UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Operadores lineares integrais em espaços de funções contínuas com peso

Autor: Cristiano Carlos Chivambo

Maputo, 25 de Fevereiro de 2026

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Operadores lineares integrais em espaços de funções contínuas com peso

Autor: Cristiano Carlos Chivambo

Supervisor: Prof. Doutor Yury Nepomnyashchikh

Maputo, 25 de Fevereiro de 2026

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família, em especial à minha querida mãe Cidália Cossa, aos meus irmãos Zeca Chivambo, Piedade Chivambo e Rafael Chivambo, e às minhas irmãs Graça Chivambo, Célia Chivambo e Magda Cossa.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me iluminado quando mais precisei dele e por me mostrar sempre o caminho a seguir.

À minha mãe, Cidália Cossa, e irmãos, que são os responsáveis por tudo que sou hoje.

Ao meu Supervisor, Prof. Doutor Yury Nepomnyashchikh, que com os seus ensinamentos incondicionais me ensinou o verdadeiro sentido das palavras dedicação e trabalho.

Aos Docentes e Funcionários do DMI, que directa ou indirectamente participaram na minha formação.

A todos os meus Colegas do curso, especialmente à Justência Rosalina Egas Chilundzo, que não foi simplesmente uma colega, mas sim uma verdadeira amiga.

A todos meus amigos, vizinhos e irmãos em Cristo pelo apoio moral.

Declaração de honra

Declaro, sob minha honra, que este trabalho é resultado das minhas investigações, estando indicadas na bibliografia as fontes por mim usadas, e que o mesmo nunca foi usado para a obtenção de algum grau académico.

Maputo, 25 de Fevereiro de 2026

Cristiano Carlos Chivambo

Resumo

Os resultados clássicos sobre as propriedades gerais do operador integral linear da forma

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

como actuaçã, limitação e continuidade completa, são bem conhecidos e estabelecidos na literatura matemática, especialmente nos espaços de funções contínuas $C[a,b]$ e nos espaços de funções integráveis $\mathrm{L}_\infty[a,b]$.

Neste trabalho, generalizamos esses resultados para os espaçs de funções com peso $C_\alpha(a,b)$ e $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$, onde α é uma função peso que satisfaz certas condições de regularidade. Em particular, estabelecemos critérios de actuação e limitação do operador integral linear K em espaços de Banach $C_\alpha(a,b)$ e $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$, em termos do núcleo $k(t,s)$ e da função peso α. Além disso, obtivemos expressões para a norma do operador K em termos do núcleo $k(t,s)$ e da função peso α, e estabelecemos condições necessárias suficientes para a continuidade completa do operador K em espaços de funções com peso.

Palavras-chave: Operador integral linear, espaços com peso, actuação, limitação, continuidade completa, função peso, núcleo.

Abstract

The classical results on the general properties of the linear integral operator of the form

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

such as action, boundedness, and complete continuity, are well known and established in the mathematical literature, especially in the spaces of continuous functions $C[a,b]$ and in the spaces of integrable functions $\mathrm{L}_\infty[a,b]$. In this work, we generalize these results to the weighted function spaces $C_\alpha(a,b)$ and $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$, where α is a weight function that satisfies certain regularity conditions. In particular, we establish criteria for the action and boundedness of the linear integral operator K in Banach spaces $C_\alpha(a,b)$ and $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$, in terms of the kernel $k(t,s)$ and the weight function α. In addition, we obtain expressions for the norm of the operator K in terms of the kernel $k(t,s)$ and the weight function α, and establish necessary and sufficient conditions for the complete continuity of the operator K in weighted function spaces.

Keywords: Linear integral operator, weighted spaces, action, boundedness, complete continuity, weight function, kernel.

Simbologia

- $\emptyset$ denota o conjunto vazio;
- $x \in A$ denota que x pertence ao conjunto A, isto é, x é um elemento de A;
- $x \notin A$ denota que x não pertence ao conjunto A;
- $A \cup B$ e $A \cap B$ denotam a união e intercessão, respectivamente, dos conjuntos A e B;
- $A \subset B$ denota que A é subconjunto do conjunto B (A está contido em B), isto é, $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$;
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ou $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ denota a união dos conjuntos A_i;
- $\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ ou $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ denota a união disjunta ($\forall i, j : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$) dos conjuntos A_i;
- $A \Delta B$ denota a diferença simétrica dos conjuntos A e B;
- $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto X;
- $X \times Y$ denota o produto cartesiano dos conjuntos X e Y, definido por $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$;
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ denota o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam os conjuntos dos números racionais, irracionais, reais e complexos, respectivamente;
- $\inf_{t \in \Omega} x(t)$, $\sup_{t \in \Omega} x(t)$, $\max_{t \in \Omega} x(t)$ e $\min_{t \in \Omega} x(t)$ denotam o ínfimo, supremo, máximo e mínimo, respectivamente, de uma função $x : \Omega \to \mathbb{R}$ (onde Ω é um conjunto não vazio);
- $f(\cdot, s)$ denota que t está fixo e que s considera-se função somente do primeiro argumento;
- $f(t, \cdot)$ denota que t está fixo e que f considera-se função somente do segundo argumento;
- $\stackrel{\text{def}}{=}$ denota igual por definição;
- $\square$ denota o fim de uma demontração.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

O estudo dos operadores integrais lineares é uma área fundamental da Análise Funcional, com aplicação em diversas áreas da matemática e da física. O estudo do operador integral linear da forma

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a,b], \tag{1.1}$$

em vários pares de espaços funcionais, é um dos principais objetos de estudo da Análise Funcional.

Entre vários aspectos de estudo dos operadores integrais lineares têm-se interesse nas chamadas propriedades gerais, tais como a actuação, a limitação, a continuidade completa, o cálculo ou a estimação da norma do operador. Neste contexto, é interessante encontrar condições suficientes nos teoremas do núcleo do operador (a função $k : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$) para o cumprimento de certas propriedades gerais do operador em pares de espaços funcionais dados, se possível, que tambḿ sejam necessárias, ou pelo menos próximas do que é necessário.

Actualmente, a teoria de propriedades gerais dos operadores integrais lineares é bastante desenvolvida, pode ver, por exemplo, as monografias [7] e [15], algumas proposiçṡ são apresentadas também em manuais de Análise Funcional, tais como [5] e [6]. Também, existem resultados de generalização para os espaços vectoriais (de funções com valores em $\mathbb{R}^n$ ou em espaços de Banach), veja [3]–[9], [10], [13]. Todos esses resultados tém um interesse teórico no desenvolvimento da Análise Funcional, mas não só. Encontram aplicação no estudo qualitativo de modelos matemáticos na forma de problemas de contorno para equações diferenciais funcionais, consideradas como equações de operadores em espaços funcionais.

Os resultados acima citados são obtidos para operadores nos espaços funcionais mais úteis, tais como o espaço C das funções contínuas e os espaços L_p das funções integráveis. Notemos que para o estudo das equações diferenciais funcionais singulares [2], tem-se uma necessidade de considerar o operador (1.1) em espaços funcionais correspondentes com pesos. No entanto, não encontramos nenhum resultado publicado sobre operadores integrais em espaços com peso.

1.2 Estrutura do Trabalho

O trabalho consiste em sete captulos, sendo o primeiro constituído pela Introdução, o segundo, terceiro, quarto e quinto pelo desenvolvimento, o sexto as Conclusões e Recomendações e por fim o sétimo, a Bibliografia.

No segundo capítulo é apresentada uma síntese dos principais resultados da Teoria de Medida, Integração e Análise Funcional, com base nas referências [5]-[7] e [1].

No terceiro capítulo é apresentada uma síntese concisa dos conceitos e resultados fundamentais relacionados a espaços com peso específicos e uma ligação entre operadores em geral nos espaços sem e com peso, sendo o mesmo dividido em três secções. Na Secçãoo 3.1, abordamos o espaço das funções contínuas com peso, seguindo a abordagem da monografia [12]. A Secção 3.2 trata do espaço das classes de funções essencialmente limitadas, seguindo a abordagem da monografia [8]. Na Secção 3.3, apresentamos resultados próprios, estabelecendo uma ligação entre os operadores nos espaços sem e com pesos das seções, contribuindo significativamente para a compreensão da interaçõ entre esses espaços.

No quarto capítulo são apresentados resultados do sobre o operador integral linear (1.1) nos espaços $C = C[a, b]$ e $\mathrm{L}_\infty = \mathrm{L}_\infty[a, b]$. São investigadas as propriedades gerais deste operador, com base em resultados de [3]-[10], [13] e [15].

