolamento de esfera em plano inclinado, nos quais V_{fcm} é determinada. Esses experimentos serão analisados aqui á luz da teoria desenvolvida acima. Considerando explicitamente o movimento de uma esfera a Eq. (26) fica

$$a_{cm} = \frac{5}{7} g (\sin\theta - \mu_r \cos\theta) \qquad [33]$$

E para o coeficiente de atrito de rolamento obtemos da Eq. (31) que

$$\mu_r = \left[1 - \frac{7}{10}\frac{v_{fcm}^2}{gh}\right] tan\,\theta = \left(1 - \frac{v_{cm}^2}{v_{energia}^2}\right) tan\,\theta \qquad [34]$$

onde, conforme Eq. (39) adiante, $v^2{}_{energia} = 10gh/7$ é a velocidade determinada admitindo conservação da energia mecânica.

Em Silva, et al., é descrito um experimento que tem como objectivo demonstrar a conservação da energia mecânica de uma esfera rolando em um plano inclinado. Tomando como nível zero de referência para a energia potencial gravitacional o ponto mais baixo do plano inclinado e soltando a esfera do repouso, a energia mecânica inicial é dada por

$$E_{mi} = Mgh \qquad [35]$$

Por sua vez, a energia mecânica final é dada pela expressão

$$E_{mf} = \frac{7}{10} Mgv_{fcm}^2 \qquad [36]$$

A velocidade V_{fcm} foi determinada utilizando-se as equações do lançamento de projéteis (desprezando a resistência do ar). A velocidade inicial do lançamento oblíquo é a velocidade final no plano inclinado e é dada pela equação

$$v_{alcance} = \frac{X}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(H - X\tan\theta)}} \qquad [37]$$

onde X é o alcance máximo, H é a altura da mesa e θ é o angulo do plano inclinado (Fig. 6).

Os valores calculados da energia mecânica inicial e final, apresentados na Tabela 3 e Fig. 3 de Silva, et al. Que aqui estão designados como tabela 2 e figura 7, claramente mostram que a energia mecânica não se conserva e, mais grave, a energia mecânica final é maior que a inicial. Adicionalmente é determinado o valor do coeficiente de atrito estáctico entre a esfera e o plano inclinado embora, como os autores afirmam, isso não fizesse parte dos objectivos originais do experimento. Os autores também apontam que o resultado obtido para o coeficiente de atrito estático ($\mu_e = 0{,}18$) são divergentes do valor encontrado por outro método ($\mu_e = 0{,}3$). A explicação aventada pelos autores do artigo em pauta, em termos de um coeficiente de atrito estáctico "efectivo", é artificial e não esclarece a física do problema.

Tabela 2: Energia mecânica inicial e final para cada angulo fixado (Silva, et al., 2003)

$\theta(^\circ)$	14,0	18,0	22,0	26,0	30,0	34,0	38,0	42,0	46,0	50,0	54,0
V_{CM}(m/s)	1,18	1,31	1,45	1,59	1,71	1,85	2,01	2,08	2,21	2,27	2,41
h (m)	0,0968	0,124	0,150	0,175	0,200	0,224	0,246	0,268	0,288	0,306	0,324

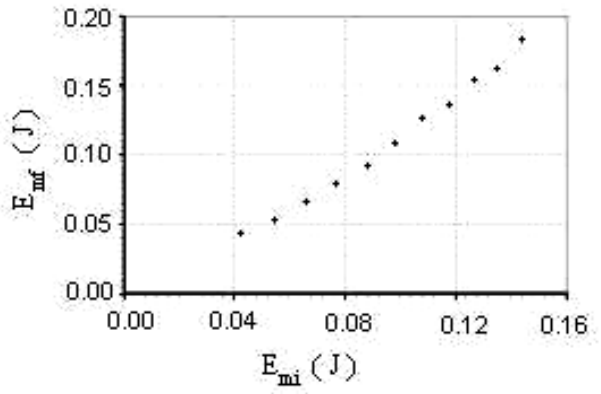


Figura 7:Pontos relactivos à Tab. 3: energia mecânica final versus energia mecânica inicial

Em Goya, Laburú, & Filho, citados em Andrade-Neto & Leyva-Cruz, 2015), também se descreve um experimento com esfera rolando em um plano inclinado. A velocidade da esfera no final do plano inclinado é determinada por três maneiras diferentes:

(a) Inicialmente utiliza-se cronómetros com sensores digitais para se determinar o tempo gasto pela esfera para percorrer o plano inclinado. A velocidade da esfera é, assim, calculada pela expressão

$$v_{sensores} = \frac{2L}{t} \quad [38]$$

onde L é o comprimento do plano inclinado.

(b) No segundo método utiliza-se as equações do lançamento de projécteis, conforme descrito acima e obtém-se a Eq. (37).

(c) A terceira maneira utilizada para calcular a velocidade da esfera no final do plano inclinado foi através da conservação da energia mecânica. Se h é a altura em que a esfera é abandonada, tem-se que

$$v_{energia} = \sqrt{\frac{10gh}{7}} \quad [39]$$

A Eq. (39) pode também ser obtida via cinemática. Para uma esfera perfeitamente rígida temos que $a_{cm} = (5/7)g\sin\theta$.

2.12. Análise dos experimentos

Da Eq. (34) se pode ver que se a velocidade final V_{fcm} for calculada pelo método da energia, i.e., se $V_{fcm} = V_{energia}$ então $\mu_r = 0$. Isso é o esperado já que na hipótese de conservação da energia mecânica da esfera está implícito o modelo de corpo perfeitamente rígido, no qual $\mu_r = 0$. Assim, não é surpreendente que em um experimento real, como aquele descrito em Silva, et al, que tenha como objectivo mostrar a conservação da energia mecânica de uma esfera rolando em um plano inclinado, está condenado ao insucesso.

Isso fica mais claro quando analisamos a Eq. (33). Dessa equação vemos que quando adotamos um modelo mais realista (corpo deformável) a aceleração do centro de massa do corpo é menor, em comparação com o modelo de corpo perfeitamente rígido, por um fator $(5/7)g\mu_r\cos\theta$. Uma aceleração menor significa uma velocidade menor. Então, se V_{fcm} é calculada pela Eq. (39), obviamente esse valor está superestimado em relação ao valor real. Isso explicaria porque no trabalho de Silva, et al foi encontrado um valor para a energia mecânica final maior que o valor inicial.

A Eq. (34) também lança luz sobre os valores das velocidades obtidas via alcance horizontal. Os valores dessa grandeza apresentados na Em Goya, Laburú, & Filho (citados em Andrade-Neto & Leyva-Cruz, 2015), são cerca de 5 por cento maiores que os valores de velocidade calculados via conservação de energia mecânica. Como podemos ver da Eq. (34), se $V_{fcm} > V_{energia}$ isso implica em $\mu_r < 0$, o que

obviamente é um absurdo. A explicação para esse facto vai além da simples consideração de um erro sistemático do experimento. Isso mostra que não se pode desprezar a resistência do ar no cálculo da Eq. (37). Pelo menos em situações que exigem determinação razoavelmente precisa para a grandeza V_{fcm}.

Do exposto acima se pode estabelecer um critério para o maior valor admissível para a velocidade V_{fcm}. Esse valor é justamente $V_{energia}{}^2 = 10gh/7$. Se o valor obtido para V_{fcm} for tal que $V_{fcm} > V_{energia}$ isso significa que o método para sua determinação é inadequado ou, no mínimo, tem que ser visto com cautela.

Se pode também determinar o coeficiente de atrito estáctico. Da Eq. (25) obtemos que a força de atrito sobre a esfera é dada por

$$F_{at} = \frac{2}{7} Mg \sin\theta + \frac{5}{7} \mu_r Mg \cos\theta \qquad [39]$$

A força de atrito estáctica máxima é dada por

$$F_{est} = \mu_e N = \mu_e Mg \cos\theta \qquad [40]$$

No início do deslizamento podemos igualar as Eqs. (39) e (40) e obtemos

$$\mu_e = \frac{2}{7} \tan\theta + \frac{5}{7} \mu_r \qquad [41]$$

A Eq. (41) explica a discordância entre os valores do coeficiente de atrito estáctico entre a esfera e o plano inclinado, apontada em Silva, et al.

Vemos, então, que é possível, a partir de experimentos de rolamento em plano inclinado, determinar de forma relativamente simples o coeficiente de atrito de rolamento bem como o coeficiente de atrito estáctico, via Eq. (34) e Eq. (41), respectivamente.

CAPÍTULO III: MATERIAL E MÉTODOS

No terceiro capítulo de material e métodos faz-se a descrição sobre o tipo de pesquisa, amostra e métodos de amostragem usados, procedimentos e instrumentos da pesquisa usados na colecta de dados e pôr fim a descrição sobre os métodos de análise de dados usado.

De acordo com Marconi e Lakatos (2011) a metodologia é o estudo dos métodos, ou seja, do conjunto de actividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar o objectivo.

Segundo Bruyne (1991), a metodologia é a lógica dos procedimentos científicos em sua gênese e em seu desenvolvimento, não se reduz, portanto, a uma "metrologia" ou tecnologia da medida dos factos científicos. A metodologia deve ajudar a explicar não apenas os produtos da investigação científica, mas principalmente seu próprio processo, pois suas exigências não são de submissão estrita a procedimentos rígidos, mas antes da fecundidade na produção dos resultados.

A metodologia proposta para o estudo comparativo das velocidades de rolamento de uma esfera de aço com a velocidade do lançamento oblíquo no plano inclinado é fundamentada na abordagem científica experimental. Esta escolha se justifica pela necessidade de realizar experimentos controlados que permitam coletar dados precisos e confiáveis para análise.

3.1. Tipo de pesquisa

A pesquisa foi do tipo experimental, fundamentada por um procedimento bibliográfico, pois envolveu a realização de experimentos controlados para colectar dados quantitativos sobre as velocidades de rolamento da esfera de aço e do lançamento oblíquo no plano inclinado. Envolveu a manipulação de variáveis independentes (velocidade do lançamento oblíquo no plano inclinado) e a medição de variáveis dependentes (velocidade de rolamento da esfera de aço) para estabelecer uma relação causal entre os fenômenos observados.

3.2. Amostra e Método de Amostragem

A amostra consistiu em um conjunto de esferas de aço idênticas, com massa e raio bem definidos. Foi seleccionada aleatoriamente uma esfera de aço e lançamentos oblíquos para realização dos experimentos. A amostragem foi aleatória simples, garantindo que cada esfera tenha a mesma chance de ser seleccionada para o experimento.

Para garantir a confiabilidade estatística dos dados obtidos neste experimento, optou-se por realizar 10 medições para cada um dos 15 ângulos de inclinação do plano. Essa escolha é sustentada por fundamentos da estatística experimental, análise de incertezas em medições físicas e também por critérios de viabilidade prática e didática.

Inicialmente, foi realizado um teste experimental no ângulo de 29,5°, com 10 medições, com o objetivo de avaliar se esse número seria suficiente para fornecer uma estimativa estável da média e do desvio padrão. O desvio padrão obtido foi de aproximadamente 0,0094 s. Aplicando-se a fórmula do erro padrão da média $\frac{s}{\sqrt{n}}$, obteve-se uma incerteza de cerca de 0,003 s, valor da mesma ordem de grandeza da resolução do cronômetro digital utilizado (0,001 s). Isso demonstra que o número de repetições adotado é adequado para capturar a variação dos dados sem exceder a sensibilidade do instrumento.

Conforme enfatiza Taylor (1997), a incerteza associada à média de um conjunto de medições diminui com o aumento do número de repetições. Além disso, segundo o mesmo autor, cerca de 10 repetições são suficientes para uma estimativa confiável da média e do desvio padrão, permitindo a detecção de erros sistemáticos ou aleatórios.

Barbetta (2008) também destaca que o aumento do tamanho da amostra reduz a variabilidade estatística e fortalece a validade dos resultados. Já Baird (1999) sugere que entre 5 e 10 repetições são apropriadas para experimentos em laboratórios didáticos, equilibrando precisão com a limitação de tempo disponível e o engajamento dos alunos.

Portanto, a escolha de 10 medições por ângulo, além de se alinhar com recomendações da literatura, representa um compromisso entre rigor estatístico e praticidade pedagógica. Tal abordagem garante resultados confiáveis dentro das condições reais de realização do experimento, promovendo um ambiente didático eficaz e cientificamente fundamentado.

3.3. Material e método

O material utilizado foi uma canaleta de Madeira, perfil 39,5 x 200,00 cm x 1.6 cm, uma esfera de aço de raio de m=110g, raio R=0,015m, dois sensores fotoelétricos ligados a dois cronômetros digitais um a 1m (um metro) da origem e o no fim da canaleta, “transferidor do professor” para o controle e obtenção dos ângulos, uma mesa plana e suportes comuns de laboratórios.

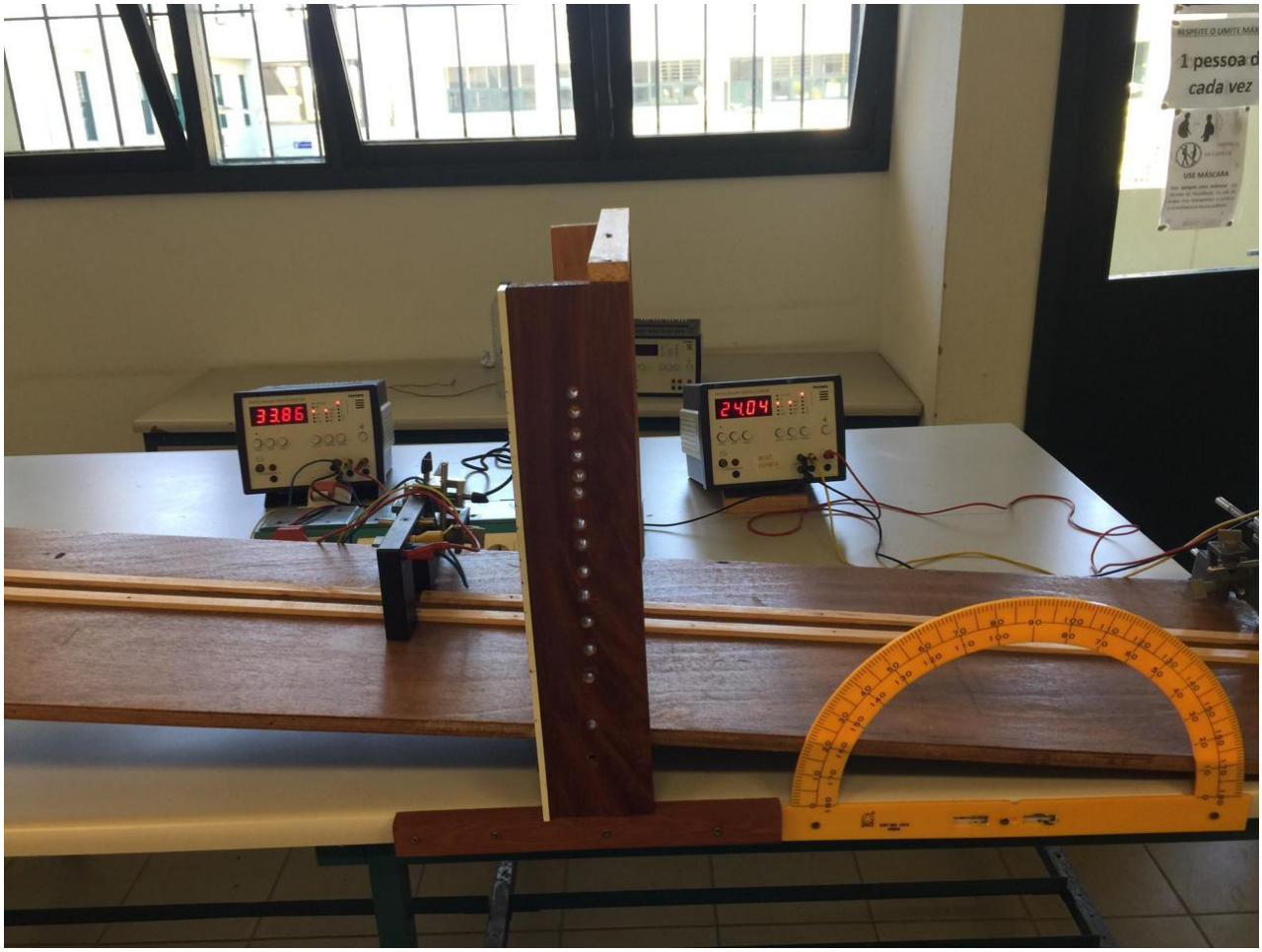
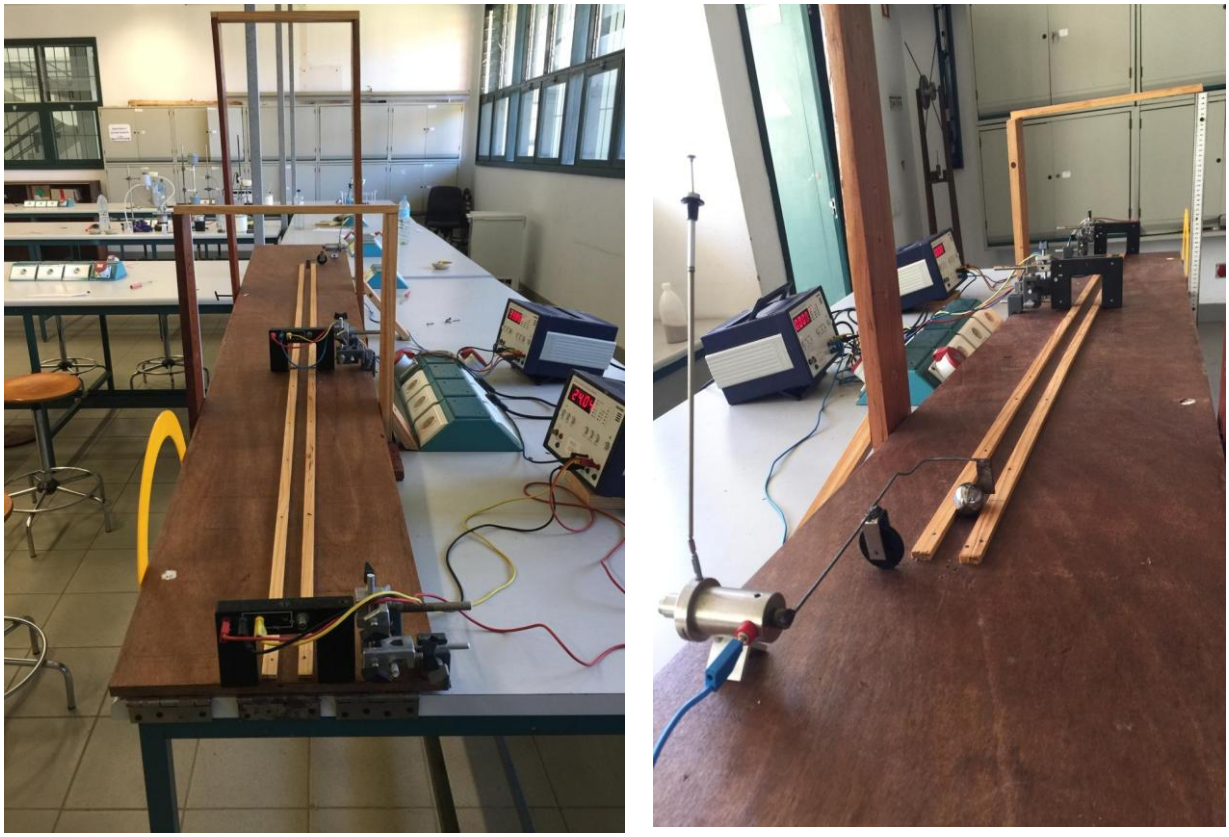


Figura 8: Sensores fotoeléctricos ligados a dois cronômetros digitais no plano inclinado. [Fonte: Adaptado pelo autor]

O plano inclinado foi cuidadosamente preparado, com sua superfície sendo polida para minimizar a influência do atrito durante os lançamentos oblíquos, garantindo assim uma medição mais precisa do tempo. O atrito pode afetar significativamente as velocidades de rolamento e, portanto, sua ausência seria essencial para obter uma medida precisa das velocidades em estudo.



(a) **(b)**

Figura 9: (a) Esquema da montagem do trilho vista frontal (b) Esquema da montagem do trilho vista posterior. [Fonte: Adaptado pelo autor]

O plano inclinado foi projectado com uma altura e um ângulo específicos para cada experimento. Para começar, uma esfera de aço foi colocada no topo do plano inclinado e então liberada para rolar em direção à base do plano. À medida que a esfera rola pela canaleta, sua velocidade aumenta devido à aceleração causada pela gravidade. Ao atingir o final da canaleta do plano inclinado, a esfera sai da borda e entra em movimento no ar, realizando um lançamento oblíquo.

O momento em que a esfera cai do plano inclinado é crucial, pois é quando ela se torna um projétil em trajetória oblíqua. Portanto, para medir os tempos de rolamento e de lançamento, usou-se dois cronômetros digitais conectados a sensores fotoelétricos: um posicionado no meio da canaleta de dois metros e outro no final. Esses sensores permitiram medir com precisão os tempos e a velocidade no lançamento oblíquo, proporcionando dados essenciais para o estudo comparativo entre rolamento e lançamento oblíquo.

Os cronômetros foram acionados no momento exato em que a esfera foi liberada, garantindo que a velocidade inicial fosse igual a zero. Para isso, usou-se um mecanismo de arranque semelhante ao utilizado em trilhos de ar[4]. Esse mecanismo esteve conectado

[4] O objetcivo desta práctica é estudar o movimento retilíneo uniforme e retilíneo uniformemente acelerado utilizando um trilho de ar, que simula uma superfície (quase) livre de atrito. Desta forma podemos determinar a velocidade, no movimento retilíneo uniforme (MRU), e a aceleração, no movimento retilíneo uniformemente acelerado (MRUA).

a um fio de 22 cm, que possui uma barreira de metal na frente para impedir o movimento da esfera. Quando o mecanismo foi acionado, a barreira move-se, liberando a esfera para rolar pelo plano inclinado, e os cronômetros iniciaram a contagem do tempo simultaneamente.

Figura 10: Mecanismo de arranque composto. [Fonte: Adaptado pelo autor]

3.4. Colecta de dados

Os dados colectados são referentes ao tempo de rolamento e o alcance após o lançamento obliquo da esfera de aço. Esses dados foram registrados e organizados para análise posterior.

Primeiramente, foram selecionadas as esferas de aço a serem utilizadas no estudo, certificando-se de que fossem todas iguais em massa e raio, da qual somente uma foi utilizada no experimento. Em seguida, foi montada uma rampa inclinada em um ângulo pré-determinado, com uma superfície adequada para minimizar o atrito. A rampa foi posicionada em um plano horizontal, garantindo que o ângulo de inclinação fosse constante para todas as medições do respectivo ao ângulo.

Para cada esfera selecionada, o experimento foi repetido várias vezes de modo a garantir precisão nos resultados. Cada repetição consistiu nos seguintes passos:

- A esfera foi posicionada no topo da rampa e foi solta para iniciar o rolamento;

- O tempo necessário para a esfera percorrer a rampa e alcançar a base foi cronometrado usando um cronômetro digital acoplado a um sensor fotoelétrico;
- Um recipiente plano contendo areia foi colocado, por baixo da mesa. Para que após o lançamento obliquo, se pudesse registrar na distância ou alcance.

Figura 11: Recipiente plano contendo areia colocado. [Fonte: Adaptado pelo autor]

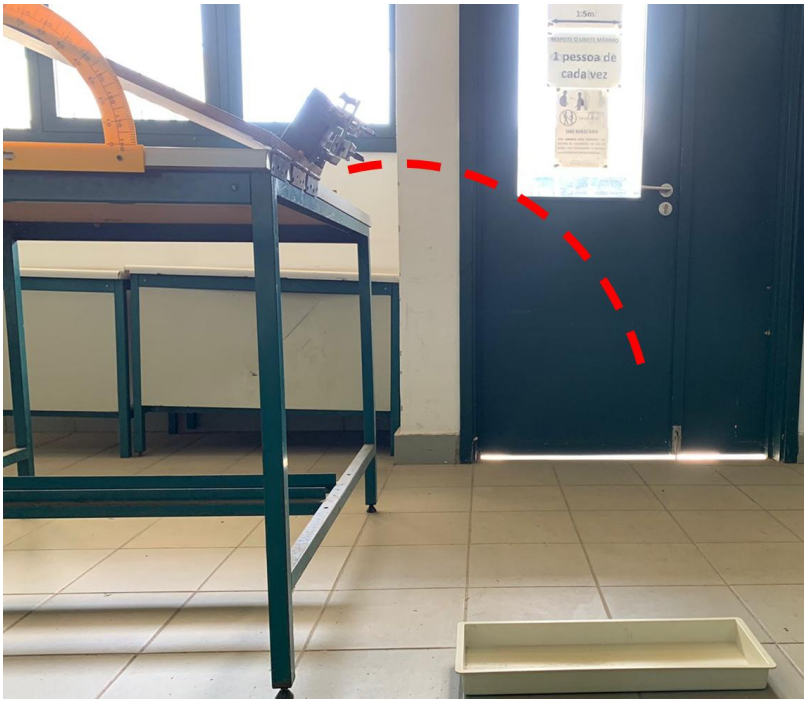


Figura 12: Esquema da estrutura da mesa e o recipiente plano contendo areia colocado . [Fonte: Adaptado pelo autor]

- Os dados colectados, incluindo tempo e distância, foram registrados para cada repetição.

3.5. Métodos de análise de dados

Os dados colectados foram submetidos a análises estatísticas, como cálculos de médias, desvios padrão e testes de significância, para comparar as velocidades de rolamento da esfera de aço com as velocidades do lançamento oblíquo no plano inclinado, usando o programa **IBM SPSS Statistics Base 25**.

3.5.1. IBM SPSS Statistics Base 25

Actualmente muitos programas com base estatística foram desenvolvidos, programas estes que tornaram mais eficientes o tratamento de dados das pesquisas acadêmicas, permitindo um melhor gerenciamento, de ampla quantidade de dados, absorvendo e armazenando e contribuindo com a análise destes dados. Podemos citar como principais ferramentas utilizadas, o Excel, SPSS, o BMDP, Minitab, NCSS, SYSTAT, Statplus, SAS, entre centenas de outras, além ainda de softwares estatísticos com código livre e gratuito, como o caso do R. (Santos, 2018)

O IBM SPSS Statistics Base 25 é uma versão do software de análise estatística desenvolvido pela IBM.

Desde o lançamento pioneiro do SPSS (Statistical Package for the Social Sciences ou Pacote Estatístico para as Ciências Sociais) – em 1968 por Norman Nie, C. Hadlai Hull e Dale H. Bent, diversos programas de computador vêm sendo utilizados por pesquisadores no auxílio à coleta, análise e interpretação dos dados das suas pesquisas (Sant'Anna, 2012 citado em (Santos, 2018)).

O SPSS (Statistical Package for the Social Science) é um pacote estatístico com diferentes módulos, desenvolvido pela IBM para a utilização de profissionais de ciências humanas e exatas. Ferramenta de fácil manuseio e muito abrangente, permite realizar análises estatísticas e gráficas com uma amplitude de dados, mas é muito importante que o pesquisador tenha um conhecimento prévio de estatística descritiva e inferencial para utilização das funcionalidades da ferramenta. O SPSS (Pacote Estatístico para as Ciências Sociais) fornece uma interface amigável para analisar dados, com capacidades para análises estatísticas básicas e avançadas.

O pacote estatístico tem como principais funções, a preparação e validação de dados; árvores de decisão; modelos de regressão; modelos estatísticos avançados; tabelas; tendências; categorias; análise geoespacial e funções de simulação.

No SPSS, pode-se fazer a gestão e acesso de uma ampla quantidade de dados, criar, definir e alterar variáveis, conhecer a quantidade de casos e as variáveis que existem no banco de dados, calcular medidas simples e múltiplas, fazer o cruzamento das variáveis diferentes, construir vários tipos de gráficos e executar diversas análises de variância, regressão, séries temporais entre outros.

O SPSS é um programa estatístico de certo modo autoexplicativo, pois conta com vários auxílios. Escolhendo a opção "estatística" abrem-se inúmeras possibilidades de análises, como tendências (média, mediana, moda, soma), valores percentis (quartil, percentil entre outros), dispersão (desvio padrão, variância, máximo, mínimo), distribuição (assimetria, curtose).

3.5.5. Inferências estatísticas: Estimação e teste de hipóteses

A **estimação** envolve o uso de dados de uma amostra para estimar parâmetros desconhecidos da população. Por exemplo, se estivermos interessados na média de altura de uma população, podemos colectar dados de uma amostra e usar esses dados para fazer uma estimativa da média de altura da população inteira. Intervalos de confiança são frequentemente usados na estimação, fornecendo uma faixa de valores plausíveis para o parâmetro desconhecido com um certo nível de confiança.

O **teste de hipóteses** é uma técnica estatística usada para tomar decisões sobre as características de uma população com base em uma amostra dos dados. Envolve a formulação de uma hipótese nula (H0) e uma hipótese alternativa (H1), e então usando dados amostrais para decidir se há evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula em favor da hipótese alternativa. Isso é feito calculando uma estatística de teste apropriada e comparando-a com um valor crítico ou calculando um valor p para determinar a significância estatística.

Ambos aspectos da inferência estatística são fundamentais para a análise de dados em uma ampla gama de áreas, desde a pesquisa científica até a tomada de decisões em negócios e política.

O teste de significância é uma ferramenta estatística usada para avaliar se uma diferença observada entre dois grupos é estatisticamente significativa ou se pode ter ocorrido simplesmente por acaso. Este teste é comumente usado em diversas áreas, como ciências sociais, medicina, economia e muitas outras.

Passos básicos envolvidos em um teste de significância:

O primeiro passo é estabelecer as hipóteses nula (H0) e alternativa (H1). A hipótese nula geralmente afirma que não há efeito ou diferença entre os grupos, enquanto a hipótese alternativa sugere o oposto. Existem diferentes tipos de testes de significância, dependendo da natureza dos dados e das hipóteses. Alguns dos testes mais comuns incluem o teste t de Student, o teste qui-quadrado, o teste de ANOVA e o teste de Mann-Whitney, entre outros.

Com base nos dados amostrais e na escolha do teste, calcula-se a estatística de teste apropriada. Com a estatística de teste calculada, você pode compará-la com um valor crítico ou calcular um valor p. O valor crítico é um limite predefinido além do qual a diferença é considerada estatisticamente significativa. O valor p, por outro lado, indica a probabilidade de observar uma diferença igual ou mais extrema entre os grupos, assumindo que a hipótese nula seja verdadeira. Um valor p baixo sugere que a diferença observada é estatisticamente significativa.

Com base no valor do valor p (ou na comparação com o valor crítico), você decide se rejeita ou não a hipótese nula. Se o valor p for menor que um nível de significância predefinido (geralmente 0,05), você rejeita a hipótese nula em favor da hipótese alternativa.

É importante notar que um resultado estatisticamente significativo não necessariamente implica que a diferença observada seja importante ou relevante do ponto de vista prático. Levando em consideração o contexto específico e a interpretação dos resultados.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS E DISCUSSÃO

No quarto capítulo, **Resultados e Discussão**, apresentamos os resultados coletados, seguidos por uma análise estatística detalhada. Por fim, realizamos um estudo comparativo das velocidades de rolamento e do lançamento oblíquo, discutindo as implicações dos resultados obtidos.

4.1 Resultados

4.1.1 Apresentação dos dados obtidos nos experimentos

Nesta secção se apresentam os dados referentes à medição das variáveis seleccionadas para o cálculo das velocidades, visando um estudo comparativo, são apresentados abaixo. Permaneceram constantes, independentemente do ângulo escolhido, a altura "H" da mesa plana para mensurar o alcance do lançamento oblíquo, com valor de 91,8 cm (0,918 m), a massa da esfera de aço de m=110g (0,110 Kg), o raio R=0,015, e o trilho ou canaleta de plástico com comprimento L = 2,000 m. Entre as variáveis que não permaneceram constantes, destacam-se o tempo (t- em segundos) de rolamento da esfera sobre o plano inclinado e o alcance (X- em metros) do lançamento oblíquo, ambos sujeitos a dez (10) medições por ângulo, totalizando 15 ângulos e 150 medições para essas duas variáveis.

Tabela 3: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor]

Ângulos (Θ)		t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	6	2,407	3,221	0,596	0,199	0,918
2	6	2,190	3,031	0,566	0,199	0,918
3	6	2,138	2,966	0,560	0,199	0,918
4	6	2,239	3,063	0,593	0,199	0,918
5	6	2,159	2,984	0,585	0,199	0,918
6	6	2,268	2,095	0,596	0,199	0,918
7	6	2,118	2,944	0,596	0,199	0,918
8	6	2,158	2,981	0,596	0,199	0,918
9	6	2,106	2,937	0,583	0,199	0,918
10	6	2,258	3,106	0,573	0,199	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 4: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 8º [Fonte: Adaptado pelo autor]

Ângulos (Θ)		t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	8	1,651	2,299	0,730	0,292	0,918
2	8	1,156	2,324	0,695	0,292	0,918
3	8	1,674	2,334	0,708	0,292	0,918
4	8	1,645	2,287	0,719	0,292	0,918
5	8	1,779	2,428	0,724	0,292	0,918
6	8	1,594	2,237	0,722	0,292	0,918
7	8	1,752	2,399	0,733	0,292	0,918
8	8	1,660	2,312	0,701	0,292	0,918

9	8	1,619	2,278	0,704	0,292	0,918
10	8	1,633	2,292	0,676	0,292	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 5: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 11º [Fonte: Adaptado pelo autor]

Ângulos (Θ)		t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	11	1,370	1,904	0,848	0,401	0,918
2	11	1,340	1,872	0,849	0,401	0,918
3	11	1,322	1,855	0,856	0,401	0,918
4	11	1,335	1,877	0,851	0,401	0,918
5	11	1,336	1,861	0,829	0,401	0,918
6	11	1,334	1,873	0,803	0,401	0,918
7	11	1,384	1,924	0,833	0,401	0,918
8	11	1,385	1,924	0,845	0,401	0,918
9	11	1,306	1,845	0,830	0,401	0,918
10	11	1,354	1,901	0,834	0,401	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 6: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 13º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	13	1,255	1,750	0,845	0,467	0,918
2	13	1,213	1,701	0,879	0,467	0,918
3	13	1,247	1,736	0,878	0,467	0,918
4	13	1,264	1,753	0,877	0,467	0,918
5	13	1,262	1,746	0,907	0,467	0,918
6	13	1,282	1,773	0,867	0,467	0,918
7	13	1,336	1,828	0,878	0,467	0,918
8	13	1,358	1,847	0,884	0,467	0,918
9	13	1,249	1,735	0,881	0,467	0,918
10	13	1,232	1,723	0,872	0,467	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 7: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 15º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	15	1,133	1,589	0,909	0,534	0,918
2	15	0,924	1,380	0,919	0,534	0,918
3	15	1,136	1,602	0,895	0,534	0,918
4	15	1,120	1,576	0,933	0,534	0,918
5	15	1,117	1,563	0,952	0,534	0,918