No quinto capítulo, é apresentada a generalização dos resultados obtidos sobre este operador para os espaços com peso $C_\alpha = C_\alpha[a, b]$ e $\mathrm{L}_{\infty,\alpha} = \mathrm{L}_{\infty,\alpha}[a, b]$, onde α é uma função peso. Utilizando a abordagem proposta na secção 3.3 do captulo 3, que estabelece uma conexão entre operadores em geral nos espaços sem e com peso.

1.3 Objectivos

1.3.1 Objetivo Geral

Encontrar e demonstrar os resultados sobre o operador (1.1) em espaços de Banach C_α das funções contínuas com peso definidas num intervalo (a, b), isto é, encontrar condições suficientes, se possível, que também sejam necessárias, em termos de núcleo do operador, para a actuação e a validade de certas propriedades gerais.

1.3.2 Objectivos Específicos

1. Descrever espaços com pesos $C_\alpha = C_\alpha(a, b)$ e $\mathrm{L}_{\infty,\alpha} = \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a, b)$;

2. obter o critério de actuação e limitação de K de $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}$ em C_β;

3. obter a expressão da norma em termos de núcleo k; e

4. obter o critério de actuação e continuidade completa de K de C_α em C_β.

1.4 Metodologia

De forma pedagógica e didática, no presente trabalho fazemos o uso de elementos da Lógica e Teoria de Conjuntos, Topologia, Teoria de Medida e Integral de Lebesgue, Análise Funcional, tendo como base as obras indicadas nas referências bibliográficas. A redação final da tese será feita usando o editor de texto $\LaTeX 2_\varepsilon$.

Capítulo 2

Elementos de Teoria de Medida e Análise Funcional

Este capítulo apresenta uma síntese dos principais resultados da Teoria de Medida, Integração e Análise Funcional necessários para o desenvolvimento do trabalho. A maioria dos teoremas e proposições aqui apresentados não inclui demonstrações, uma vez que estas podem ser facilmente encontradas nas referências [1] e [5]-[7]. As excepções correspondem a alguns resultados adaptados para o contexto específico deste trabalho, visando facilitar a sua aplicação nos capítulos seguintes.

2.1 Espaços métricos, lineares, normados e de Banach

2.1.1 Espaços métricos

Esta secção introduz conceitos básicos de espaços métricos, lineares e normados fundamentais para o estudo de operadores.

Definição 2.1.1. Seja X um conjunto não vazio. A aplicação $\rho : X^2 \to [0, \infty)$ chama-se **métrica** se satisfaz simultaneamente as condições:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,\ \forall x, y \in X$;

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x),\ \forall x, y \in X$ (simetria); e

3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in X$ (propriedade triangular).

O conjunto X, munido da métrica ρ denomina-se **espaço métrico**.

Exemplo 2.1.2. O conjunto $\mathbb{R}^n$, munido da métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^n \right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.1}$$

é um espaço métrico. A métrica (2.1) chama-se **métrica padrão** em $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.1.3. A métrica define uma noção de distância entre elementos de X, permitindo estudar a convergência e continuidade (ver [5]).

Sejam (X, ρ) e (Y, d) dois espaços métricos.

Definição 2.1.4. Seja $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Chama-se **bola aberta** (**bola fechada**) de centro x e raio ε o conjunto:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\} \qquad \Big(D_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x,y) \leq \varepsilon\}, \text{respectivamente} \Big).$$

Definição 2.1.5. O conjunto $M \subset X$ diz-se **limitado** se é contido em uma bola, ou seja, o **diâmetro** do conjunto M, definido por $\operatorname{diam}(M) = \sup\limits_{x,y \in M} \rho(x,y)$ é finito.

Definição 2.1.6. Seja $M \subset X$ e $x \in X$. O ponto x chama-se **ponto interior** de M se existe um $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(x) \subset M$. O conjunto de todos os pontos interiores de M chama-se **interior** de M e denota-se por $\operatorname{Int}(M)$.

Definição 2.1.7. Seja $M \subset X$ e $x \in X$. O ponto x chama-se **ponto aderente** de M se para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos aderentes de M chama-se **fecho** de M e denota-se por $\operatorname{Clos}(M)$ ou $\overline{M}$.

Definição 2.1.8. Seja $M \subset X$. Diz-se que o conjunto M é **aberto** (**fechado**) se $\operatorname{Int}(M) = M$ $(\overline{M} = M, respectivamente)$.

Definição 2.1.9. Seja $\{x_n\}$ uma sucessão de elementos de X. Diz-se que a sucessão $\{x_n\}$ converge para $x \in X$, e denota-se por $x_n \to x$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N) : \rho(x, x_n) < \varepsilon.$$

Proposição 2.1.10. *$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ se e somente se a sucessão numérica $\{\rho(x_n, x)\}$ converge para zero.*

Corolário 2.1.11. *O conjunto $M \subset X$ é fechado se e somente se para qualquer sucessão de elementos de M convergente em X, o seu limite pertence a M.*

Definição 2.1.12. A sucessão $\{x_n\}$ de elementos de X chama-se **sucessão de Cauchy**[1] se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m, n > N) : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definição 2.1.13. O espaço métrico (X, ρ) diz-se **completo** se qualquer sucessão de Cauchy em X é convergente.

Proposição 2.1.14. *Se o espaço métrico X é completo e M é um subespaço de X, então M é completo se e somente se o conjunto M é fechado em X.*

Definição 2.1.15. Seja $x \in X$. A função $f : X \to Y$ é **contínua** no ponto x se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X, \rho(x, y) < \delta) : d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Teorema 2.1.16. *Seja $f : X \to Y$ uma função e $x \in X$. São equivalentes as seguintes condições:*

1. *f é contínua em no ponto x;*

2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

3. *Se $x_n \to x$ então $f(x_n) \to f(x)$.*

Teorema 2.1.17. *A função $f : X \to Y$ é contínua se e somente se a preimagem de qualquer conjunto aberto em Y é um conjunto aberto em X.*

Definição 2.1.18. A função $f : X \to Y$ é **uniformemente contínua** se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X, \rho(x, y) < \delta) : d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Teorema 2.1.19. *Em espaços métricos, qualquer função uniformemente contínua é contínua.*

2.1.2 Espaços lineares

Definição 2.1.20. Seja X um conjunto não vazio. X chama-se **espaço linear ou vectorial** sobre o corpo $\mathbb{P}$ se em X são definidas duas operações algébricas: **soma** de quaisquer elementos $x, y \in X$ designada por $x + y$ e **produto por escalares** αx ($\forall x \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{P}$) satisfazendo as seguintes condições:

1. Para a soma:

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) — Matemático Francês

(a) $x + y = y + x, \forall x, y \in X$ (comutatividade),

(b) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in X$ (associatividade),

(c) $\exists 0 \in X : x + 0 = x, \forall x \in X$ (elemento neutro),

(d) $(\forall x \in X)(\exists -x \in X) : x + (-x) = 0$ (elemento simétrico);

2. Para o produto por escalares (junto com a soma):

(a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P},\ x \in X$;

(b) $1 \cdot x = x, \forall x \in X$ (1 é identidade do corpo $\mathbb{P}$);

(c) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in X$ (primeira lei distributiva);

(d) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x, y \in X$ (segunda lei distributiva).

Em geral, o corpo $\mathbb{P}$ representa o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Porém, ao longo do trabalho vamos considerar apenas o corpo dos números reais.

Exemplo 2.1.21. O conjunto $C[0,1]$ das funções $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[0,1]$, munido das operações

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t) \quad \text{e} \quad (\alpha x)(t) = \alpha x(t), \quad \text{para} x, y \in C[0,1] \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

é um espaço linear.

Seja X um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.22. O espaço $Y \subset X$ chama-se **subespaço linear** de X se:

1. $\forall x, y \in Y : x + y \in Y$; e

2. $\forall x \in Y, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x \in Y$.

Definição 2.1.23. Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se **funcional** sobre X.

2.1.3 Espaços normados. Espaços de Banach

Definição 2.1.24. Seja X um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{R}$. O funcional $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ chama-se norma se satisfaz simultaneamente as condições:

1. $\|x\| \geq 0$ $(\forall x \in X)$ e $x = \theta \Leftrightarrow \|x\| = 0$;

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad (\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R})$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in X)$.

O espaço linear X, munido da norma $\| \cdot \|$ denomina-se **espaço normado**.