6	15	1,132	1,593	0,910	0,534	0,918
7	15	1,139	1,594	0,937	0,534	0,918
8	15	1,169	1,622	0,902	0,534	0,918
9	15	1,164	1,619	0,909	0,534	0,918
10	15	1,220	1,671	0,911	0,534	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 8: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 17,5º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	17,5	1,041	1,484	0,912	0,593	0,918
2	17,5	1,059	1,506	0,948	0,593	0,918
3	17,5	1,092	1,537	0,927	0,593	0,918
4	17,5	1,059	1,498	0,936	0,593	0,918
5	17,5	1,079	1,530	0,934	0,593	0,918
6	17,5	1,084	1,531	0,925	0,593	0,918
7	17,5	1,028	1,472	0,943	0,593	0,918
8	17,5	1,059	1,509	0,924	0,593	0,918
9	17,5	1,057	1,498	0,943	0,593	0,918
10	17,5	1,052	1,501	0,919	0,593	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 9: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de19º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	19	0,995	1,427	0,937	0,635	0,918
2	19	1,047	1,481	0,942	0,635	0,918
3	19	1,112	1,542	0,944	0,635	0,918
4	19	1,028	1,457	0,945	0,635	0,918
5	19	1,006	1,439	0,932	0,635	0,918
6	19	1,015	1,445	0,930	0,635	0,918
7	19	1,005	1,431	0,950	0,635	0,918
8	19	1,010	1,441	0,944	0,635	0,918
9	19	1,015	1,441	0,949	0,635	0,918
10	19	1,012	1,439	0,950	0,635	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 10: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 21,5º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	21,5	,9957	1,368	0,940	0,694	0,918
2	21,5	,9614	1,370	0,941	0,694	0,918
3	21,5	,9657	1,375	0,949	0,694	0,918
4	21,5	,9675	1,385	0,956	0,694	0,918
5	21,5	,9628	1,360	0,970	0,694	0,918
6	21,5	,9631	1,363	0,951	0,694	0,918
7	21,5	,9603	1,365	0,961	0,694	0,918
8	21,5	,9673	1,372	0,949	0,694	0,918
9	21,5	,9673	1,363	0,949	0,694	0,918
10	21,5	,9602	1,366	0,983	0,694	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 11: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 23,5º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t1(s)		t2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	23,5	,9365		1,29800	,948	,730	,918
2	23,5	,9316		1,25630	,949	,730	,918
3	23,5	,9352		1,28760	,956	,730	,918
4	23,5	,9274		1,24560	,951	,730	,918
5	23,5	,9296		1,25468	,929	,730	,918
6	23,5	,9447		1,22580	,879	,730	,918
7	23,5	,9353		1,36500	,898	,730	,918
8	23,5	,9301		1,30250	,845	,730	,918
9	23,5	,9540		1,28460	,904	,730	,918
10	23,5	,9325		1,26480	,984	,730	,918
Total N	10	10		10	10	10	10

Tabela 12: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 26º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	26	,8970	1,283	0,946	0,785	0,918
2	26	,8967	1,276	0,965	0,785	0,918
3	26	,8926	1,272	0,950	0,785	0,918
4	26	,8940	1,273	0,949	0,785	0,918
5	26	,8588	1,261	0,944	0,785	0,918
6	26	,9041	1,286	0,934	0,785	0,918
7	26	,8877	1,267	0,981	0,785	0,918
8	26	,9001	1,283	0,950	0,785	0,918
9	26	,9182	1,291	0,993	0,785	0,918

10	26	,8984	1,287	0,951	0,785	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 13: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 27,5º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	27,5	,8857	1,259	0,999	0,809	0,918
2	27,5	,8912	1,269	0,953	0,809	0,918
3	27,5	,8854	1,263	0,955	0,809	0,918
4	27,5	,8836	1,223	0,954	0,809	0,918
5	27,5	,8842	1,257	0,920	0,809	0,918
6	27,5	,8892	1,262	0,980	0,809	0,918
7	27,5	,8841	1,252	0,961	0,809	0,918
8	27,5	,8871	1,262	0,943	0,809	0,918
9	27,5	,8749	1,248	0,946	0,809	0,918
10	27,5	,8848	1,263	0,945	0,809	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 14: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 29,5º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	29,5	0,8815	1,236	0,959	0,844	0,918
2	29,5	0,8763	1,229	0,931	0,844	0,918
3	29,5	0,8693	1,225	0,940	0,844	0,918
4	29,5	0,8987	1,254	0,949	0,844	0,918
5	29,5	0,8922	1,248	0,940	0,844	0,918
6	29,5	0,8768	1,229	0,925	0,844	0,918
7	29,5	0,8806	1,227	0,944	0,844	0,918
8	29,5	0,8731	1,228	0,945	0,844	0,918
9	29,5	0,8772	1,233	0,938	0,844	0,918
10	29,5	0,8867	1,242	0,953	0,844	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 15: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 32º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	32	0,8507	1,196	0,956	0,885	0,918
2	32	0,8659	1,213	0,957	0,885	0,918
3	32	0,8394	1,182	0,947	0,885	0,918
4	32	0,8542	1,197	0,948	0,885	0,918
5	32	0,8545	1,203	0,943	0,885	0,918
6	32	0,8573	1,196	0,951	0,885	0,918

7	32	0,8458	1,192	0,936	0,885	0,918
8	32	0,8423	1,183	0,971	0,885	0,918
9	32	0,8485	1,191	0,940	0,885	0,918
10	32	0,8612	1,203	0,960	0,885	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 16: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 34º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	34	0,8362	1,175	0,944	0,912	0,918
2	34	0,8320	1,176	0,901	0,912	0,918
3	34	0,8315	1,169	0,944	0,912	0,918
4	34	0,8391	1,179	0,937	0,912	0,918
5	34	0,8501	1,187	0,939	0,912	0,918
6	34	0,8360	1,171	0,948	0,912	0,918
7	34	0,8382	1,177	0,925	0,912	0,918
8	34	0,8262	1,164	0,950	0,912	0,918
9	34	0,8254	1,162	0,971	0,912	0,918
10	34	0,8383	1,179	0,928	0,912	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

Tabela 17: Dados obtidos experimentalmente para o ângulo de 36º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	36	0,8213	1,159	0,925	0,941	0,918
2	36	0,8295	1,163	0,952	0,941	0,918
3	36	0,8395	1,172	0,935	0,941	0,918
4	36	0,8455	1,182	0,917	0,941	0,918
5	36	0,8300	1,163	0,926	0,941	0,918
6	36	0,8304	1,166	0,917	0,941	0,918
7	36	0,8353	1,170	0,929	0,941	0,918
8	36	0,8344	1,166	0,935	0,941	0,918
9	36	0,8298	1,163	0,939	0,941	0,918
10	36	0,8354	1,170	0,914	0,941	0,918
Total N	10	10	10	10	10	10

4.2 Análise estatística dos resultados

4.2.1 Estatística Descritiva

A estatística descritiva, tem como objectivo sintetizar uma série de valores de mesma natureza, permitindo dessa forma que se tenha uma visão global da variação desses valores, é uma parte fundamental da estatística que lida com a organização, resumo e

apresentação de dados. Ao invés de fazer inferências ou previsões, ela se concentra em descrever os dados que temos, organiza e descreve os dados de três maneiras: por meio de tabelas, de gráficos e de medidas descritivas.

4.2.2 Gráficos P-P

O gráfico Probability-Probability (P-P) é uma ferramenta gráfica utilizada para comparar a distribuição cumulativa empírica de um conjunto de dados com uma distribuição cumulativa teórica (ou de referência), geralmente a distribuição normal. é útil para avaliar o ajuste de dados obtidos a uma distribuição teórica desejada. Ele ajuda a determinar se os dados observados se desviam sistematicamente da distribuição teórica.

4.2.3 Gráficos Q-Q

O gráfico Q-Q (Quantile-Quantile) é uma ferramenta visual usada para avaliar se uma determinada amostra de dados segue uma distribuição teórica específica, como a distribuição normal. Ele compara os quantis empíricos (observados) dos dados observados com os quantis teóricos que se esperaria de uma distribuição específica. Um uso comum do gráfico Q-Q é verificar se os dados estão aproximadamente normalmente distribuídos. Se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.

4.2.4 Teste de significação

A **estatística inferencial** compreende as técnicas por meio das quais são tomadas decisões sobre uma população estatística, decisões estas baseadas unicamente na observação de uma amostra probabilística ou na elaboração de um juízo. Devido ao fato de que tais decisões são tomadas em condições de incerteza, requer-se, na estatística inferencial, o uso de conceitos de probabilidade. Enquanto as características de uma amostra se denominam estatísticas da amostra, as medidas características de uma população, estatística, ou universo, denominam-se parâmetros da população (Kazmier, 1982).

O ato de generalizar resultados da parte (amostra) para o todo (população) é conhecido como inferência estatística. A estimação de parâmetros é uma forma de inferência estatística. No entanto, outra forma de inferência estatística surge quando há alguma hipótese sobre a população em estudo. E, se pretendemos verificar a sua validade a partir de uma amostra, são chamados de testes de hipóteses.

Entende-se por hipótese uma afirmação ou conjectura sobre um parâmetro, ou parâmetros, de uma população; pode também se referir ao tipo, ou natureza, da população. (Freund e Simon, 2000, p. 211). Uma hipótese pode ser vista como uma proposição testável, a fim de tornar-se uma solução para determinado problema de pesquisa (Gil, 1996). Corroborando, a hipótese é uma proposição afirmativa, de natureza tentativa e conjectural.

Em geral, formulada para testes empíricos, mas também como declarações para variáveis de casos (Cooper e Schindler, 2003). Segundo esses autores, o sentido da hipótese é atribuir ao caso uma variável ou característica de análise.

4.2.5 Nível de significância α

É o limite que se toma como base para afirmar que um certo desvio é decorrente do acaso ou não, também pode se entender como o limiar de confiança que informa se vamos aceitar ou rejeitar a hipótese nula.

- Deve ser previamente definido, sendo usualmente usado 0,05 (95% de certeza de que de fato existe uma diferença significativa) e 0,01 (90%)
- A partir de um nível de significância convencionado (α) os desvios são devidos à lei do acaso e o resultado é considerado não significativo.

4.3 Analise estatística para o ângulo de 6º.

4.3.1 Estatística Descritiva

Tabela 18: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 6º. [Fonte: Adaptado pelo autor]

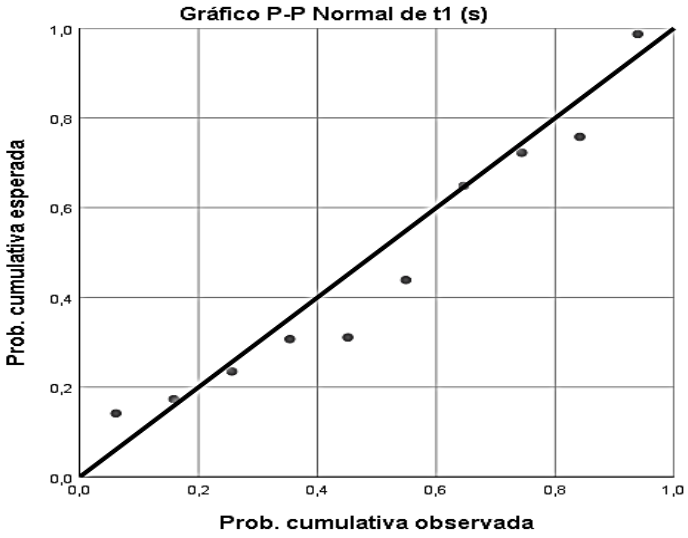
	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1 (s)	10	2,106	2,407	2,20410	0,091372	0,028894
t_2 (s)	10	2,095	3,221	2,93280	0,306911	0,097054
X(m)	10	0,560	0,596	0,58440	0,013656	0,004318
N válido (de lista)	10					

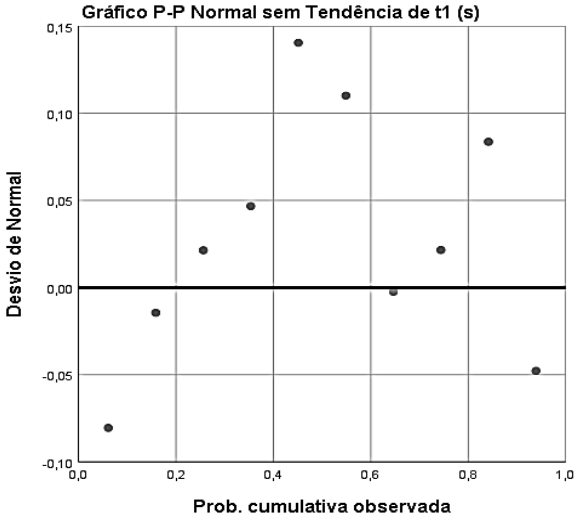
Tabela 19: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
1	6	2,20410	2,93280	0,58440	0,199	0,918

Tabela 20: Gráficos p-p (O gráfico Probability-Probability) - Distribuição normal para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor]

		t_1 (s)	t_2 (s)	X(m)
Distribuição normal	Localização	2,20410	2,93280	0,58440
	Escala	0,091372	0,306911	0,013656

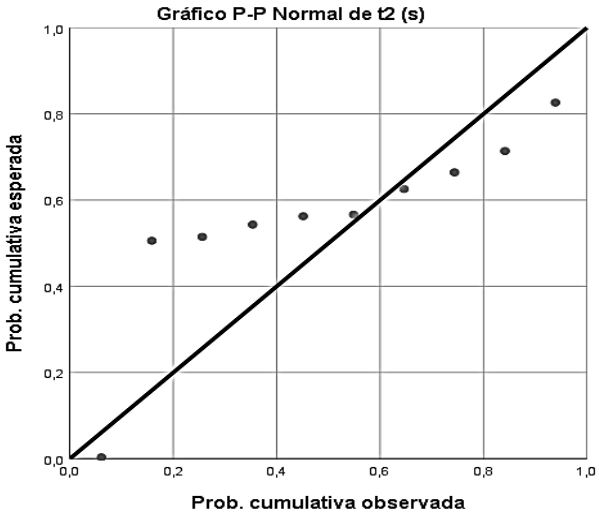


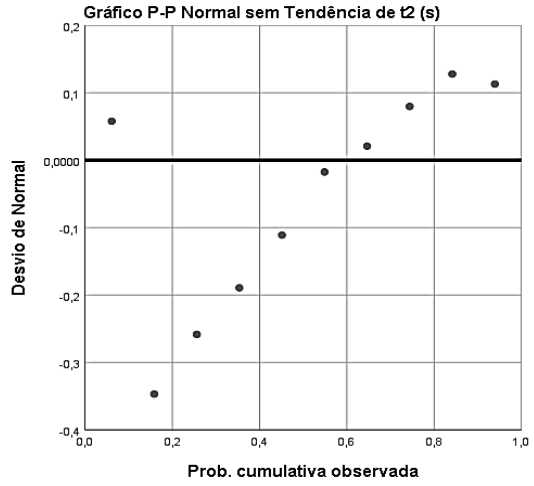


(1) **(2)**

Figura 13: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 6º

(1) A diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. (2) probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).

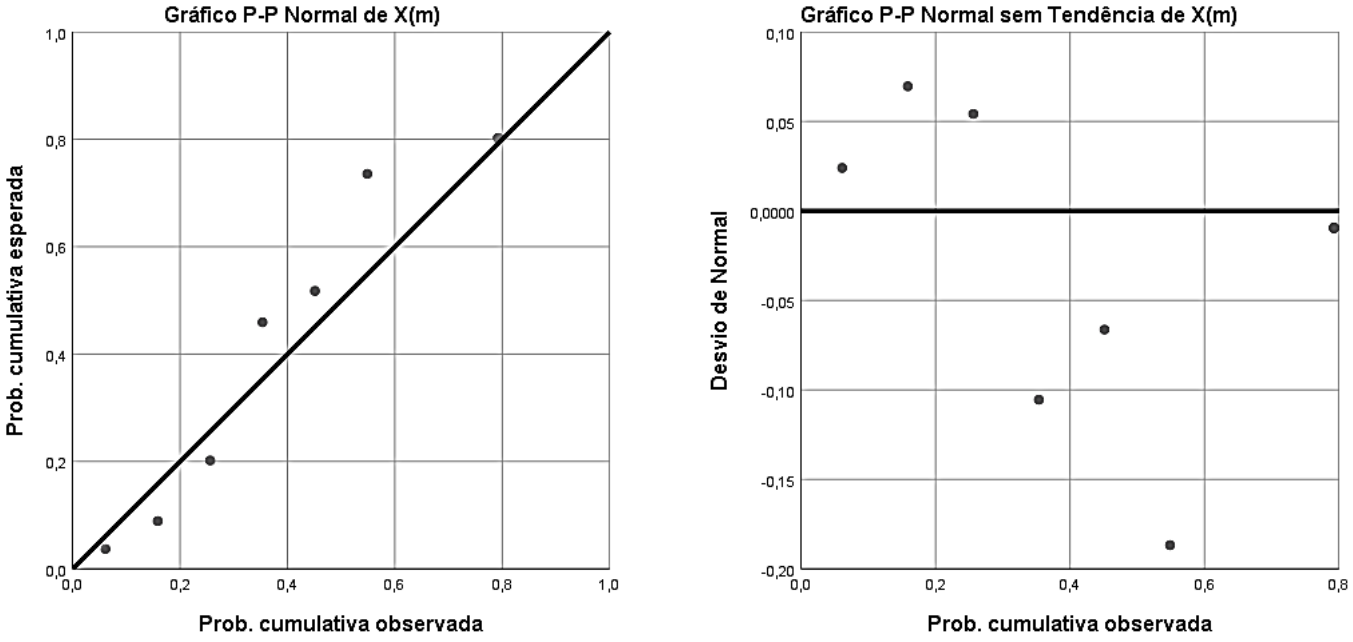




(1) **(2)**

Figura 14: Gráfico Normal para o tempo 2, ângulo de 6º

(1) A diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. (2) probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).



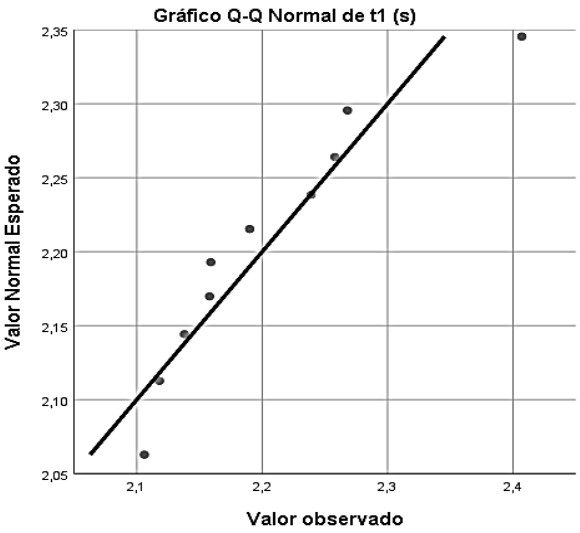
(1) **(2)**

Figura 15: Gráfico Normal para o alcance (X), ângulo de 6º

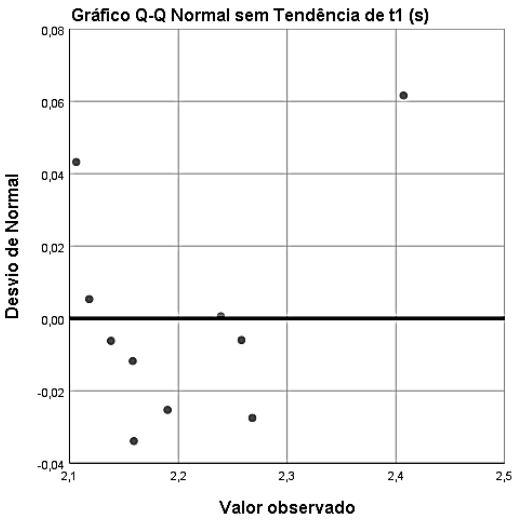
(1) a diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. (2) probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).

Tabela 21: Gráfico Q-Q - Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 6º [Fonte: Adaptado pelo autor]

		t_1 (s)	t_2 (s)	X(m)
Distribuição normal	Localização	2,20410	2,93280	0,58440
	Escala	0,091372	0,306911	0,013656



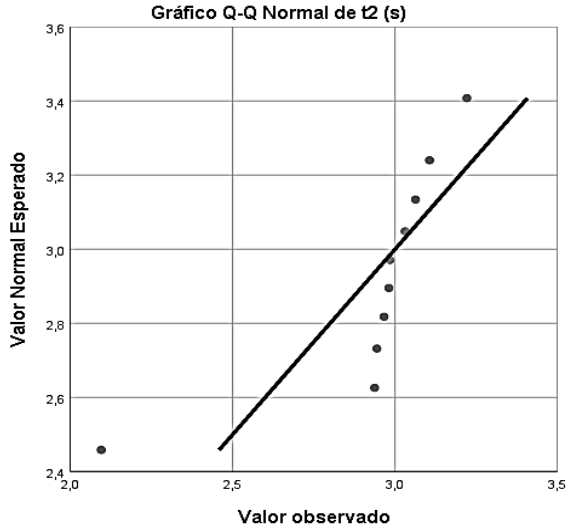
(1)



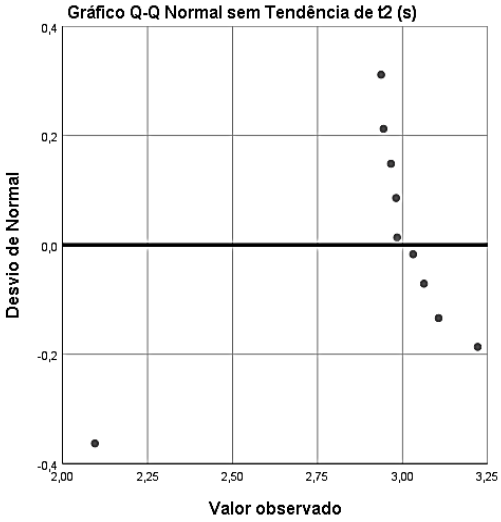
(2)

Figura 16: Gráfico Normal do valor observado para t1, ângulo de 6º

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência)



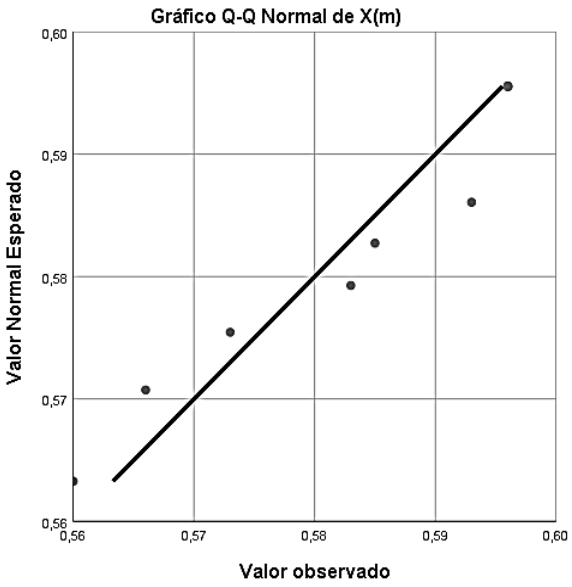
(1)



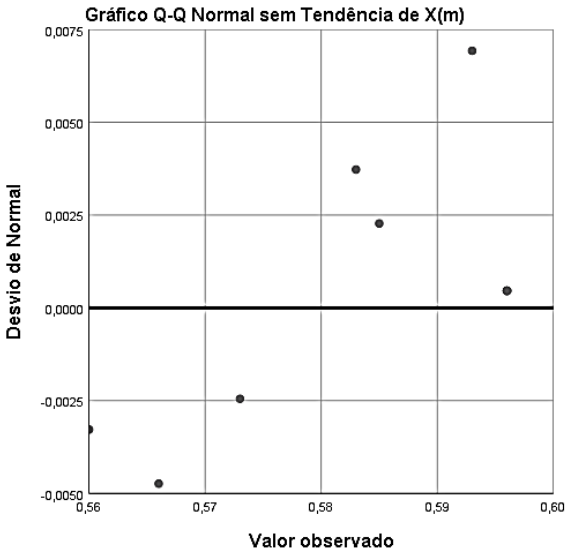
(2)

Figura 17: Gráfico Normal do valor observado para t2, ângulo de 6º

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).



(1)



(2)

Figura 18: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 6º

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal. **(2)** gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).

4.3.2 Analise estatística para o ângulo de 8º.

Tabela 22: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 8º. [Fonte: Adaptado pelo autor]

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	1,156	1,779	1,61630	0,171533	0,054243
t_2 (s)	10	2,237	2,428	2,31900	0,056900	0,017993
X(m)	10	0,676	0,733	0,71120	0,017756	0,005615
N válido (de lista)	10					

4.3.2.1 Resumo de caso

Tabela 23: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 8º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
2	8	1,61630	2,31900	0,71120	0,292	0,918

4.3.3 Análise estatística para o ângulo de 11º.

Tabela 24: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 11º.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	1,306	1,385	1,34660	0,026201	0,008285

t_2 (s)	10	1,845	1,924	1,88360	0,028072	0,008877
X(m)	10	0,803	0,856	0,83780	0,015541	0,004914
N válido (de lista)	10					

4.3.3.1 Resumo de caso

Tabela 25: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 11º [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
3	11	1,34660	1,88360	0,83780	0,401	0,918

4.3.4 Analise estatística para o ângulo de 13º.

Tabela 26: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 13º. [Fonte: Adaptado pelo autor]

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	1,213	1,358	1,26980	0,045008	0,014233
t_2 (s)	10	1,701	1,847	1,75920	0,045645	0,014434
X(m)	10	0,845	0,907	0,87680	0,015346	0,004853
N válido (de lista)	10					

4.3.4.1 Resumo de caso

Tabela 27: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 13º. [Fonte: Adaptado pelo autor]

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
4	13	1,26980	1,75920	0,87680	0,467	0,918

4.3.5 Análise estatística para o ângulo de 15º.

4.3.5.1 Estatística Descritiva

Tabela 28: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 15º. [Fonte: Adaptado pelo autor]

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	0,924	1,220	1,12540	0,077028	0,024359
t_2 (s)	10	1,380	1,671	1,58090	0,076589	0,024220
X(m)	10	0,895	0,952	0,91770	0,017645	0,005580
N válido (de lista)	10					

4.3.5.2 Resumo de caso

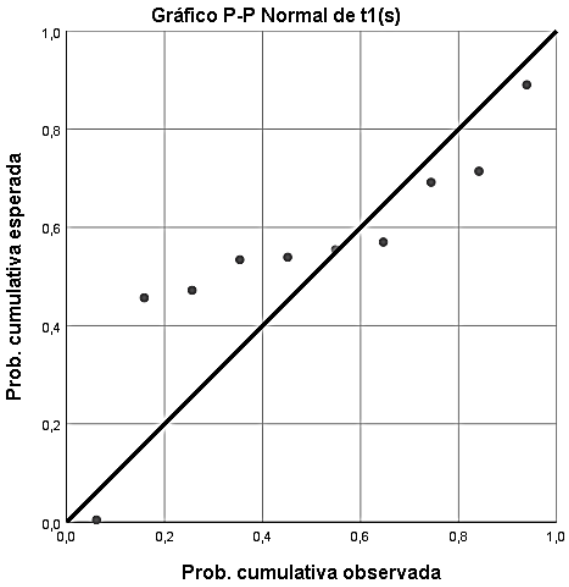
Tabela 29: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 15º

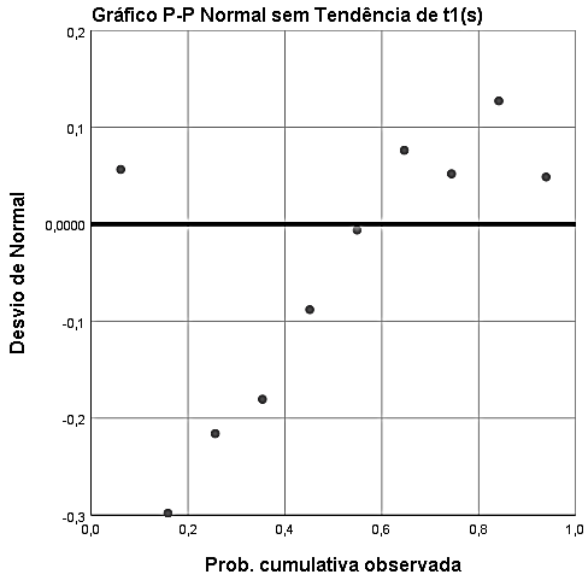
	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
5	15	1,12540	1,58090	0,91770	0,534	0,918

4.3.5.3 Gráficos p-p (O gráfico Probability-Probability)

Tabela 30: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 15º.

		t_1(s)	t_2 (s)	X(m)
Distribuição normal	Localização	1,12540	1,58090	,91770
	Escala	,077028	,076589	,017645

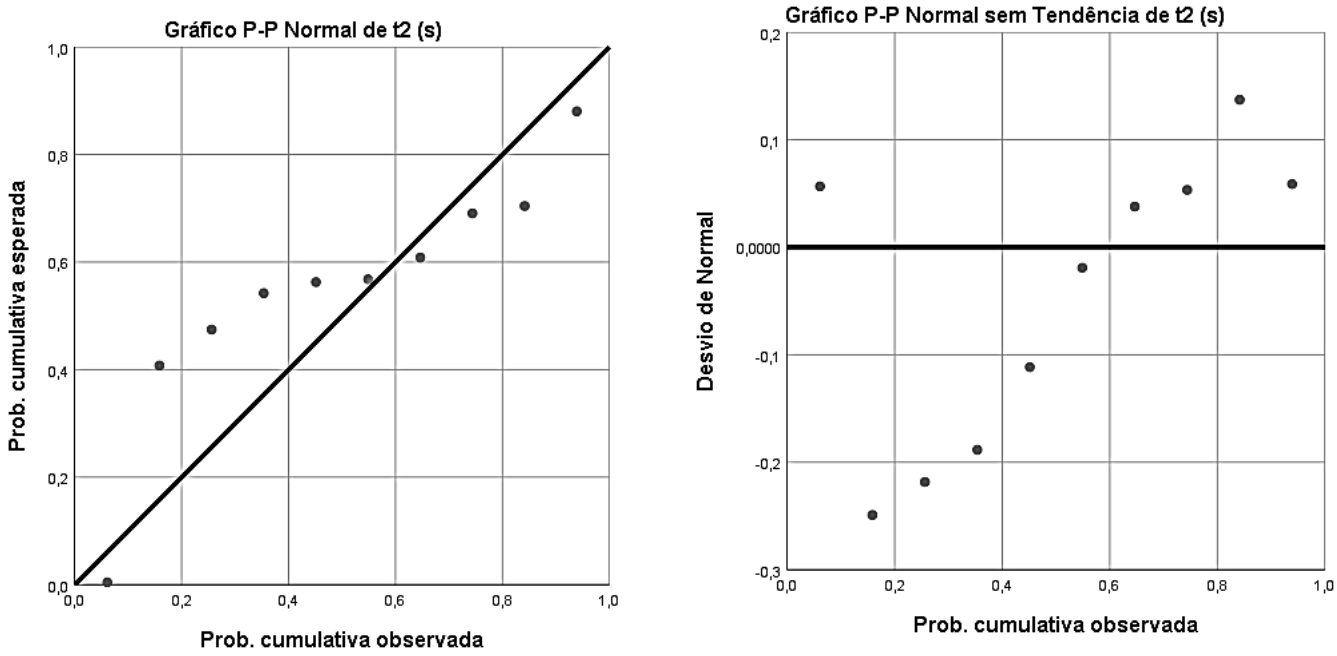




(1) **(2)**

Figura 19: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 15º

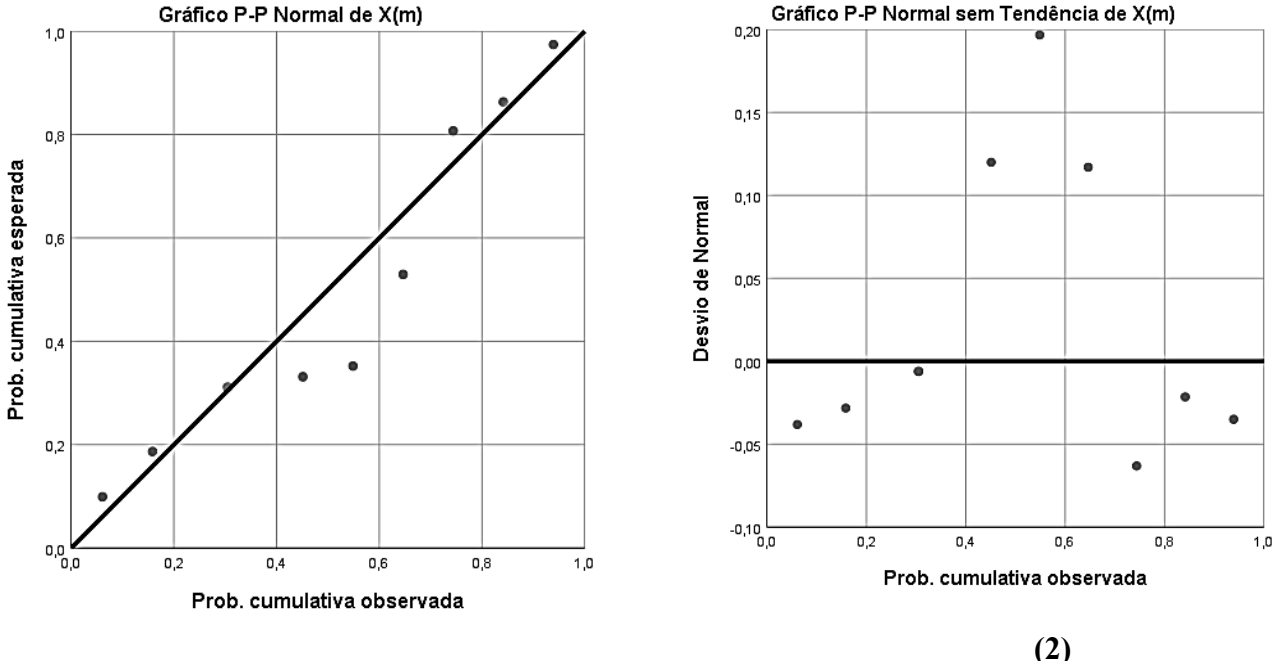
(1) a diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. (2) probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).



(1) **(2)**

Figura 20: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 15º

(1) a diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. (2) probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).