Proposição 2.1.25. *Qualquer espaço normado é um espaço métrico dotado da diatância*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Observação 2.1.26. O conceito de espaço normado sintetiza estruturas algébricas e topológicas. De facto, um espaço normado é, por um lado, um espaço linear e, por outro, um espaço métrico. Deste modo, todas as noções e proposições dos espaços lineares e dos espaços métricos podem ser aplicadas aos espaços normados.

Proposição 2.1.27. *Num espaço normado, de $x_n \to x$ decorre $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Seja X um espaço normado e $\varepsilon > 0$. Usaremos as notações das bolas para espaços métricos para bolas com centro no ponto θ (elemento zero de X) e raio ε :

$$B_\varepsilon(X) = B_\varepsilon(\theta) = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\} \quad \text{e} \quad D_\varepsilon(X) = D_\varepsilon(\theta) = \{x \in X : ||x|| \leq \varepsilon\} \tag{2.2}$$

Proposição 2.1.28. *Em qualquer espaço normado X, quaisquer que sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, tem-se $\overline{B_\varepsilon(x)} = D_\varepsilon(x)$.*

Definição 2.1.29. Seja X um espaço normado e $x, y \in X$. O conjunto

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}$$

chama-se **segmento** com extremidades x e y.

Definição 2.1.30. O conjunto $D \subset X$ chama-se **convexo** se $\forall x, y \in D \Rightarrow [x, y] \subset D$.

Definição 2.1.31. Um espaço normado completo (no sentido da Definição 2.1.13) chama-se **espaço de Banach**[2].

Proposição 2.1.32. *Um subespaço linear de um espaço de Banach é espaço de Banach se e somente se este subespaço é fechado.*

[2]Stefan Banach (1892–1945) — Matemático Polaco

Exemplo 2.1.33. O espaço linear $P_u = P_u[a,b]$ constituido pelas funçõs $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitadas, dotado da norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

é um espaço de Banach.

Teorema 2.1.34 (de Weierstrass[3]). *Se $\{x_n\}$ é uma sucessão de funções contínuas em $[a,b]$, e se x_n converge uniformemente para uma função x ($x_n \rightrightarrows x$), então x é uma função contínua em $[a,b]$.*

O seginte exemplo é baseado no teorema de Weierstrass.

Exemplo 2.1.35. O espaço linear $C = C[a,b]$ (subespaço fechado do espaço $P_u[a,b]$) constituido pelas funçõs $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a,b]$, dotado da norma

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

é um espaço de Banach.

2.2 Elementos de Teoria de Medida e Integração

Seja S um conjunto arbitrário, $\mathcal{P}(S)$ a família de todos os subconjuntos de S e $\varepsilon \subset \mathcal{P}(S)$.

2.2.1 Espaços mensuráveis e funções mensuráveis

Definição 2.2.1. Um conjunto U chama-se **unidade** da família de conjuntos ε se $U \in \varepsilon$ e $A \subset U$ para todo $A \in \varepsilon$.

Definição 2.2.2. ε chama-se **semi-anel** se:

1. $\emptyset \in \varepsilon$;

2. $A, B \in \varepsilon \Rightarrow A \cap B \in \varepsilon$; e

3. Se $A, B \in \varepsilon,\ A \subset B$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e C_i $(i = \overline{1,n})$, tal que $A \setminus B = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$.

Definição 2.2.3. ε chama-se σ-**álgebra com unidade** S se:

1. $\emptyset \in \varepsilon$;

[3]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)—Matemático Alemão

2. $A_i \in \varepsilon,\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \varepsilon$; e

3. $A \in \varepsilon \Rightarrow S \backslash A \in \varepsilon$.

Definição 2.2.4. A família de conjuntos $\sigma(\varepsilon)$ chama-se **σ-álgebra gerada por** ε se:

1. $\sigma(\varepsilon)$ é a σ-álgebra com unidade S;

2. $\varepsilon \subset \sigma(\varepsilon)$; e

3. Se $\varepsilon \subset \varepsilon^*$ e ε^* é uma σ-álgebra com unidade S, então $\sigma(\varepsilon) \subset \varepsilon^*$.

Definição 2.2.5. Sejam $S \neq \emptyset$ e Ξ uma σ-álgebra em S. O par (S, Ξ) chama-se **espaço mensurável**. O conjunto $A \subset S$ do espaço mensurável (S, Ξ) chama-se **conjunto mensurável** se $A \in \Xi$.

Seja (S, Ξ) um espaço mensurável.

Definição 2.2.6. Uma função $x : S \to \mathbb{R}$ diz-se **mensurável** se $\forall c \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{s \in S\colon x(s) < c\}$ é mensurável.

Designemos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções $x : S \to \mathbb{R}$ e por $\mathcal{M}$ o subconjunto das funções mensuráveis.

Definição 2.2.7. Seja $D \subset S$ um conjunto. A função $\chi_D : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_D(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in D \\ 0, & \text{se } t \notin D, \end{cases}$$

chama-se **função característica** do conjunto D.

Definição 2.2.8. Uma função $x : S \to \mathbb{R}$ chama-se **elementar** se a sua imagem $x(S)$ e um conjunto finito, e chama-se de **contradomínio enumerável** se a sua imagem $x(S)$ e um conjunto finito ou enumerável.

Proposição 2.2.9. *Qualquer função elementar (de contradomínio enumerável) é representável na forma*

$$x(s) = \sum_{i \in I} a_i \chi_{D_i}(s) \tag{2.3}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $D_i \subset S$ $(i \in I)$ *e* $a_i \neq a_j$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ $(i \neq j)$.

Aqui para função elementar pode ser escolhido o conjunto índices $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *para o* $n \in \mathbb{N}$ *correspondente, e para função de contradomínio enumerável que não é elementar pode ser escolhido* $I = \mathbb{N}$.

Proposição 2.2.10. *Uma função de contradomínio enumerável é mensurável se e somente se na sua representação* (2.3) $D_i \in \Xi$ *para todo* $i \in I$.

Designemos por $\mathcal{M}_0$ o conjunto de todas funções elementares mensuráveis $x : S \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}_\sigma$ o conjunto de todas funções mensuráveis de contradomínio enumerável $x : S \to \mathbb{R}$.

Proposição 2.2.11. *Temos* $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_\sigma \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{F}$. *Mais ainda, esta sequência de inclusões é a sequência de subespaços vectoriais do espaço vectorial* $\mathcal{F}$ *com operações algébricas usuais.*

Teorema 2.2.12. *Se* $x \in \mathcal{M}$, *então existe sucessão* $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_\sigma$, *tal que* $x_n \rightrightarrows x$.

2.2.2 Espaços de medida

Definição 2.2.13. Seja ε um semi-anel de conjuntos com unidade S. Uma função de conjuntos $\mu : \varepsilon \to [0, \infty)$ chama-se **medida** se quaisquer que sejam conjuntos disjuntos $A_i \in \varepsilon$ $(i \in \mathbb{N})$ tais que $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \varepsilon$ vale

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma\text{-aditividade de } \mu).$$

Definição 2.2.14. Sejam (S, Ξ) um espaço mensurável e $\mu : \Xi \to [0, \infty)$ uma medida. O trio (S, Ξ, μ) chama-se **espaço de medida**.

Teorema 2.2.15. *Sejam* (S, Ξ, μ) *um espaço de medida e* $\{A_n\}$ *uma sucessão de elementos de* Ξ *(os conjuntos podem ser não disjuntos). Então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\text{semi-aditividade emumerável de } \mu).$$

Seja $m : \varepsilon \to [0, \infty)$ uma medida definida no semi-anel ε com unidade S.

Definição 2.2.16. A função de conjuntos $\mu^* : \mathcal{P}(S) \to [0, \infty)$ definda por

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) : C_n \in \varepsilon \ (n \in \mathbb{N}), A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right\}$$

chama-se **medida exterior**.

Definição 2.2.17. Um conjunto A diz-se **mensurável a Lebesgue**[4] se qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe conjunto B que é representável na forma de união finita de conjuntos disjuntos do semi-anel ε, tal que $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

[4] Henri Lebesgue (1875–1941) — Matemático Francês

Designaremos por $\Sigma(S) = \Sigma$ a família de todos os conjuntos mensuráveis a Lebesgue.

Definição 2.2.18. Definamos a função de conjuntos $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ como

$$\mu = \mu|_{\Sigma}, \quad \text{isto é,} \quad \mu(A) = \mu^*(A), \quad \forall A \in \Sigma.$$

Teorema 2.2.19. *A família Σ é uma $\sigma-$álgebra com unidade S e a função de conjuntos μ é uma medida $\sigma-$aditiva em Σ.*

Teorema 2.2.20. *Uma medida $\sigma-$aditiva e finita m defnida num semi-anel ε com unidade pode ser estendida para $\sigma-$álgebra Σ. Esta extensão μ para Σ é uma medida, é determinada unicamente e é definida como restrição de medida exterior μ^* na $\sigma-$álgebra Σ.*

Definição 2.2.21. A Σ chama-se **$\sigma-$álgebra de Lebesgue gerada pela medida** m. A medida $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ chama-se **medida de Lebesgue**. O processo descrito da construção de Σ e de μ chama-se **extensão padronizada de medida do semi-anel para $\sigma-$álgebra**. O espaço de medida (S, Σ, μ) chama-se **espaço de Lebesgue**.

Proposição 2.2.22. *Sejam $A \neq \emptyset$ e B dois conjuntos. A medida de Lebesgue é* ***completa*** *no sentido de se $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0$ e $B \subseteq A$, então $B \in \Sigma$ e obviamente $\mu(B) = 0$.*

Exemplo 2.2.23. Seja $S = [a, b]$. A família ε de todos os intervalos contidos em $[a, b]$ é um semi-anel com unidade $[a, b]$. A função de conjuntos $m : \varepsilon \to [0, \infty)$, definida por

$$m([c, d]) = m((c, d]) = m([c, d)) = m((c, d)) = d - c, \qquad a \leq c \leq d \leq b$$

é uma medida (que associa a cada intervalo contido em $[a, b]$ ao seu comprimento). Realizando a extensão padronizada da medida m, obtemos a $\sigma-$álgebra de Lebesgue $\Sigma = \Sigma[a, b]$ contendo os intervalos e a medida $\mu : \Sigma \to [0, b - a]$, extensão de m.

Observação 2.2.24. Pode-se dizer que o espaço de medida $([a, b], \Sigma, \mu)$ descrito no Exemplo 2.2.23 é um **espaço de Lebesgue clássico** e um dos exemplos de espaços de medida muito importantes para aplicações. Na definição do operador integral que será apresentada apartir do capítulo 4, vamos utilizar exclusivamente o espaço de medida de Lebesgue clássico $([a, b], \Sigma, \mu)$.

2.2.3 Propriedades de funções mensuráveis em $[a, b]$. Espaço $\mathbf{L}_\infty$

Nesta subsecção considera-se o espaço de Lebesgue clássico $([a, b], \Sigma, \mu)$.

Vamos utilizar para este espaço as notações $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_\sigma$ dos conjuntos de funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, introdizodos na Subsecção 2.2.1, também as notações P_u e C dos espaços de Banach introdizodos na Subsecção 2.1.3

Proposição 2.2.25. *O espaço linear $L_\infty = L_\infty[a, b]$ constituido pelas funçõs $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ mensuráveis e limitadas em $[a, b]$, dotado da norma*

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

é um espaço de Banach.

Exemplo 2.2.26. A funcção $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & \text{se} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad\quad t = 0 \end{cases}$$

é mensurável em $[0, 1]$, mas não limitada. Portanto, $x \notin L_\infty[0, 1]$.

Proposição 2.2.27. *O espaço $C[a, b]$ é um subespaço fechado do espaço $L_\infty[a, b]$, e o espaço $L_\infty[a, b]$ é um subespaço fechado do espaço $P_u[a, b]$.*

Exemplo 2.2.28. Consideremos a função $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $x(t) = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right[}(t)$. A função $x \in L_\infty[0, 1]$, porém $x \notin C[0, 1]$.

Definição 2.2.29. Diz-se que uma sucessão de funções $\{x_n\} \subset \mathcal{F}$ **converge em quase todos pontos** (abreviadamente q.t.p.) para função $x \in \mathcal{F}$ ($x_n \overset{\text{q.t.p.}}{\to} x$) se existe um conjunto $N \subset [a, b]$ de medida zero, tal que $x_n(s) \to x(s)$ para todo $s \in [a, b] \setminus N$.

Definição 2.2.30. Diz-se que uma sucessão de funções $\{x_n\} \subset \mathcal{F}$ **converge em medida** para$x \in \mathcal{F}$ ($x_n \overset{\mu}{\to} x$) se $\forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu^* \left(\{s \in [a, b] : |x_n(s) - x(s)| \geq \varepsilon\}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Proposição 2.2.31. *Se $x_n \in \mathcal{M}$ ($n \in \mathbb{N}$ e $x_n \overset{q.t.p.}{\to} x$ (ou $x_n \overset{\mu}{\to} x$) então $x \in \mathcal{M}$. Consecutivamente, caso de x_n mensuráveis, na expressão (2.4) o símbolo de medida exterior μ^* pode ser alterado para o símbolo de medida μ.*

Proposição 2.2.32. *Para qualquer função $x \in L_\infty$ existe uma sucessão de funções $x_n \in \mathcal{M}_0$, tal que $x_n \to x$ em L_∞ (o que significa $x_n \rightrightarrows x$).*

Teorema 2.2.33 (de Lusin[5])**.** *Seja $x \in \mathcal{M}$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma funão contínua $x_\epsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\mu(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon.$$

Definição 2.2.34. Diz-se que duas funções $x, y : (a, b) \to \mathbb{R}$ são $\mu-$**equivalentes** (ou **equivalentes em relação a medida** μ), e este facto denota-se por $x \sim y$, se

$$\mu\{s \in (a, b) : x(s) \neq y(s)\} = 0.$$

O conjunto de todas as funções $\mu-$equivalentes a uma função $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ chama-se **classe de** $\mu-$**equivalência** da função x, e denota-se por $\overline{x}$.

Proposição 2.2.35. *A relação $\sim$ em $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ introduzida na Definição 2.2.34 é reflexiva, simetrica e transitiva, tal que é uma relação de equivalência. Mais ainda, o conjunto das funções $\mu-$equivalentes a função nula é uma subespaço vectorial de $\mathcal{M}$. Deste modo, são definidos correctamente o espaço vectorial quociente (ver a definição em [6])* $\mathrm{F} = \mathcal{F}/\sim$, *e também seus subespaços vectoriais* $\mathrm{M} = \mathcal{M}/\sim$, $\mathrm{M}_\sigma = \mathcal{M}_\sigma/\sim$ *e* $\mathrm{M}_0 = \mathcal{M}_0/\sim$.

Definição 2.2.36. Defini-se o **espaço de classes de** $\mu-$**equivalência de funções limitadas** (ou **essencialmente limitadas**) como:

$$\mathrm{L}_\infty = \{x : [a, b] \to \mathbb{R} \colon x \text{ é } \mu-\text{equivalente a uma função limitada}\}$$

Proposição 2.2.37. *O espaço vectorial* L_∞ *com norma*

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [a,b]} |x(t)| = \inf\big\{M > 0 : \mu\big(\{t \in [a, b] : |x(t)| > M\}\big) = 0\big\}$$

é um espaço normado que é espaço quaciente (ver [6]) do espaço normado L_∞. Mais ainda, assim como L_∞, o espaço normado $\mathrm{L}_\infty = L_\infty/\sim$ *é um espaço de Banach.*

2.2.4 Integral de Lebesgue

Nesta subsecção, assim comoq na subsecção anterior, vamos limitar-nos à consideração do espaço com medida de Lebesgue clássico $([a, b], \Sigma, \mu)$. No entanto, a maioria de definições e proposições continuarão válidas para qualquer espaço com medida (ver [1], [5] ou [6]). Na descrição de elementos da teoria da integral de Lebesgue vamos usar a monografia [6].

Seja A um conjunto mensurável, quer dizer, $A \in \Sigma$.

[5]Nikolai Lusin (1883-1950) — Matemático Russo

Definição 2.2.38. Seja $x : A \to \mathbb{R}$ uma função de contradomínio enumerável da forma

$$x(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i}(s).$$

A função x chama-se integrável a Lebesgue em A se a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(A_i) \tag{2.5}$$

converge absolutamente. Neste caso, a soma da série (2.5) chama-se **integral de Lebesgue** da função x no conjunto A e denota-se por

$$\int_A x(s) d\mu \qquad \text{ou} \qquad \int_A x(s) ds.$$

Definição 2.2.39. Uma função $x : A \to \mathbb{R}$ chama-se **integrável a Lebesgue** em A se existe uma sucessão de funções $n_n : A \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de contradomínio enumerável integrável, tal que $x_n \rightrightarrows x$ em A. O limite

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A x_n(s) ds$$

chama-se **integral de Lebesgue** de x no conjunto A e denota-se por

$$\int_A x(s) ds.$$

Observação 2.2.40. Para funções de contradomínio enumerável as Definições 2.2.38 e 2.2.39 estão em concordância.