(1) **(2)**

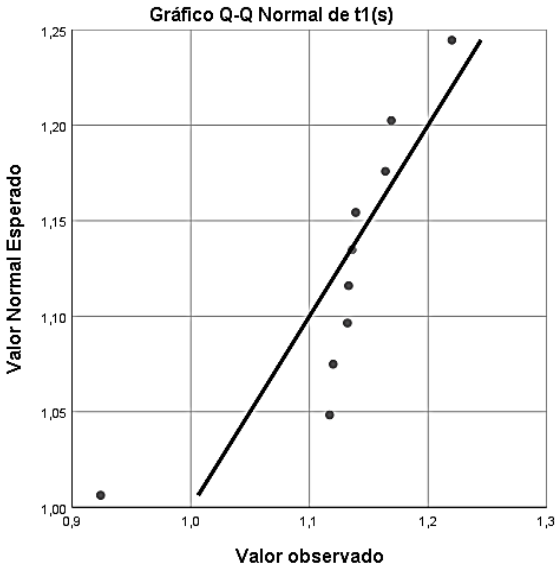
Figura 21: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 15º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).

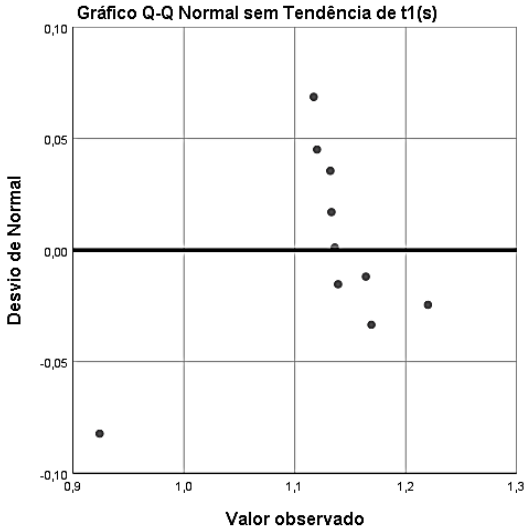
4.3.5.4 Grafico Q-Q (Quantile-Quantile)

Tabela 31: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 15º.

		t_1(s)	t_2 (s)	X(m)
Distribuição normal	Localização	1,12540	1,58090	0,91770
	Escala	0,077028	0,076589	0,017645



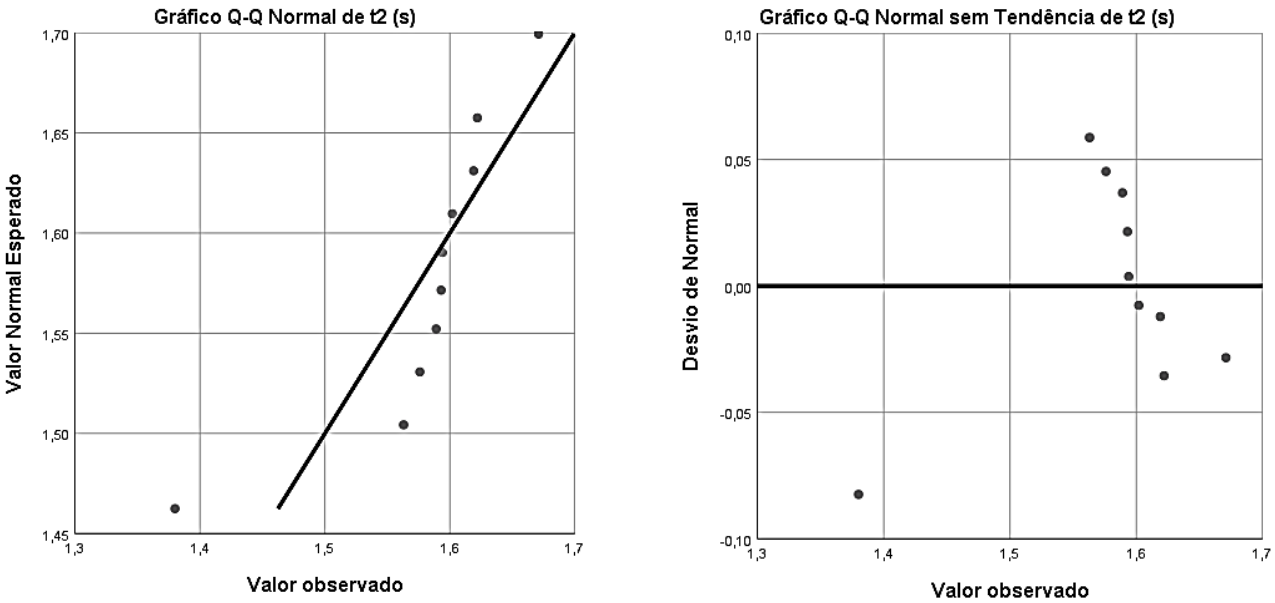
(1)



(2)

Figura 22: Gráfico Normal do valor observado para t_1, ângulo de 15º.

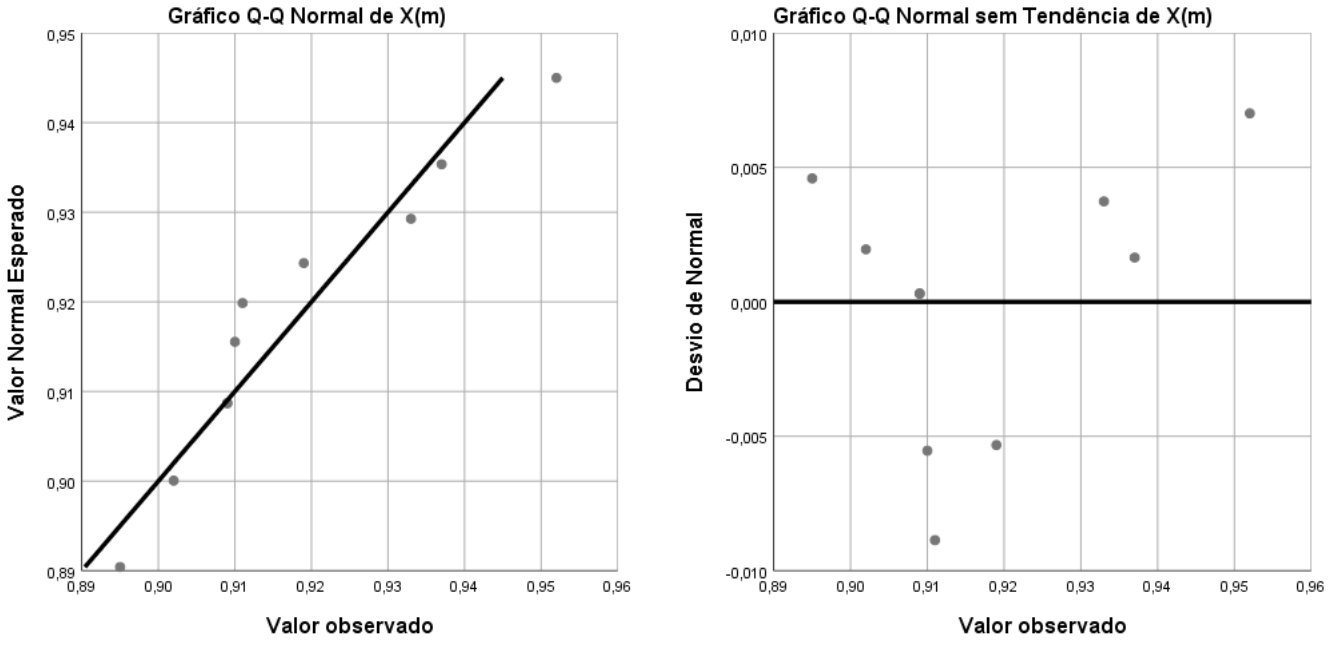
(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).



(1) **(2)**

Figura 23: Gráfico Normal do valor observado para t2, ângulo de 15º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).



(1) **(2)**

Figura 24: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 15º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).

4.3.6 Analise estatística para o ângulo de 17, 5º.

Tabela 32: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 17.5º.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	1,028	1,092	1,06100	0,019471	0,006157
t_2 (s)	10	1,472	1,537	1,50660	0,020977	0,006634
X(m)	10	0,912	0,948	0,93110	0,011628	0,003677
N válido (de lista)	10					

4.3.6.1 Resumo de caso

Tabela 33: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 17,5º

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
6	17,5	1,06100	1,50660	0,93110	0,593	0,918

4.3.7 Análise estatística para o ângulo de 19º.

Tabela 34: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 19º.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	0,995	1,112	1,02450	0,033853	0,010705
t_2 (s)	10	1,427	1,542	1,45430	0,034332	0,010857
X(m)	10	0,930	0,950	0,94230	0,007166	0,002266
N válido (de lista)	10					

4.3.7.1 Resumo de caso

Tabela 35: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 19º

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
7	19	1,02450	1,45430	0,94230	0,635	0,918

4.3.8 Análise estatística para o ângulo de 21, 5º.

Tabela 36: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 21, 5º.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	0,9602	0,9957	0,967130	0,0104402	0,0033015
t_2 (s)	10	1,360	1,385	1,36870	0,007304	0,002310
X(m)	10	0,940	0,983	0,95490	0,013295	0,004204
N válido (de lista)	10					

4.3.8.1 Resumo de caso

Tabela 37: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 21,5º

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
8	6	0,967130	1,36870	0,95490	0,694	0,918

4.3.9 Análise estatística para o ângulo de 23, 5º.

Tabela 38: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 23, 5º

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t1(s)	10	,9274	,9540	0,935690	,0080378	,0025418
t2 (s)	10	1,22580	1,36500	1,278488	,03896742	,01232258
X(m)	10	,845	,984	,92430	,042058	,013300
N válido (de lista)	10					

4.3.9.1 Resumo de caso

Tabela 39: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 23,5º

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
9	23,5	0,935690	1,278488	0,92430	0,730	0,918

4.3.10 Análise estatística para o ângulo de 26º.

Tabela 40: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 26º

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	0,8588	0,9182	0,894760	0,0150386	0,0047556
t_2 (s)	10	1,261	1,291	1,27790	0,009655	0,003053
X(m)	10	0,934	0,993	0,95630	0,018099	0,005723
N válido (de lista)	10					

4.3.10.1 Resumo de caso

Tabela 41: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 26º

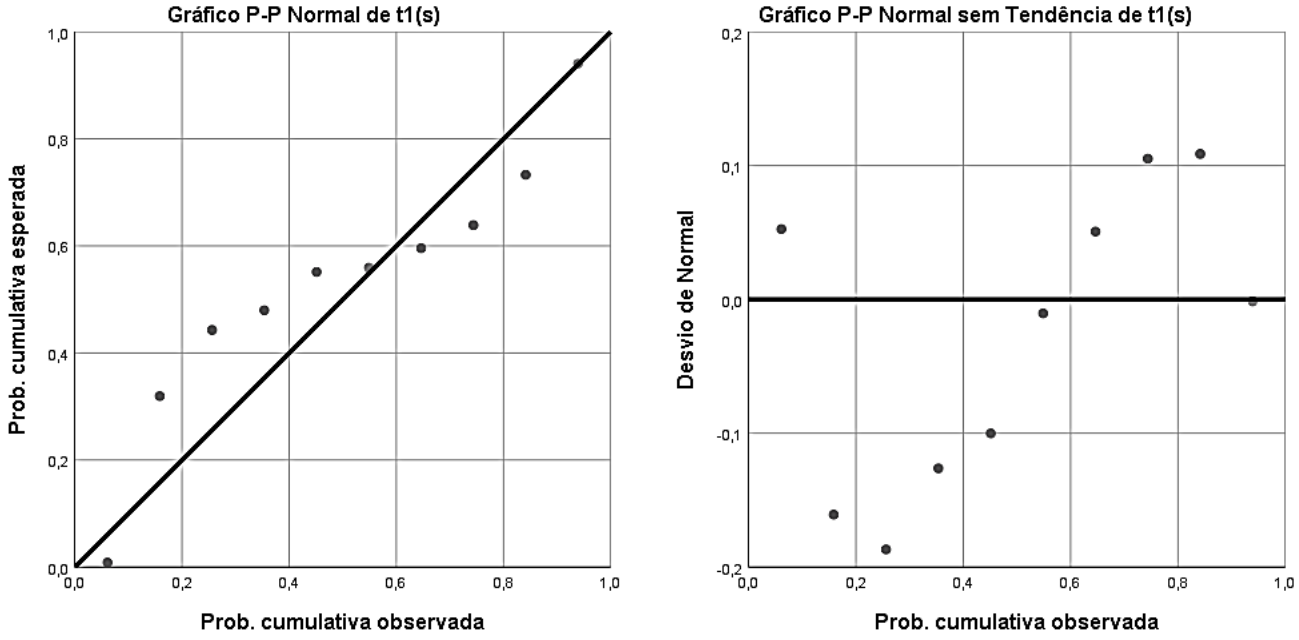
	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
10	26	0,894760	1,27790	0,95630	0,785	0,918

4.3.10.2 Gráfico p-p

Tabela 42: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 26º

	t1(s)	t2 (s)	X(m)

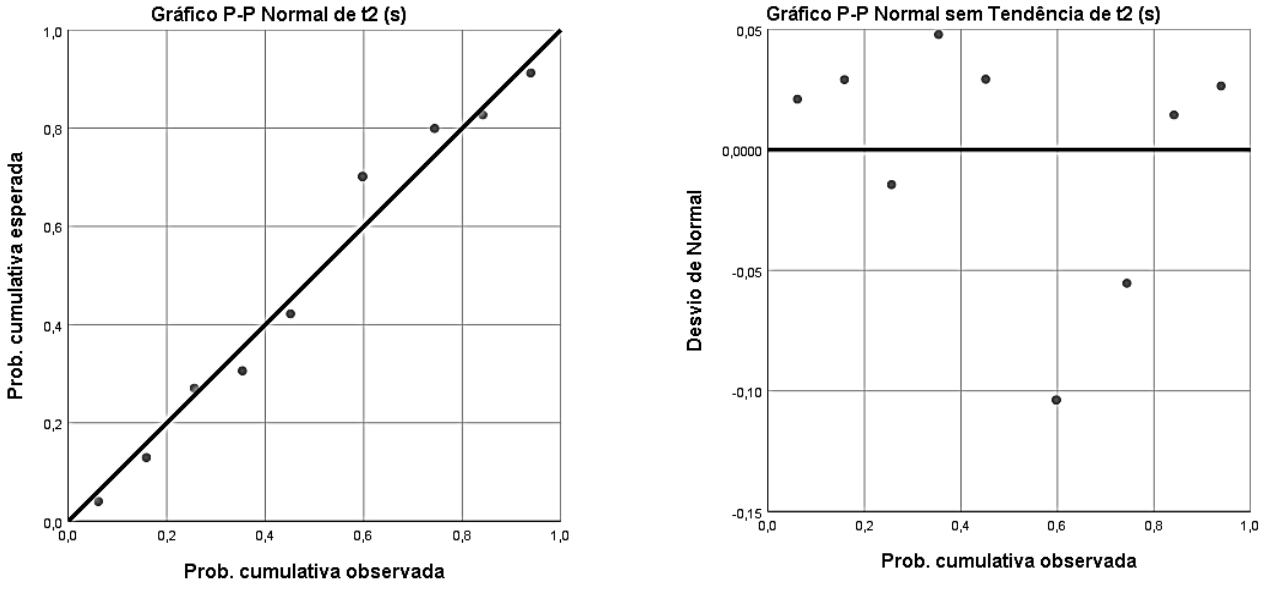
Distribuição normal	Localização	,894760	1,277900	,956300
	Escala	,0150386	,0096546	,0180988



(1) **(2)**

Figura 25: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 26º.

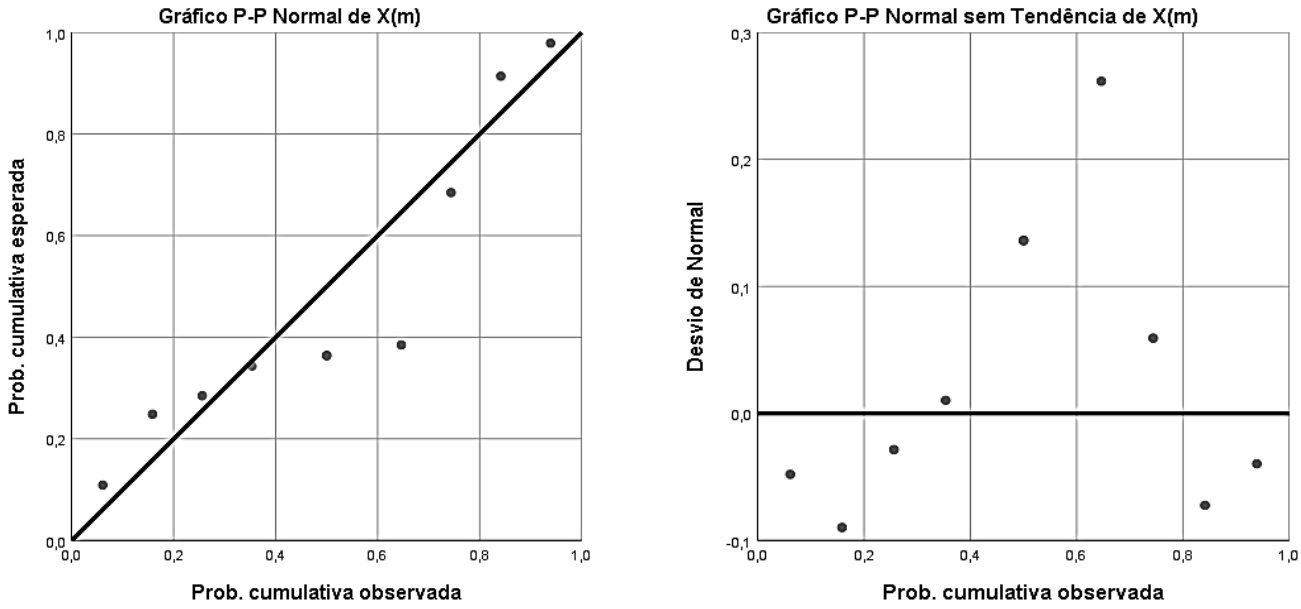
(1) a diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. (2) probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência)



(1) **(2)**

Figura 26: Gráfico Normal para o tempo 2, ângulo de 26º.