Observação 2.2.41. Caso $A = [a, b]$, o integral de Lebesgue vamos designar por $\displaystyle\int_{[a,b]}$ ou $\displaystyle\int_a^b$. A mesma notação $\displaystyle\int_a^b$ vamos usar para o caso $A = (a, b)$, pois, qualquer que seja função integrável $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ e para qualquer sua prolongação $\tilde{x} : [a, b] \to \mathbb{R}$ temos

$$\int_{[a,b]} \tilde{x}(s) ds = \int_{(a,b)} x(s) ds \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.2.42. *Qualquer função mensurável e limitada é integrável a Lebesgue.*

Teorema 2.2.43 ($\sigma-$aditividade)**.** *Seja $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}$, e seja $A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$ onde $A_i \in \Sigma$ $(i \in I)$. Se a função x é integrável a Lebesgue em A, então x é integrável a Lebesgue em A_i e*

$$\int_A x(s) ds = \sum_{i\in I} \int_{A_i} x(s) ds,$$

sendo que a séria na parte direita (caso $I = \mathbb{N}$) converge absolutamente.

Proposição 2.2.44. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então as funções f e $|f|$ são ambas integráveis a Lebesgue ou ambas não integráveis. Caso sejam, temos:*

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu.$$

Teorema 2.2.45. *Se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável a Rieman em $[a, b]$ então f é integrável a Lebesgue em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b x(s) ds = (R) \int_a^b x(s) ds.$$

Teorema 2.2.46 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\{x_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis em $[a, b]$, e seja $x : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sejam*

a) $x_n \to x$ em quase todo ponto ou em medida em (a, b);

b) Existe uma função w integravel a Lebesgue em $[a, b]$ tal que $|x_n(s)| \leq w(s)$ para todo n e quase todo $s \in [a, b]$.

Então:

1. *x é integrável a Lebesgue em $[a, b]$;*
2. *$\int_a^b x_n(s) ds \to \int_a^b x_n(s) ds$;*
3. *$\int_a^b |x_n(s) - x(s)| ds \to 0$.*

Observação 2.2.47. O Teorema 2.2.46 continua a ser válido se o segmento $[a, b]$ for substituído pelo intervalo aberto (a, b).

Definição 2.2.48. Seja $1 \leq p < \infty$. Uma função $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ é dita função de grau p **integrável** se existe

$$\int_a^b |x(t)|^p ds < \infty.$$

A totalidade de classes de $\mu-$equivalência das funções de grau p integráveia designa-se por

$$\mathrm{L}_p((a, b), \Sigma, \mu) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{L}_p[a, b].$$

2.3 Operadores em espaços normados

Sejam X e Y dois conjuntos não vazios.

Definição 2.3.1. $A : X \to Y$ chama-se **operador** de domínio X e contradomínio Y se $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y) : y = Ax$.

Definição 2.3.2. O subconjunto do contradomínio Y definido por $\mathrm{Im}A = A(X) = \{Ax : x \in X\}$ chama-se **imagem** do operador A.

Definição 2.3.3. Um operador $A : X \to Y$ chama-se:

a) **injectivo**, se transforma elementos diferentes em elementos diferentes, isto é, se $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$ então $Ax_1 \neq Ax_2$;

b) **sobrejecttivo**, se $\mathrm{Im}A = Y$;

c) **bijectivo**, se é injectivo e sobrejectivo.

Sejam, agora, X e Y dois espaços normados sobro corpo $\mathbb{R}$, com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente.

Definição 2.3.4. Dado o operador $A : X \to Y$ e $D \subset X$. A função $\omega(\cdot, A, D) : (0, \infty) \to [0, \infty)$ definido por

$$\omega(\delta, A, D) = \sup\left\{\|Ax_1 - Ax_2\|_Y : x_1, x_2 \in D,\ \|x_1 - x_2\|_X \leq \delta\right\}$$

chama-se **módulo de continuidade** do operador A no conjunto D. O módulo de continuidade do operador A em todo seu domínio é representado por $\omega(\cdot)$.

Proposição 2.3.5. *O operador $A : X \to Y$ é uniformemente contínuo em $D \subset X$ se*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega(\delta, A, D) = 0.$$

Mais ainda, $\forall \delta > 0$

$$\omega(\delta, A, D) = \left\{c \geq 0 : x_1, x_2 \in D,\ \|x_1 - x_2\|_X \leq \delta \Rightarrow \|Ax_1 - Ax_2\|_Y \leq c\right\}.$$

2.3.1 Operadores lineares em espaços normados

Sejam X e Y dois espaços vectoriais sobro corpo $\mathbb{R}$.

Definição 2.3.6. Um operador $A : X \to Y$ cha,ma-se **linear** se

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Caso contrário, A é **não linear**.

Definição 2.3.7. Um operador $A : X \to Y$ que linear e bijectivo chama-se **isomorfismo linear** dos espaços X e Y.

Suponhamos agora que X e Y dois espaços normados sobro corpo $\mathbb{R}$, com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente.

Definição 2.3.8. O operador $A : X \to Y$ é **contínuo** em $x_0 \in X$ se $\forall x_n : x_n \to x_0 \Rightarrow Ax_n \to Ax_0$. Um operador contínuo em todos pontos do seu domínio chama-se **operador contínuo**.

Definição 2.3.9. O operador $A : X \to Y$ é **limitado** se a imagem de qualquer conjunto limitado é um conjunto limitado. No caso em que o operador A é linear, a limitação é equivalente a existência de uma constante $C < \infty$, tal que $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

O menor valor de C satisfazendo esta condição chama-se **norma do operador** A e denota por $\|A\|$.

Teorema 2.3.10. *Seja $A : X \to Y$ um operador linear. São equivalentes as condições:*

1. *A é contínuo;*
2. *$\exists x_0 \in X$, tal que A é contínuo em x_0;*
3. *A é limitado;*
4. *$A(D_1(X))$ é um conjunto limitado;*
5. *$\exists C < \infty : \forall x \in X : \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$.*

Teorema 2.3.11. *Seja $A : X \to Y$ um operador linear. Então*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y < \infty. \tag{2.6}$$

O conjunto de todos operadores lineares contínuos ($\equiv$ limitados) que actuam de X em Y (denota-se por $\mathcal{L}(X,Y)$) é um espaço normado, dotado da norma (2.6).
Caso Y é espaço de Banach o espaço $\mathcal{L}(X,Y)$ também é de Banach.

Definição 2.3.12. Os espaços normados X e Y são linearmente **isomorfos** se existe um isomorfismo linear $j : X \to Y$ e constantes reais positivas c_1 e c_2 tal que

$$c_1\|x\|_X \leq \|j(x)\|_Y \leq c_2\|x\|_X \ , \quad x \in X.$$

Caso existir um isomorfismo linear $j : X \to Y$ tal que $\|j(x)\|_Y = \|x\|_X$ $(\forall x \in X)$, diz-se que os espaços X e Y são **linearmente isométricos**, e neste caso o operador j denomina-se **isometria linear** entre espaços normados X e Y.

Teorema 2.3.13. *Se um de dois espaços normados isomorfos é de Banach, então o outro também é.*

Definição 2.3.14. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vectorial X são ditos **equivalentes** se existem constantes positivas c_1 e c_2 tal que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \ , \quad x \in X.$$

Observação 2.3.15. Caso da equivalência das normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vectorial X os espaços normados correspondentes $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ são isomorfos por isomorfismo $j(x) = x$.

2.3.2 Conjuntos e operadores compactos

Sejam X e Y dois espaços métricos.

Definição 2.3.16. Um conjunto $M \subset X$ é **compacto** se para qualquer sucessão $\{x_n\} \subset M$ é possível extrair uma subsucessão $\{x_{n_k}\}$ convergente para um $x \in M$.

Definição 2.3.17. O conjunto $M \subset X$ é **relativamente compacto** se o seu fecho $\overline{M}$ é compacto.

Definição 2.3.18. X chama-se **espaço compacto** se Xé um conjunto compacto no espaço métrico X.

Proposição 2.3.19. *Qualquer conjunto compacto (relativamente compacto) em X é fechado (limitado).*

Teorema 2.3.20 (Ascoli[6]-Arzelà[7]). *Seja M um conjunto de funções de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Então M é um subconjunto de $C[a, b]$ que é relativamente compacto em $C[a, b]$, se e somente se são válidas simultaneamente as seguintes condições:*

[6] Giulio Ascoli (1843-1896) — Matemático Italiano
[7] Cesare Arzelà (1847–1912) — Matemático Italiano

1. *M é* ***equilimitado em cada ponto****, isto é,* $\forall t_0 \in [a,b] \; : \; \sup\limits_{x \in M} |x(t_0)| < \infty;$
2. *M é* ***localmente equicontínuo****, isto é,* $\forall t_0 \in [a,b] \; : \; \lim\limits_{t \to t_0} \sup\limits_{x \in M} |x(t) - x(t_0)| = 0.$

Sejam X e Y dois espaços de Banach.

Definição 2.3.21. Um operador linear $A : X \to Y$ chama-se **compacto** ou **completamente contínuo** se levar qualquer conjunto limitado em X num conjunto relativamente compacto em Y.

Teorema 2.3.22. *Seja $A : X \to Y$ um operador linear. São válidas as afirmações:*

1. *O operador A é compacto se levar a bola $D_1(X)$ (ver (2.2)) num conjunto relativamente compacto em*
2. *Qualquer operador compacto é limitado.*

Capítulo 3

Espaços com peso e operadores associados

Este capítulo apresenta uma síntese concisa dos conceitos e resultados fundamentais relacionados a espaços com peso específicos, essenciais para o desenvolvimento subsequente do trabalho. Na Secçãoo 3.1, abordamos o espaço das funções contínuas com peso, seguindo a abordagem da monografia [12]. A Secção 3.2 trata do espaço das classes de funções essencialmente limitadas com peso, seguindo a abordagem da monografia [8], com excepção do Teorema 3.2.5 que é original. Na Secção 3.3, apresentamos resultados originais, estabelecendo uma ligação entre os operadores nos espaços sem e com pesos das seções, contribuindo significativamente para a compreensão da interaçõ entre esses espaços.

3.1 Espaço das funções contínuas com peso

Seja $C(a,b)$ o conjunto de todas as funções $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ contínuas em (a,b).

Definição 3.1.1. A função $x \in C(a,b)$ admite uma **prolongação contínua** em $[a,b]$ se existir uma função $\tilde{x} \in C[a,b]$, tal que $\tilde{x}|_{(a,b)} = x$.

Lema 3.1.2. *Para que a função $x \in C(a,b)$ admita uma prolongação contínua em $[a,b]$ é necessário que a mesma seja limitada em (a,b).*

Demonstração. Suponhamos que uma função $x \in C(a,b)$ não é limitada. Assim, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ satisfazendo a condição $\dfrac{2}{n} < b-a$ a restrição da função x para o segmento $A_n = \left[a+\dfrac{1}{n}, b-\dfrac{1}{n}\right]$ é uma função limitada. Daqui e do facto que x não ser uma funçã limitada em (a,b) segue que existe uma sucessão t_n de pontos do intervalo (a,b) tal que t_n converge à direita para a ou à esquerda para b e $\lim_{n\to\infty} |x(t_n)| = \infty$. Deste modo, pelo menos um dos limites $\lim_{t\to a^+} |x(t)|$ ou $\lim_{t\to b^-} |x(t)|$ não existe ou toma um dos valores $\pm\infty$. Portanto a função x não admite uma prolongação contínua em $[a,b]$. $\square$

Exemplo 3.1.3. A função $x(t) = \dfrac{2}{t} \in C(0,1)$ não admite uma prolongação contínua em $[0,1]$, pois não é limitada em $(0,1)$.

Observação 3.1.4. Uma função $x \in C(a,b)$ pode ser limitada, mas não admitir um prolongação contínua.

Exemplo 3.1.5. A função $x(t) = \cos\left(\dfrac{1}{t^3}\right) \in C(0,1)$ é limitada em $(0,1)$, mas não admite uma prolongação contínua em $[0,1]$, pois $\nexists \lim_{t\to 0^+} x(t)$.

Exemplo 3.1.6. A função $x(t) = e^t \in C(0,1)$ é limitada em $(0,1)$ e admite uma prolongação contínua em $[0,1]$, pois existe a função $\tilde{x}(t) = e^t \in C[0,1]$, tal que $\tilde{x}|_{(0,1)} = e^t$.

Definição 3.1.7. Seja $C_+(a,b)$ o conjunto de todas as funções contínuas $\alpha : (a,b) \to (0,\infty)$. O conjunto $C_+(a,b)$ chama-se **conjunto de pesos**.

Definição 3.1.8. Sejam $\alpha \in C_+(a,b)$ e $x \in C(a,b)$. Diz-se que a função x é contínua em (a,b) com peso α, se a função αx admite uma prolongação contínua em $[a,b]$.
O conjunto de todas as funções $x \in C(a,b)$ com peso α chama-se **espaço das funções contínuas com peso** α e denota-se por $C_\alpha(a,b)$.

Observação 3.1.9. O espaço de Banach clássico $C_\alpha[a,b]$ é um caso especial do espaço com peso $C_\alpha[a,b]$, quando $\alpha(t) \equiv 1$.

Exemplo 3.1.10. Seja $\alpha(t) = t^{-3}$, $x(t) = t^2$ e $y(t) = t^5$. A função $x \notin C_\alpha(0,1)$, pois a função αx não admite uma prolongação contínua em $[0,1]$. Por outro lado, $y \in C_\alpha(0,1)$, pois a função αy admite uma prolongação contínua em $[0,1]$.

Proposição 3.1.11. *O espaço $C_\alpha(a,b)$ dotado da norma*

$$\|x\|_{\infty,\alpha} = \max_{t\in[a,b]} \alpha(t)|x(t)|$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. $C_\alpha(a, b)$ com as operações

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t) \;\text{ e }\; (kx)(t) = kx(t), \;\; \forall x, y \in C_\alpha(a, b), \; \forall k \in \mathbb{R}$$

é um espaço linear.

A norma $\| \cdot \|_{\infty,\alpha}$ é bem definida, pois

1. $\|x\|_{\infty,\alpha} \geq 0,\; \|x\|_{\infty,\alpha} = 0$ se $x = 0, \;\; \forall x \in C_\alpha(a, b)$;

2. $\|kx\|_{\infty,\alpha} = |k| \cdot \|x\|_{\infty,\alpha}, \; \forall k \in \mathbb{R}, x \in C_\alpha(a, b)$;

3. $\|x + y\|_{\infty,\alpha} \leq \|x\|_{\infty,\alpha} + \|y\|_{\infty,\alpha}, \; \forall x, y \in C_\alpha(a, b)$.

O que nos garante que $(C_\alpha(a, b), \| \cdot \|_{\infty,\alpha})$ é um espaço normado.

Mostremos agora que $C_\alpha(a, b)$ é completo em relação a norma $\| \cdot \|_{\infty,\alpha}$.
Seja $\{x_n(t)\}$ uma sucessão de Cauchy em $C_\alpha(a, b)$. Então:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)(\forall t \in [a, b]) : \|\alpha x_n - \alpha x_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Ou seja, para qualquer $t \in [a, b]$:

$$|\alpha(t)x_n(t) - \alpha(t)x_m(t)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Fixando $t_0 \in [a, b]$, $\{\alpha(t_0)x_n(t_0)\}$ torna-se uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe o limite :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(t_0)x_n(t_0) = \alpha(t_0)x(t_0)$$

$\forall t \in [a, b]$, definimos a função

$$\alpha(t)x(t) = \lim_{n\to\infty} \alpha(t)x_n(t)$$

De (3.1), para $m > N$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha(t)(x_n(t) - x_m(t))| = |\alpha(t)(x(t) - x_m(t))| \leq \varepsilon \tag{3.2}$$

De (3.2), segue que

$$\alpha x_n \to \alpha x \Leftrightarrow \alpha x_m \rightrightarrows \alpha x \Rightarrow x \in C_\alpha(a, b).$$

Portanto, $C_\alpha(a, b)$ é completo. $\square$

Proposição 3.1.12. *Seja $\alpha \in C_+(a, b)$. São válidas as afirmações:*

1. $C[a,b] \subset C_\alpha(a,b)$ *se e somente se* α *admite prolongações contínuas em* $[a,b]$.