(1) a diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. **(2)** probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).



(1) **(2)**

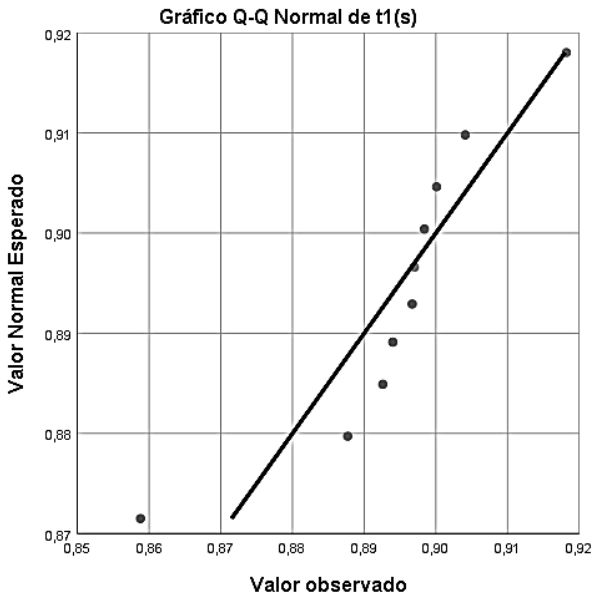
Figura 27: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 26º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal. (2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência)

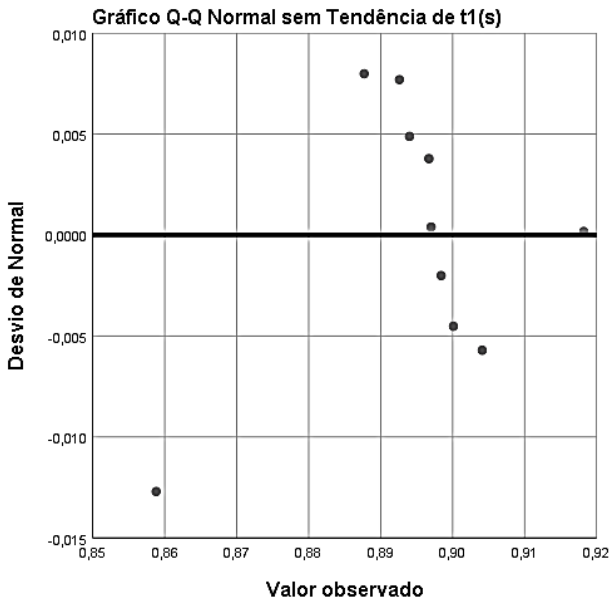
4.3.10.3 Gráficos Q-Q

Tabela 43: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 26º

		t_1(s)	t_2 (s)	X(m)
Distribuição normal	Localização	,894760	1,277900	,956300
	Escala	,0150386	,0096546	,0180988



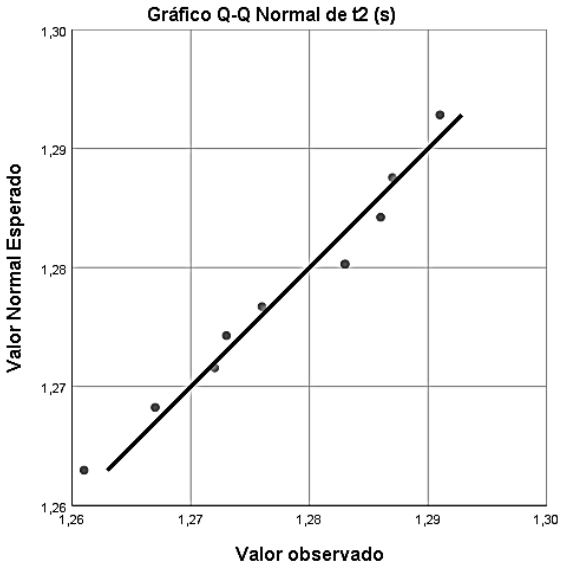
(1)



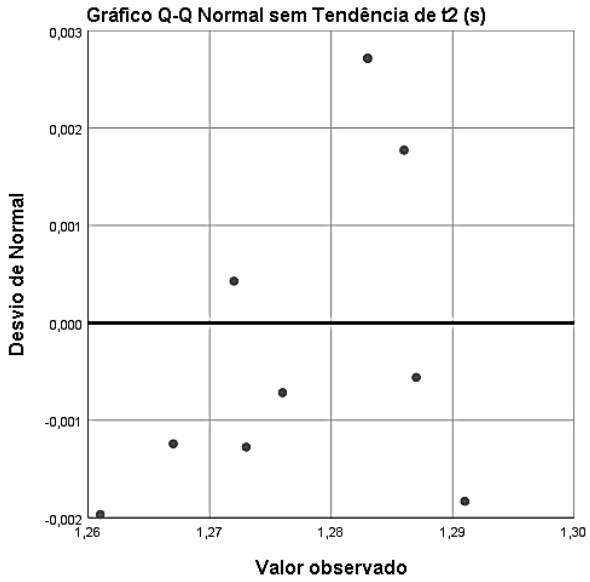
(2)

Figura 28: Gráfico Normal do valor observado para t_1, ângulo de 26º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).



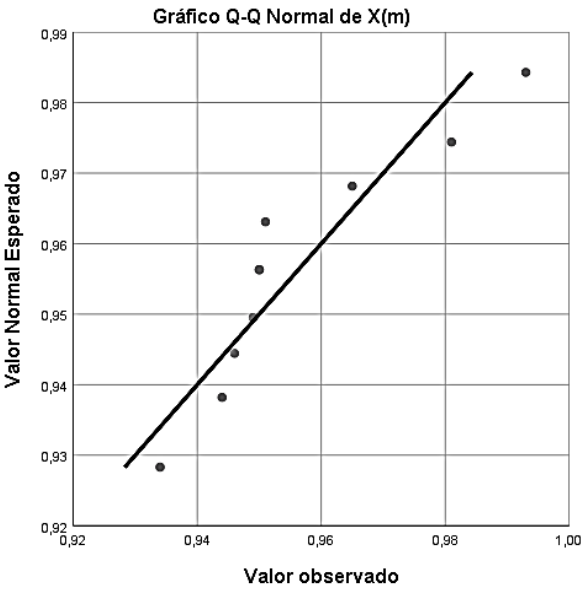
(1)

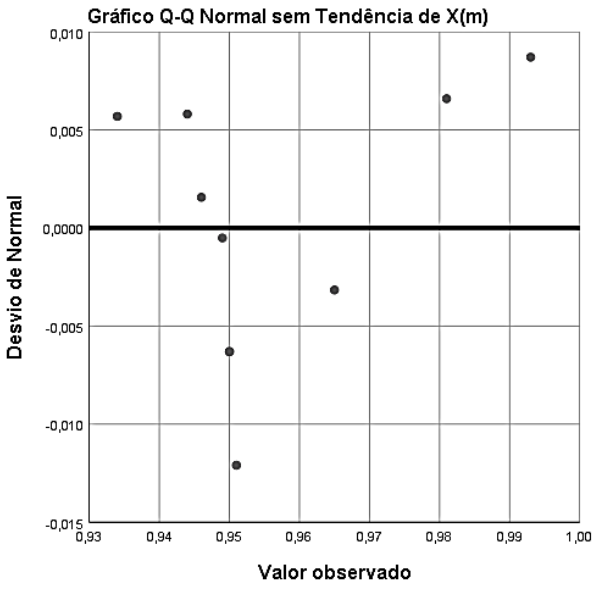


(2)

Figura 29: Gráfico Normal do valor observado para t_1, ângulo de 26º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal.
(2) gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).





(1) **(2)**

Figura 30: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 26º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal. **(2)** gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).

4.3.11 Análise estatística para o ângulo de 27,5 º.

Tabela 44: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 27,5º

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	,8749	,8912	0,885020	,0043024	,0013605
t_2 (s)	10	1,223	1,269	1,25580	,012985	,004106
X(m)	10	,920	,999	0,95560	,021469	,006789
N válido (de lista)	10					

4.3.11.1 Resumo de caso

Tabela 45: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo 27,5º

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
11	27,5	0,885020	1,25580	0,95560	0,809	0,918

4.3.12 Análise estatística para o ângulo de 29,5 º.

Tabela 46: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 29,5º

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	,8693	,8987	0,881240	,0089723	,0028373
t_2 (s)	10	1,225	1,254	1,23510	,009826	,003107

X(m)	10	,925	,959	0,94240	,010024	,003170
N válido (de lista)	10					

4.3.12.1 Resumo de caso

Tabela 47: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 29,5º

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
12	29,5	0,881240	1,23510	0,94240	0,844	0,918

4.3.13 Análise estatística para o ângulo de 32 º.

Tabela 48: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 32º

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	,8394	,8659	,851980	,0083150	,0026294
t_2 (s)	10	1,182	1,213	1,19560	,009383	,002967
X(m)	10	,936	,971	,95090	,010418	,003295
N válido (de lista)	10					

4.3.13.1 Resumo de caso

Tabela 49: Medias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 32º

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
13	32	0,851980	1,19560	0,95090	0,885	0,918

4.3.14 Análise estatística para o ângulo de 34 º.

Tabela 50: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 34º.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média
t_1(s)	10	,8254	,8501	0,835300	,0071363	,0022567
t_2 (s)	10	1,162	1,187	1,17390	,007534	,002383
X(m)	10	,901	,971	0,93870	,018379	,005812
N válido (de lista)	10					

4.3.14.1 Resumo de caso

Tabela 51: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 34º.

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
14	34	0,835300	1,17390	0,93870	0,912	0,918

4.3.15 Análise estatística para o ângulo de 36 º.

Tabela 52: Análise descritiva dos dados estatísticos obtidos para o ângulo de 36º.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Erro Desvio	Erro padrão da média

t1(s)	10	,8213	,8455	0,833110	,0065534	,0020724
t2 (s)	10	1,159	1,182	1,16740	,006501	,002056
X(m)	10	,914	,952	0,92890	,011733	,003710
N válido (de lista)	10					

4.3.15.1 Resumo de caso

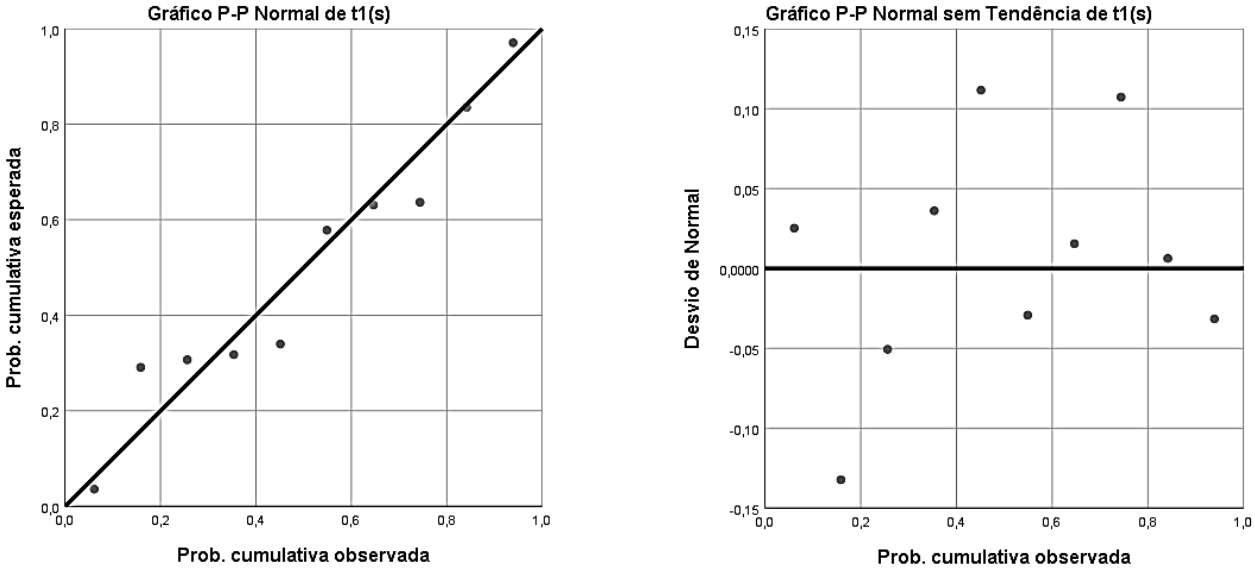
Tabela 53: Médias das variáveis obtidas experimentalmente para o ângulo de 36º.

	Ângulos (Θ)	t_1(s)	t_2 (s)	X(m)	h (m)	H(m)
15	36	0,833110	1,16740	0,92890	0,941	0,918

4.3.15.2 Gráfico p-p

Tabela 54: Parâmetros de Distribuição Estimados para o ângulo de 36º

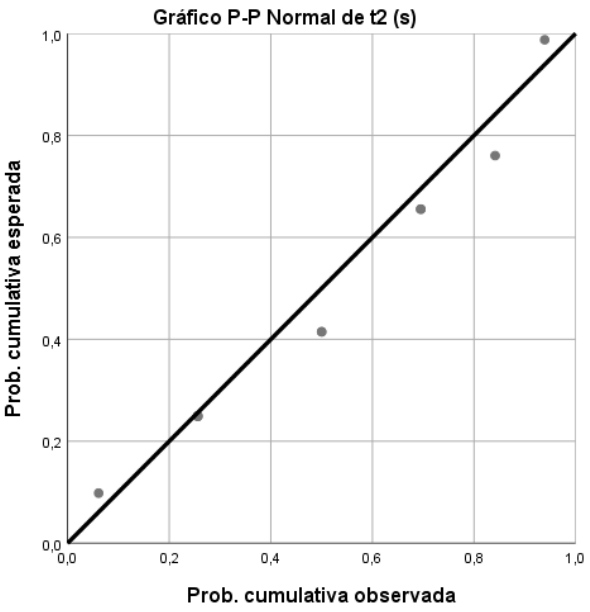
		t_1(s)	t_2 (s)	X(m)
Distribuição normal	Localização	0,833110	1,167400	,928900
	Escala	,0065534	,0065013	,0117327



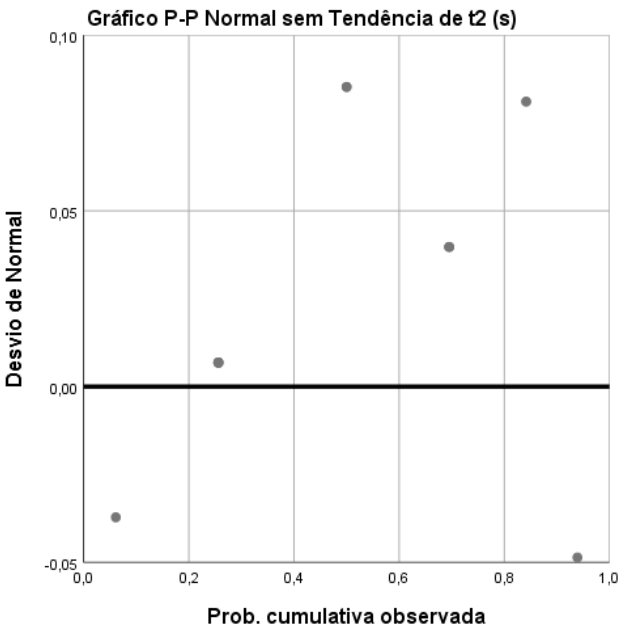
(1) **(2)**

Figura 31: Gráfico Normal para o tempo 1, ângulo de 36º

(1) a diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. **(2)** probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).



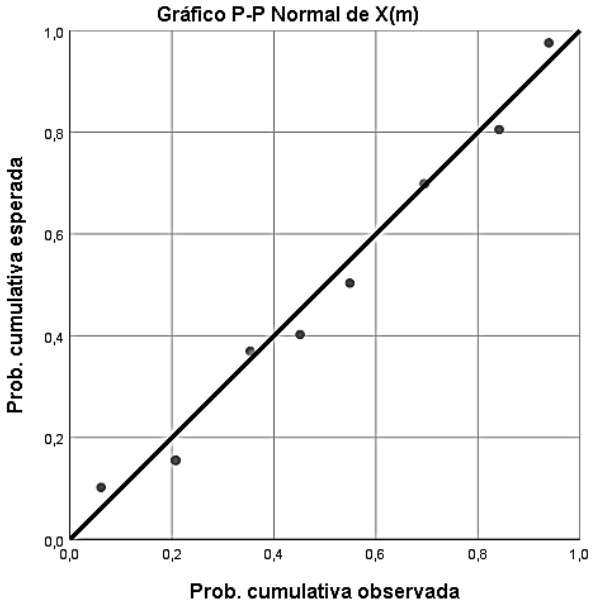
(1)



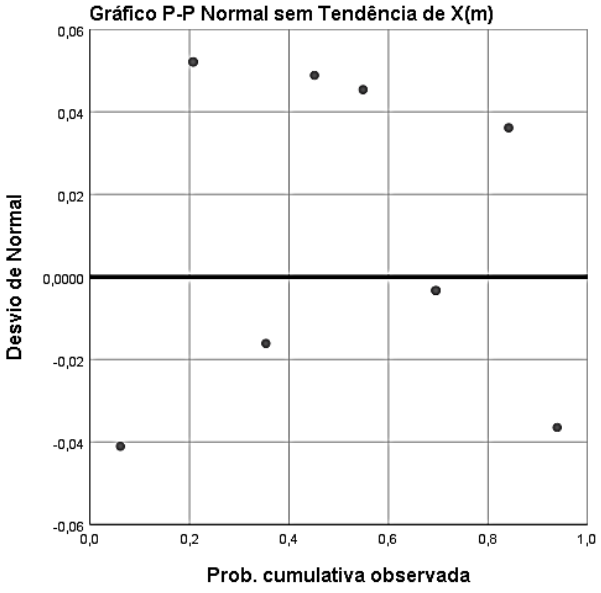
(2)

Figura 32: Gráfico Normal para o tempo 2, ângulo de 36º.

(1) a diagonal de referência representa a linha onde as probabilidades acumuladas empíricas e teóricas seriam iguais. Se todos os pontos estiverem ao longo desta linha, isso sugere um bom ajuste entre os dados observados e a distribuição teórica. **(2)** probabilidade cumulativa observada com desvio normal (sem tendência).



(1)



(2)

Figura 33: Gráfico Normal do valor observado para o alcance (x), ângulo de 36º.

(1) Gráfico do valor normal esperado, se os pontos no gráfico caírem aproximadamente ao longo de uma linha reta, sugere que os dados podem seguir uma distribuição normal. **(2)** gráfico normal do valor observado com desvio normal (sem tendência).

4.4 Comparação das velocidades de rolamento e lançamento oblíquo

Tabela 55: Ângulo, altura em que a esfera é solta, altura do lançamento obliquo, altura raiz quadrada da altura, espaço percorrido pela esfera durante o rolamento na canaleta, tempo para percorrer a canaleta, alcance horizontal, alcance horizontal e três modos diferentes.

ângulos	h	H	$h^{1/2}(m^{1/2})$	L (m)	t(s)	X(m)	V_s(m/s)	V_a (m/s)	V_e (m/s)
6,0	0,199	0,918	0,44609	2	2,93280	0,58440	1,36388	1,40543	1,66913
8,0	0,292	0,918	0,54037	2	2,31900	0,71120	1,72488	1,75771	2,02188
11,0	0,401	0,918	0,63325	2	1,88360	0,83780	2,12359	2,17408	2,36939
13,0	0,467	0,918	0,68337	2	1,75920	0,87680	2,27376	2,35476	2,55695
15,2	0,534	0,918	0,73075	2	1,58090	0,91770	2,53020	2,57430	2,73423
17,5	0,593	,0918	0,77006	2	1,50660	0,93110	2,65498	2,73486	2,88132
19,0	0,635	,0918	0,79687	2	1,45430	0,94230	2,75046	2,86347	2,98161
21,5	0,694	0,918	0,83307	2	1,36870	0,95490	2,92248	3,08629	3,11705
23,5	0,730	0,918	0,85440	2	1,27849	0,92430	3,12870	2,71768	3,19687
26,0	0,785	0,918	0,88600	2	1,27790	0,95630	3,13014	3,50481	3,31512
27,5	0,809	0,918	0,89944	2	1,25580	0,95560	3,18522	3,67738	3,36541
29,5	0,844	0,918	0,91869	2	1,23510	0,94240	3,23860	3,86376	3,43744
32,0	0,885	0,918	0,94074	2	1,19560	0,95090	3,34560	4,36180	3,51994
34,0	0,912	0,918	0,95499	2	1,17390	0,93870	3,40745	4,69265	3,57323
36,0	0,941	0,918	0,97005	2	1,16740	0,92890	3,42642	5,15470	3,62960
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

4.5. Discussão dos resultados

Nesta secção faz-se a interpretação dos resultados obtidos, Discussão das implicações dos resultados para a teoria e prática, limitações do estudo e sugestões para pesquisas futuras.

4.5.1. Interpretação dos resultados obtidos

Para realizar um estudo comparativo das velocidades, foram analisados três colunas de dados referentes às velocidades medidas: "$V_{sensores}$", "$V_{alcance}$" e "$V_{energia}$". A Equação (39) estabelece que, na presença de conservação da energia mecânica, a velocidade de rolamento de uma esfera é linearmente proporcional à raiz quadrada da

altura do plano inclinado. Esta relação linear torna conveniente a organização dos dados em uma tabela que utilize a raiz quadrada da altura como uma das variáveis, como demonstrado na Tabela 55. Esta tabela foi elaborada para os três métodos de determinação da velocidade final da esfera no trilho.

Para cada ângulo de inclinação da canaleta, foi medida a altura **h**, cronometrado o tempo **t** necessário para a esfera percorrer os 2,00 metros do trilho, e mensurado o alcance horizontal **X** no solo, conforme ilustrado na Figura 6. Observou-se que, apesar da repetição dos lançamentos, a esfera caiu aproximadamente no mesmo ponto para cada altura fixada, indicando a precisão e repetibilidade das medições.

As primeiras sete colunas da Tabela 55 apresentam os dados obtidos directamente do experimento, enquanto as últimas três colunas mostram os resultados dos cálculos das velocidades finais da esfera no final da canaleta, conforme as Equações (33), (37) e (39), respectivamente. Essas equações proporcionam diferentes abordagens para determinar a velocidade final, permitindo uma análise comparativa abrangente.

Para analisar esses dados de forma eficaz, recomenda-se a construção de um gráfico das velocidades em função da raiz quadrada da altura, especialmente nos trechos onde os dados formam uma relação linear. A representação gráfica permite visualizar claramente a dependência linear e identificar quaisquer desvios ou padrões não previstos. Uma linha de ajuste pode ser traçada para reforçar a análise visual, facilitando a interpretação dos resultados experimentais.

Traçar o gráfico das velocidades medidas pelos sensores em função da raiz quadrada da altura pode fornecer uma visualização simples, mas poderosa, para confirmar a teoria e validar a precisão dos dados experimentais. Esta abordagem gráfica, associada às linhas de ajuste, não só facilita a compreensão dos resultados, como também oferece uma verificação directa da linearidade esperada pela teoria.

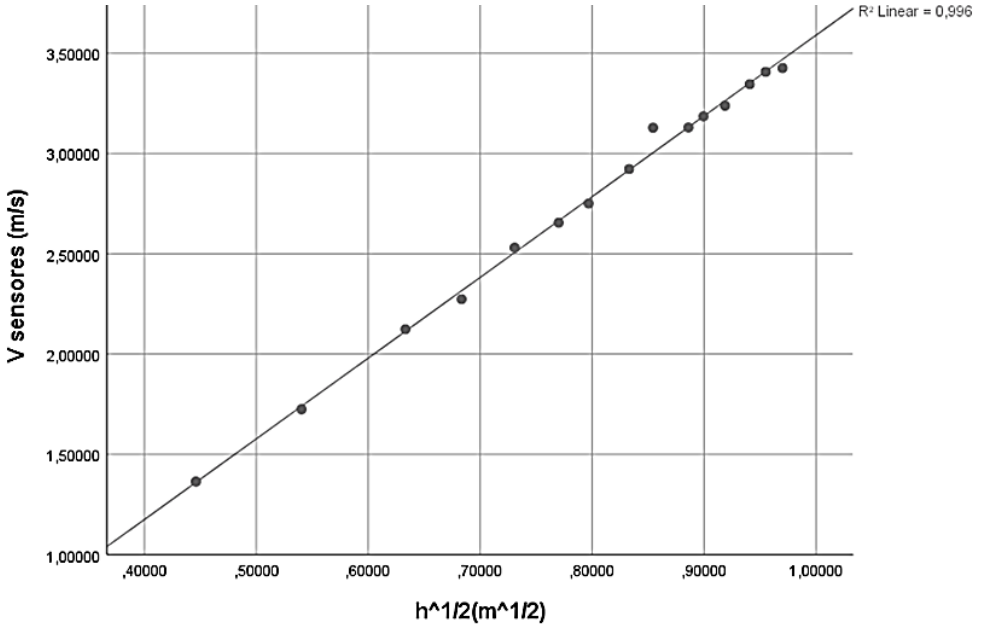


Figura 34: Dispersão simples com linha de ajuste da velocidade registada pelos sensores em função da raiz quadrada da altura.

Para a determinação da velocidade final através dos sensores, assumiu-se que o movimento seja uniformemente variado, com velocidade inicial nula nas equações do deslocamento e da velocidade em função do tempo. Ao eliminar a variável aceleração, comum a ambas as equações, chegou-ses a uma equação simples da velocidade no fim da canaleta, representada pela equação (38). A figura 32 ilustra a dispersão simples com linha de ajuste da velocidade registrada pelos sensores em função da raiz quadrada da altura.

Os resultados demonstram que a maioria dos valores está alinhada à linha de ajuste, excetuando-se o nono e o décimo quintos resultados, que se encontram ligeiramente afastados da linha de ajuste de regressão linear. Esse comportamento sugere que, em grande parte, as medições são consistentes com a relação teórica prevista, indicando que a velocidade final da esfera é proporcional à raiz quadrada da altura.

A presença de desvios nos nonos e décimo quinto resultados podem ser atribuída a pequenas variações experimentais, como flutuações no atrito da superfície do plano inclinado ou imprecisões na detecção pelos sensores. No entanto, esses desvios são relativamente pequenos e não comprometem a conclusão geral de que a velocidade final se comporta de maneira linear em relação à raiz quadrada da altura.

Esta análise estatística das medições demonstra que a grande maioria dos dados segue a tendência teórica esperada, reforçando a confiabilidade do experimento e a validade do

modelo teórico empregado. As poucas discrepâncias observadas não são suficientes para invalidar a hipótese inicial, mas sim indicam áreas onde futuras experimentações podem focar em medidas adicionais de controle para minimizar tais variações e aumentar a precisão dos resultados.

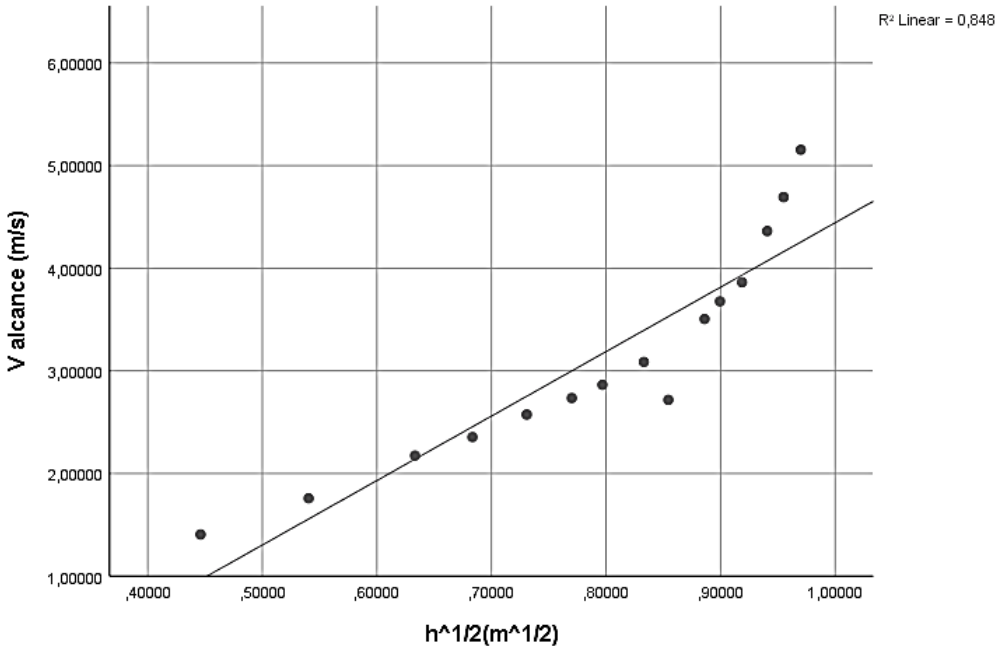


Figura 35: Dispersão simples com linha de ajuste da velocidade do alcance horizontal em função da raiz quadrada da altura.

Para determinar a velocidade da esfera no instante em que ela deixa a canaleta, utilizou-se o alcance horizontal **X**. Este cálculo envolve a análise de um movimento bidimensional, resultante da combinação de um movimento retilíneo uniforme na direção horizontal e um movimento retilíneo uniformemente variado na direção vertical.

Assume-se que, durante a queda da esfera, no eixo horizontal x, o movimento é uniforme, enquanto no eixo vertical **y**, o movimento é uniformemente variado. Isolando a variável **t** da equação do movimento uniforme e substituindo-a na equação do movimento vertical, obtemos a equação (37), que determina a velocidade do alcance horizontal.

A análise da figura 33 revela que os dados experimentais estão consideravelmente afastados da linha de ajuste, mostrando que a velocidade do alcance horizontal tende a ter mais variação, possivelmente devido a fatores externos que afetam o lançamento oblíquo, como a precisão na liberação e no impacto com o solo, indicando uma correlação menos precisa. No diagrama de dispersão, as observações se concentram em

torno da linha reta, com exceção do terceiro e do décimo segundo pontos, que coincidem com a linha de ajuste. Esse afastamento sugere uma série de fatores que podem ter influenciado os resultados.

Possíveis fontes de erro incluem imprecisões na medição, inconsistências na liberação da esfera, irregularidades no plano inclinado e a influência de pequenas forças externas não controladas durante os experimentos. Esses fatores indicam que, embora a teoria cinemática ofereça uma base sólida para calcular a velocidade de alcance horizontal, a aplicação prática está sujeita a variabilidades que podem comprometer a exatidão dos resultados.

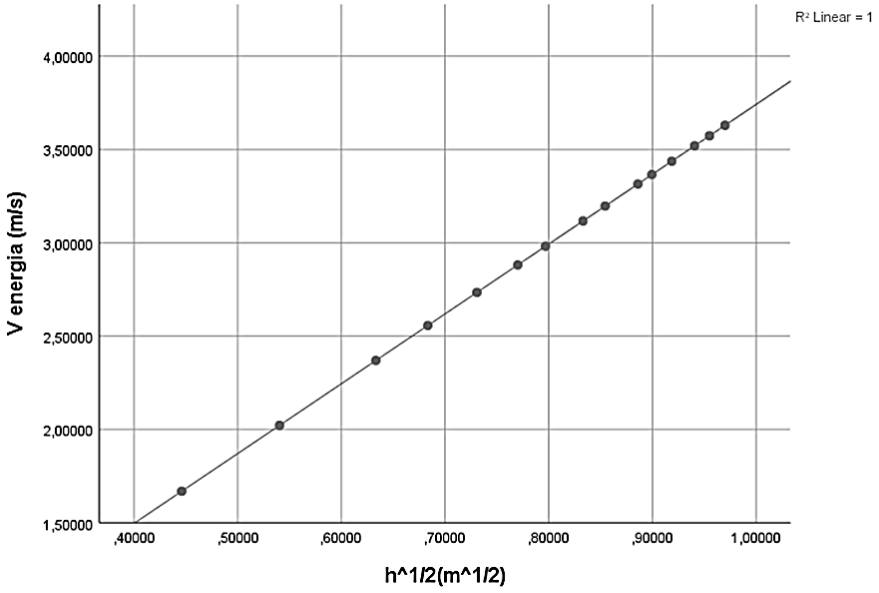


Figura 36: Dispersão simples com linha de ajuste da velocidade pela conservação de energia em função da raiz quadrada da altura.

Considerando o momento de inércia de uma esfera e relacionando a velocidade linear com a angular, uma vez que não haja deslizamento, obtém-se a equação que expressa a velocidade final da esfera pela conservação da energia mecânica (equação 39). É evidente que entre a velocidade obtida pela conservação da energia e a raiz quadrada da altura, existe uma correlação perfeita pois todas as observações, no gráfico de dispersão, caem sobre uma linha recta.

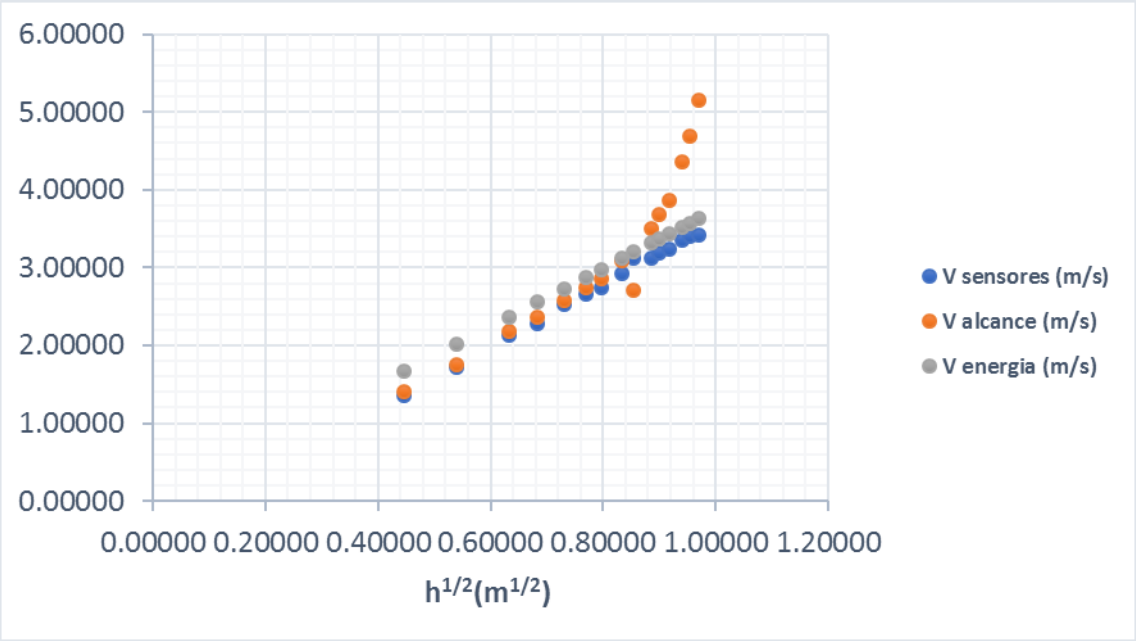


***Figura 37**: Velocidade em função da raiz quadrada da altura para os três modos diferentes de obtenção.*

4.5.2. Média das velocidades

O estudo comparativo das velocidades revela que:

4.5.2.1. Velocidade dos sensores

- **V Sensores** é a medida mais direta e confiável, apresentando menor variabilidade.
- Aumenta de forma consistente com $h^{1/2}$ variando de $1{,}36388\ m/s$ a $3{,}42642\ m/s$.
- $\bar{V}_s = 2{,}7470907\ m/s$

4.5.2.2. Velocidade da lei da conservação de Energia

- **V Energia** segue de perto a teoria, confirmando a precisão dos princípios físicos subjacentes.
- Aumenta de forma mais moderada e estabiliza em valores mais altos de $h^{1/2}$, variando de $1{,}66913\ m/s$ a $3{,}62960\ m/s$.
- $\bar{V}_e = 2{,}9579447\ m/s$

4.5.2.3. Velocidade do alcance horizontal

- **V Alcance** tem maior variabilidade, indicando a necessidade de aprimoramentos no controle experimental.
- Aumenta significativamente, especialmente em valores mais altos de $h^{1/2}$, variando de $1{,}40543\ m/s$ a $5{,}15470\ m/s$.
- $\bar{V}_a = 3{,}1282453\ m/s$

A análise visual e os cálculos mostram que o $V_{alcance}$ tem o maior aumento relativo em relação a $h^{1/2}$, seguido por $V_{sensores}$ e $V_{energia}$. As velocidades medidas pelos sensores (V Sensores) são mais consistentes, com menor variabilidade em comparação com as velocidades calculadas a partir do alcance (V Alcance), que mostram maior variação.