2. $C[a,b] = C_\alpha(a,b)$ *se e somente se* α *e* α^{-1} *admitem prolongações contínuas em* $[a,b]$.

3. $C[a,b] \supset C_\alpha(a,b)$ *se e somente se* α^{-1} *admite prolongações contínuas em* $[a,b]$.

Exemplo 3.1.13. O espaço $C_\alpha(0,1)$, com $\alpha(t) = e^t$ conscide com o espaço de Banach clássico $C[0,1]$, pois $\alpha(t) = e^t$ e $\alpha^{-1}(t) = e^{-t}$ admitem prolongação contínua em $[0,1]$.

Exemplo 3.1.14. Seja $\alpha(t) = t$. O espaço $C[0,1] \subset C_\alpha(0,1)$, pois $\alpha(t) = t$ admite uma prolongação contínua em $[0,1]$. Porém, $C[0,1] \not\supset C_\alpha(0,1)$, já que $\alpha^{-1}(t) = t^{-1}$ não admite prolongação contínua em $[0,1]$.

Exemplo 3.1.15. Seja $\alpha(t) = t^{-2}$. O espaço $C[0,1] \not\subset C_\alpha(0,1)$, pois $\alpha(t) = t^{-2}$ não admite uma prolongação contínua em $[0,1]$. Porém, $C[0,1] \supset C_\alpha(0,1)$, já que $\alpha^{-1}(t) = t^2$ admite prolongação contínua em $[0,1]$.

Exemplo 3.1.16. Seja $\alpha(t) = \dfrac{t}{1-t}$. O espaço $C[0,1] \not\subset C_\alpha(0,1)$, pois $\alpha(t) = \dfrac{t}{1-t}$ não admite uma prolongação contínua em $[0,1]$. E, $C[0,1] \not\supset C_\alpha(0,1)$, já que $\alpha^{-1}(t) = \dfrac{1-t}{t}$ também não admite prolongação contínua em $[0,1]$.

Teorema 3.1.17. *Os espaços de Banach* $C_\alpha(a,b)$ *e* $C_\beta(a,b)$ *são linearmente isométricos por isometria linear* $j_{\alpha,\beta} : C_\alpha(a,b) \to C_\beta(a,b)$*, definida por* $j_{\alpha,\beta}(x) = \beta^{-1}\alpha x$.

Observação 3.1.18. O Teorema 3.1.17 desempenha um papel fundamental no estudo dos operadores concretos em espaços com pesos: admite fazer uma redução para estudo de um operador auxiliar em espaços sem pesos. A demostração do Teorema 3.1.17 pode ser encontrada em [12, p. 57].

3.2 Espaço das funções essencialmente limitadas com peso

Nesta secção considera-se o espaço com medida de Lebesgue clássico $((a,b), \Sigma, \mu)$.

Definição 3.2.1. Seja $\alpha : (a,b) \to (0,\infty)$ uma função mensurável. A classe de funções $\mu-$equivalentes mensuráveis $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ essencialmente limitadas com peso α chama-se **espaço das funções essencialmente limitadas com peso** α e denota-se por $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$.

Observação 3.2.2. O espaço de Banach clássico $\mathrm{L}_\infty[a,b]$ é um caso particular do espaço de Banach $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$, com $\alpha(t) = 1$.

Proposição 3.2.3. *O espaço* $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$*, dotado da norma*

$$\|x\|_{\infty,\alpha} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \alpha(t)|x(t)|$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ com as operações

$$(x+y)(t) = x(t)+y(t) \ \text{ e } \ (kx)(t) = kx(t), \ \ \forall x,y \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b), \ \forall k \in \mathbb{R}$$

é um espaço linear.

A norma $\|\cdot\|_{\infty,\alpha}$ é bem definida, pois

1. $\|x\|_{\infty,\alpha} \geq 0, \ \|x\|_{\infty,\alpha} = 0$ se $x=0, \ \ \forall x \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$;

2. $\|kx\|_{\infty,\alpha} = |k|\cdot\|x\|_{\infty,\alpha}, \ \forall k \in \mathbb{R}, x \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$;

3. $\|x+y\|_{\infty,\alpha} \leq \|x\|_{\infty,\alpha} + \|y\|_{\infty,\alpha}, \ \forall x,y \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$.

O que nos garante que $(\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b), \|\cdot\|_{\infty,\alpha})$ é um espaço normado.

Mostremos agora que $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ é completo em relação a norma $\|\cdot\|_{\infty,\alpha}$.

Seja $\{x_n(t)\}$ uma sucessão de Cauchy em $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$. Então:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m,n > N) : \|\alpha x_n - \alpha x_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Ou seja, em q.t.p. $t \in [a,b]$, os valores $\alpha(t)x_n(t)$ estão se aproximando uns dos outros uniformemente (excepto num conjunto de medida nula). Definimos a função:

$$\alpha(t)x(t) = \lim_{n\to\infty} \alpha(t)x_n(t).$$

$\alpha(t)x(t)$ é mensurável (como limite de uma função mensuráve).

Para $t \in [a,b]$ fixo, $\{\alpha(t)x_n(t)\}$ é de Cauchy $\Rightarrow \exists M > 0$ tal que

$$|\alpha(t)x_n(t)| \leq M \quad \text{em q.t.p. } t \in [a,b] \Rightarrow |\alpha(t)x(t)| = \lim_{n\to\infty} |\alpha(t)x_n(t)| \leq M.$$

Assim, $\alpha(t)x(t) \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\{x_n\}$ é Cauchy,

$$\exists N : \forall m,n > N, \quad \|\alpha x_n - \alpha x_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Fixando $n > N$ e fazendo $m \to \infty$,

$$\|\alpha x_n - \alpha x\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Logo, $x_n \to x$ em $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$.

Portanto, $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ é completo, consequentemente um espaço de Banach. $\square$

Proposição 3.2.4. *Seja $\alpha : (a,b) \to (0,\infty)$. Então, $\mathrm{L}_\infty[a,b] = \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ se e somente se as funões α e α^{-1} são essencialmente limitados em $[a,b]$.*

Teorema 3.2.5. *Os espaços de Banach $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ e $L_{\infty,\beta}(a,b)$ são linearmente isométricos por isometria linear $j_{\alpha,\beta} : \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b) \to L_{\infty,\beta}(a,b)$, definida por $j_{\alpha,\beta}(x) = \beta^{-1}\alpha x$.*

Demonstração. Por conveniência, na demostração o operador $j_{\alpha,\beta}$ designemos por j.
Seja $x \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$. E claro, que a função $y = j(x)$ é mensurável. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|y\|_{\infty,\beta} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \beta(t)|[j(x)](t)| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \beta(t)|\beta^{-1}(t)\alpha(t)x(t)| = \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \alpha(t)|x(t)| = \|x\|_{\infty,\alpha} < \infty, \end{aligned} \tag{3.3}$$

então $y \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$. É mostrado que o operador j actua de $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ em $\mathrm{L}_{\infty,\beta}(a,b)$.

Depois, considerando a equação $j(x) = y$, vimos que $\forall y \in L_{\infty,\beta}(a,b)$ a solução desta equação, isto é, da equação $\beta^{-1}\alpha x = y$, caso existir, está definida unicamente pela expressão $x = \alpha^{-1}\beta y$. É evidente que $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, e do cálculo análogo de (3.3) obtemos

$$\|x\|_{\infty,\alpha} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} \alpha(t)|\alpha^{-1}(t)\beta(t)y(t)| = \|y\|_{\infty,\beta} < \infty.$$

Então, $x \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$. É mostrado, que $\forall y \in L_{\infty,\beta}(a,b)$ a solução $x \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ da equação $j(x) = y$ existe e é única. Logo, o operador $j : \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b) \to L_{\infty,\beta}(a,b)$ é bijectivo.

Sejam, agora, $x, y \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ e $c, d \in \mathbb{R}$. Temos que

$$j(cx + dy) = \beta^{-1}\alpha(cx + dy) = c\beta^{-1}\alpha x + d\beta^{-1}\alpha y = cj(x) + dj(y),$$

o que implica que o operador j é linear.
Junto com a bijectividade de j mostrada anteriormente, concluímos que j é um isomorfismo linear dos espaços $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ e $L_{\infty,\beta}(a,b)$.