Isso sugere que a medição direta do tempo de rolamento pode ser mais confiável do que estimativas baseadas em alcance devido a fatores externos influenciando o lançamento oblíquo.

As velocidades calculadas com base na energia (V Energia) estão de acordo com as expectativas teóricas de aumento linear com $h^{1/2}$. Isso demonstra que o experimento, em geral, está bem projetado, e as medições estão de acordo com as leis da física. A variabilidade em V Alcance pode ser atribuída a erros experimentais, como inconsistências na liberação da esfera ou perturbações durante o voo. Melhorar o controle dessas variáveis pode levar a resultados mais precisos.

4.5.3. Representação de Incertezas

Incerteza é parâmetro associado ao resultado de uma medida que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuídos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando. O erro é a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro maior a exactidão (acurácia). Para os estados obtidos temos:

Os cálculos finais de incertezas nas velocidades são:

- **Velocidade medida pelos sensores:** $v_s = 2,747 \pm 0,164\ m/s$
- **Velocidade calculada pelo alcance horizontal:** $v_a = 3,128 \pm 0,277\ m/s$
- **Velocidade derivada da conservação da energia:** $v_s = 2,958 \pm 0,152\ m/s$

Os resultados das incertezas nas velocidades medidas podem ser interpretados da seguinte forma:

Velocidade medida pelos sensores: $v_s = 2,747 \pm 0,164\ m/s$

A velocidade v_s medida pelos sensores tem um valor central de 2,747 m/s, com uma incerteza de ±0,164 m/s. Isso significa que o intervalo de confiança para esta medida, com um nível de confiança especificado, é entre 2,583 m/s e 2,911 m/s. A incerteza relativamente pequena indica que as medidas obtidas pelos sensores são precisas e consistentes, o que sugere que os sensores estão funcionando corretamente e que a variabilidade nas medidas é baixa.

Velocidade calculada pelo alcance horizontal: $v_a = 3,128 \pm 0,277\ m/s$ a velocidade v_a calculada pelo alcance horizontal apresenta um valor central de 3,128 m/s, com uma incerteza de ±0,277 m/s. Este intervalo de confiança vai de 2,851 m/s a 3,405 m/s. A incerteza maior, em comparação com a medida dos sensores, sugere que a

técnica de cálculo baseada no alcance horizontal pode estar sujeita a mais variabilidade ou erros de medição. Fatores como a precisão da medição do alcance horizontal e as condições experimentais podem contribuir para essa maior incerteza.

Velocidade derivada da conservação da energia: $v_e = 2,958 \pm 0,152\ m/s$

A velocidade v_s derivada da conservação da energia tem um valor central de 2,958 m/s, com uma incerteza de ±0,152 m/s. O intervalo de confiança para esta medida é entre 2,806 m/s e 3,110 m/s. A incerteza relativamente baixa, similar à medida pelos sensores, indica que o cálculo teórico baseado na conservação da energia é confiável e concorda bem com as medições experimentais.

4.5.4. Comparação das incertezas

Ao comparar as três velocidades, observa-se que:

- A velocidade medida pelos sensores (v_s) e a velocidade derivada da conservação da energia (v_e) têm incertezas menores, indicando maior precisão e consistência.
- A velocidade calculada pelo alcance horizontal (v_a) apresenta a maior incerteza, sugerindo que essa metodologia pode estar mais suscetível a variabilidades experimentais e possíveis erros de medição.

Os resultados indicam que as medições feitas pelos sensores e os cálculos baseados na conservação da energia são mais confiáveis. A maior incerteza na velocidade calculada pelo alcance horizontal pode ser atribuída a dificuldades práticas na medição precisa do alcance ou a variações no lançamento da esfera. Portanto, para fins de alta precisão e confiabilidade, as velocidades v_s e v_e são preferíveis, enquanto v_a deve ser tratado com mais cautela e sujeito a revisão de método para reduzir sua incerteza.

CAPÍTULO VI: CONCLUSÃO

Neste capítulo faz-se a síntese dos principais achados da pesquisa, confirmação ou refutação da hipótese, contribuição do estudo para o conhecimento científico e sugestões para futuros estudos.

6.1. Síntese dos Principais Achados da Pesquisa

Nesta pesquisa, foram analisadas as velocidades de rolamento de uma esfera de aço descendo um plano inclinado, comparando-as com as velocidades obtidas a partir do lançamento oblíquo no mesmo plano. Foram considerados diversos ângulos de inclinação, e os dados foram colectados para cada ângulo, totalizando 150 medições. Utilizando uma metodologia experimental detalhada e rigorosa, foram calculadas as velocidades finais através de três métodos diferentes: sensores fotoeléctricos, alcance horizontal e conservação da energia.

Os resultados demonstraram que a velocidade medida pelos sensores foi $v_s = 2{,}958 \pm 0{,}152\ m/s$, a velocidade calculada pelo alcance horizontal foi $\mathrm{v_a} = 3{,}128 \pm 0{,}277\ \mathrm{m/s}$, e a velocidade derivada da conservação da energia foi $\mathrm{v_e} = 2{,}958 \pm 0{,}152\ \mathrm{m/s}$. Essas velocidades apresentaram dispersões significativas em torno das linhas de ajuste, indicando variações nos dados experimentais.

6.2. Confirmação ou Refutação da Hipótese

A hipótese inicial postulava que as velocidades finais das esferas poderiam ser determinadas de maneira confiável pelos três métodos, apesar das diferenças esperadas devido às variáveis experimentais, como o atrito e os erros de medição. Os resultados confirmaram parcialmente a hipótese, mostrando que, embora existam variações nas medições, as velocidades obtidas são razoavelmente consistentes entre si. A maior dispersão foi observada na velocidade calculada pelo alcance horizontal, sugerindo que este método pode ser mais suscetível a erros sistemáticos.

6.3. Contribuição do estudo para o conhecimento científico

Este estudo fornece valiosas contribuições para o campo da física experimental, particularmente no entendimento da cinemática e dinâmica de objectos em movimento sobre planos inclinados.

A pesquisa corrobora a teoria da conservação da energia mecânica ao demonstrar que a velocidade final da esfera, calculada com base nesta teoria, apresenta uma alta precisão e concordância com as velocidades medidas experimentalmente. Este alinhamento entre teoria e prática reforça a validade dos modelos teóricos utilizados no estudo da dinâmica de rolamento.

A utilização de sensores fotoeléctricos para medir a velocidade de rolamento proporciona uma abordagem precisa e inovadora, minimizando a interferência de erros sistemáticos e aleatórios. Este método pode ser aplicado em futuros estudos experimentais, oferecendo uma ferramenta confiável para a medição de velocidades em sistemas semelhantes.

A pesquisa apresenta uma análise comparativa detalhada entre diferentes métodos de medição de velocidade (sensores, alcance horizontal e conservação de energia). Esta comparação evidencia as vantagens e limitações de cada método, orientando pesquisadores sobre as melhores práticas experimentais para obter resultados precisos. A pesquisa detalha a influência de variáveis experimentais, como ângulo de inclinação e altura, na velocidade final da esfera. A compreensão dessa influência é crucial para o desenvolvimento de modelos mais robustos e para a interpretação de resultados experimentais em diversos contextos.

Ao realizar 150 medições para garantir a precisão dos resultados, o estudo enfatiza a importância de repetição e controle rigoroso nas condições experimentais. Esta abordagem metodológica pode servir de referência para futuros trabalhos experimentais que busquem minimizar a variabilidade e aumentar a confiabilidade dos dados. Os métodos e resultados apresentados podem ser utilizados como base para experimentos didáticos em cursos de física, contribuindo para a formação prática de estudantes. A clareza na descrição dos procedimentos e a análise detalhada dos dados fornecem um material pedagógico valioso para o ensino de conceitos de cinemática e dinâmica. A aplicação de cronômetros digitais e sensores fotoeléctricos destaca a importância do uso de instrumentação moderna para a obtenção de dados precisos. Esta prática pode incentivar a atualização de laboratórios educacionais e de pesquisa com tecnologias mais avançadas, melhorando a qualidade das medições e dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHAMS, I. (2009). Does Practical Work Really Motivate? A study of the affective value of practical work in secondary school science. *International Journal of Science Education, 31*(17), pp. 2335-2353.

Albanese, A. D. (2005). Concepções de estudantes sobre equilíbrio, atrito e dissipação. *De Experimentos, Paradigmas e Diversidades no Ensino de Física*, pp. 65-84.

Andrade-Neto, A. V. (2013). Rolamento e atrito de rolamento ou por que um corpo que rola para. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 35*(3), p. 3704. Fonte: www.sbfisica.org.br

Andrade-Neto, A., & Leyva-Cruz, J. (12 de Dezembro de 2015). Analise teórica e proposta para determinação experimental do coeficiente de atrito de rolamento em um plano inclinado. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 37*(4), p. 3.

Andrade-Neto, A., Cruz, J., Miltao, M., & Ferreira, E. (2013). Rolamento e atrito de rolamento ou por que um corpo que rola para. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 35*(3).

Baird, D. C. (1999.). *Experimentos de Física – Introdução à Medição e à Análise de Erros* (4 ed.). Rio de Janeiro: LTC.

Barbetta, P. A. (2008). *Estatística Aplicada às Ciências Sociais.* Florianópolis: UFSC.

Barolli, E. L. (2010). *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 9*.

Barolli, E. L. (s.d.). Laboratorio didáctico de ciencias: caminos de investigación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 9*(1), pp. 88-110.

Blosser, P. E. (Agosto de 1988). MATÉRIAS EM PESQUISA DE ENSINO DE FÍSICA: O PAPEL DO LABORATÓRIO NO ENSINO DE CIÊNCIAS. *Cad. Cat. Ens. Fis*, 74-78.

Briccia, V. &. (2011). Visões sobre a natureza da ciência construídas a partir do uso de um texto histórico na escola média. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 10*(1), pp. 1-22.

Cabaço, J. L. (2009). *Moçambique: identidade, colonialismo e libertação.* São Paulo-SP: Editora UNESP.

Caldas, H. &. (2000). Rolamento sem escorregamento: Atrito estático ou atrito de rolamento? *Caderno Catarinense de Ensino de Física, 17*(3), pp. 257-269.

Caldas, H., & Magalhães, M. E. (2000). ROLAMENTO SEM ESCORREGAMENTO: ATRITO ESTÁTICO OU ATRITO DE ROLAMENTO? *Caderno Catarinense de ensino de Física, 17*(13), 257-269.

Colinvaux, D., & Barros, S. S. (2002). O papel da modelagem no laboratório didático de Física: o que há para se aprender? In: ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA. *SBF*.

Costa, E. V. (2010). *Revista Brasileira de Ensino de Física, 32*, p. 4301.

Danhoni Neves, M. C. (2005). Uma investigação sobre a natureza do movimento ou sobre uma história para a noção do conceito de força. In M. C. Danhoni Neves & A. Savi (Eds.). *De Experimentos, Paradigmas e Diversidades no Ensino de Física*, pp. 163-187.

Danhoni Neves, M. C. (2008). Galileu fez o experimento do plano inclinado? *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 7*(1).

Duque de Caxias. (2012). *Sistema Internacional de Unidades-SI.* Rio Janeiro: INMETRO/CICMA/SEPIN.

Folquenim, S. G. (s.d.). Rolamento de uma bola de bilhar num plano inclinado. *IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia.* Ponta Grossa-Brasil: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Fortes, A. G., Beirão, H. A., & Santos, A. (2021). ENSINO DA FÍSICA EM MOÇAMBIQUE: DESAFIOS DAS TICs E PRÁTICAS DE ENSINO CENTRADO NO ALUNO. *Revista do Professor de Física, 5*(2), 44-60. Fonte: https://periodicos.unb.br/index.php/rpf

Goya, A., Laburú, C. E., & Filho, P. S. (2014). Estudo comparativo de rolamento e a determinação do início de deslizamento de uma esfera num plano inclinado. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica, 36*(2).

Gregory, R. D. (2008). *Classical Mechanics* (3 ed.). New York: Cambridge University Press.

Halliday, D. R. (2016). *Fundamentos de física.* LTC Editora.

Jesus, V. L. (2014). Vídeo-análise de um experimento de baixo custo sobre atrito cinético e atrito de rolamento. *Revista Brasileira de Ensino de Física*.

Junior, P. L. (2011). Sobre as incertezas do tipo A e B e sua propagação sem derivadas: uma contribuição para a incorporação da metrologia contemporânea aos laboratórios de física básica superior. *33*, p. 2303.

Lisboa, R. M. (2017). Utilização de vídeos em slow motion na obtenção de medidas diretas para o estudo do movimento num plano inclinado. *Caderno de Física da UEFS, 15*(2), pp. 2401.1-2401.21.

Lopes, A. (2013). *Introdução à Mecânica Clássica.* São paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

Lopes, A. M. (2014). A importância das atividades experimentais no ensino de física em Moçambique. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 5(2)*, pp. 68-81.

M., N. H. (1996). *Curso de Física Básica. 1-Mecânica.* S. Paulo: Edgar Blucher.

Nelson, O. R. (2011). *Revista Brasileira de Ensino de Física, 33*, p. 2308.

Nelson, O. R. (2012). Rolamento sem deslizamento: um exemplo ilustrativo capaz de mostrar muitos conflitos conceituais. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 34*(3), pp. 3502-1–3502-5.

Nussenzveig, H. (2013). *Curso de Física Básica* (5 ed., Vol. 1). São Paulo: Blucher.

Pereira, M. V. (2017). Atividades prático-experimentais no ensino de Física. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física, 34*(1), pp. 265-277. doi:http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2017v34n1p265

Pereira, M. V., & Moreira, M. C. (Abril de 2017). Atividades prático-experimentais no ensino de Física. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física, 34*(1), 265-277. doi:DOI: http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2017v34n1p265

Pimentel, J. R. (2005). Influência do raio efetivo no movimento de projéteis esféricos lançados horizontalmente. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física, 22*(2), pp. 209-219.

Pinho-Alves, J. (2000). Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física, 17*, pp. 174-188.

Rosa, C. A. (2012). *História da Ciência: Da Antiguidade ao Renascimento Científico* (Vol. 1). (2, Ed.) Brasília: Fundação Alexandre de Gusmão.

Santos, A. (2018). IBM SPSS como Ferramenta de Pesquisa Quantitativa. *PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM ADMINISTRAÇÃO PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO – PUC-SP*.

Segre, M. (2008). O papel do experimento na física de Galileu. *Caderno de Física da UEFS, 6*(1-2), pp. 87-114.

SILVA, K. A., & OLIVEIRA, C. A. (2017). Método científico: o conhecimento como uma unidade em que todos os saberes estão conectados. *Educação, Gestão e Sociedade*.

SILVA, M. J. (2021). O PROBLEMA DE UMA ESFERA NO PLANO INCLINADO: MODELOS E RESPECTIVAS ABRANGÊNCIAS. *UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO*.

Silva, W. P., Silva, C. M., Precker, J. W., Silvay, D. D., Soares, I. B., & Silva, C. D. (2003). Esfera em Plano Inclinado: Conservac¸ ˜ao da Energia Mecˆanica e Forc¸a de Atrito. *Revista Brasileira de Ensino de Físusica, 25*, 378-383.

Silveira, F. L. (2011). *Revista Brasileira de Ensino de Física, 33*, p. 1304.

Silveira, F. L. (21 de 3 de 2011). Potência de tração de um veículo automotor que se movimenta com velocidade constante. *Revista Brasileira de Ensino de Física*(33), 1304. doi:https://doi.org/10.1590/S1806-11172011000100004

Taylor, J. R. (Sausalito). *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements* (2 ed.). 1997: University Science Books.

Tipler, P. A. (2009). *Física para Cientistas e Engenheiros* (6ª ed.). LTC Editora.

Tonet, I. (2013). *Método científico : uma abordagem ontológica.* São Paulo : Instituto Lukács.

W. Silva, C. S. (2003). *Revista Brasileira de Ensino de Física, 25*, 378 .

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2008). *Física I-Mecânica* (12 ed.). São Paulo: Pearson Education do Brasil.