Observamos que de (3.3) segue que $\forall x \in \mathrm{L}_{\infty,\alpha}(a,b)$ $\|j(x)\|_{\infty,\beta} = \|x\|_{\infty,\alpha}$. Portanto, j é uma isometria linear entre os espaços $L_{\infty,\alpha}(a,b)$ e $L_{\infty,\beta}(a,b)$. □

3.3 Operadores: ligação entre espaços com e sem peso

Sejam $\alpha, \beta : (a,b) \to (0,\infty)$ duas funções mensuráveis. Seja U um dos espaços L_∞ ou C e U_α um dos espaços com peso correspondente $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}$ ou C_α, respectivamente. Sendo para o caso do espaço C_α, a função peso α contínua em (a,b). Analogamente, seja V um dos espaços L_∞ ou C e V_β um dos espaços com peso correspondente $L_{\infty,\beta}$ ou C_β, respectivamente. Sendo para o caso do espaço C_β, a função peso β contínua em (a,b).

Teorema 3.3.1. *O operador A actua de U_α em V_α se e somente se o operador $\tilde{A}$ definido por*

$$(\tilde{A}x)(t) = \beta(t)(A\alpha^{-1}x)(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.4}$$

actua de U em V.

Demonstração. Suponhamos que $\tilde{A}$ actua de U em V. Seja $x \in U_\alpha$, então $\alpha x \in U$ e $\tilde{A}\alpha x \in V \Rightarrow \beta^{-1}\tilde{A}\alpha x \in V_\beta$. Além disso,

$$\beta^{-1}\tilde{A}\alpha x = \beta^{-1}\beta A\alpha^{-1}\alpha x = Ax. \tag{3.5}$$

Portanto, A actua de U_α em V_β.

Reciprocamente, suonhamos que A actua de U_α em V_β. Seja $x \in U$, então $\alpha^{-1}x \in U_\alpha$ e $A\alpha^{-1}x \in V_\beta \Rightarrow \beta A\alpha^{-1}x \in V$. Além disso,

$$\beta A\alpha^{-1}x = \beta\beta^{-1}\tilde{A}\alpha\alpha^{-1}x = \tilde{A}x. \tag{3.6}$$

Portanto, $\tilde{A}$ actua de U em V.

□

Observação 3.3.2. Este teorema estabelece uma correspondência entre operadores em espaços com e sem pesos, permitindo transferir propriedades e simplificar o estudo de operadores em espaços com pesos.

Teorema 3.3.3. *Seja A um operador que actua de U_α em V_β, $\tilde{A}$ definido em (3.4) um operador que actua de U em V (pelo Teorema 3.3.1) e $B \subset U$ uma bola qualquer. Então, são válidas as proposições:*

1. *A é linear se e somente se $\tilde{A}$ é linear.*

2. *A é limitado se e somente se $\tilde{A}$ é limitado.*

3. *Se A e $\tilde{A}$ são lineares e limitados, então as suas normas são ligadas por:*

$$\|A\|_{U_\alpha \to V_\beta} = \|\tilde{A}\|_{U \to V}. \tag{3.7}$$

4. *A é uniformemente contínuo em cada bola se e somente se $\tilde{A}$ é uniformemente contínuo em cada bola.*

5. *Se A e $\tilde{A}$ são uniformemente contínuos em B e αB, respectivamente, então os seus módulos de continuidade são ligados por:*

$$\omega(\delta, A, B) = \omega(\delta, \tilde{A}, \alpha B) \tag{3.8}$$

6. *A é compacto se e somente se $\tilde{A}$ é compacto.*

Demonstração. 1. Supomhamos que $\tilde{A}$ é linear. Sejam $x, y \in U_\alpha$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. De (3.5), segue que:

$$A(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \beta^{-1}\tilde{A}\alpha(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 \beta^{-1}\tilde{A}\alpha x + \lambda_2 \beta^{-1}\tilde{A}\alpha y = \lambda_1 Ax + \lambda_2 Ay.$$

Portanto, A é linear.

Reciprocamente, supomhamos que A é linear. Sejam $x, y \in U$. De (3.6), segue que:

$$\tilde{A}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \beta A \alpha^{-1}(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 \beta A \alpha^{-1} x + \lambda_2 \beta A \alpha^{-1} y = \lambda_1 \tilde{A} x + \lambda_2 \tilde{A} y.$$

Portanto, $\tilde{A}$ é linear.

2. Suponhamos que $\tilde{A}$ é limitado. Seja $D \subset U$ limitado. Então $\tilde{A}(D) \subset V$ e $\beta^{-1}\tilde{A}(\alpha D) \subset V_\beta$ são limitados. Além disso,

$$\beta^{-1}\tilde{A}(\alpha D) = \beta^{-1}\beta A(\alpha^{-1}\alpha D) = A(D).$$

Portanto, A é limitado.

Reciprocamente, suponhamos que A é limitado. Seja $D \subset U_\alpha$ limitado. Então $A(D) \subset V_\beta$ e $\beta A(\alpha^{-1}D) \subset V$ são limitados. Além disso,

$$\beta A(\alpha^{-1}D) = \beta\beta^{-1}\tilde{A}(\alpha\alpha^{-1}D) = \tilde{A}(D).$$

Portanto, $\tilde{A}$ é limitado.

3. Suponhamos que A e $\tilde{A}$ são lineares e limitados. Temos:

$$\|x\|_U = \|\alpha^{-1}x\|_{U_\alpha} \quad \text{e} \quad \|\tilde{A}x\|_V = \|\beta A\alpha^{-1}x\|_V = \|A\alpha^{-1}x\|_{V_\beta}$$

Então,

$$\|\tilde{A}\|_{U\to V} = \sup_{\|x\|_U=1} \|\tilde{A}x\|_V = \sup_{\|\alpha^{-1}x\|_{U_\alpha}=1} \|A\alpha^{-1}x\|_{V_\beta} = \|A\|_{U_\alpha\to V_\beta}$$

4. Suponhamos que $\tilde{A}$ é uniformemente contínuo na bola $\alpha B \subset U$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\tilde{A}$ é uniformemente contínuo em αB,

$$\exists\delta > 0 \text{ tal que } \forall x, y \in \alpha B : \|x - y\|_U \leq \delta \Rightarrow \|\tilde{A}x - \tilde{A}y\|_V < \varepsilon.$$

Sejam $u, v \in B$, temos $\alpha u, \alpha v \in \alpha B$ e

$$\|u - v\|_{U_\alpha} = \|\alpha u - \alpha v\|_U \leq \delta.$$

Então:

$$\|\tilde{A}\alpha u - \tilde{A}\alpha v\|_V = \|\beta A\alpha^{-1}\alpha u - \beta A\alpha^{-1}\alpha v\|_V = \|Au - Av\|_{V_\beta} < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall u, v \in B) : \|x - y\|_{U_\alpha} \leq \delta \Rightarrow \|Au - Av\|_{V_\beta} < \varepsilon.$$

Portanto, A é uniformemente contínuo em B.

Reciprocamente, se A é uniformemente contínuo em B, então $\tilde{A}$ é uniformemente contínuon em αB.

5. Suponhamos que A e $\tilde{A}$ são uniformemente contínuos em e , respectivamente. Temos:

$$\begin{aligned}\omega(\delta, A, B) &= \sup\left\{\|Ax_1 - Ax_2\|_{V_\beta} : x_1, x_2 \in B,\ \|x_1 - x_2\|_{U_\alpha} \leq \delta\right\}\\ &= \sup\left\{\|\beta^{-1}\tilde{A}\alpha x_1 - \beta^{-1}\tilde{A}\alpha x_2\|_{V_\beta} : x_1, x_2 \in B,\ \|x_1 - x_2\|_{U_\alpha} \leq \delta\right\}\\ &= \sup\left\{\|\tilde{A}\alpha x_1 - \tilde{A}\alpha x_2\|_{V} : \alpha x_1, \alpha x_2 \in \alpha B,\ \|\alpha x_1 - \alpha x_2\|_{U} \leq \delta\right\}\\ &= \omega(\delta, \tilde{A}, \alpha B).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega(\delta, A, B) = \omega(\delta, \tilde{A}, \alpha B).$$

6. Suponhamos que A é compacto. Seja (y_n) uma sucessão em $\alpha B \subset U$. Então $y_n = \alpha x_n$ com $x_n \in B$. Como A é compacto, (Ax_n) tem subsucessão convergente em V. Logo, $(\tilde{A}\alpha x_n) = \beta(A\alpha^{-1}\alpha x_n)$ tem subsucessão convergente, o implica que $\tilde{A}$ é compacto.

2. Reciprocamente, suponhamos que $\tilde{A}$ é compacto. Seja (x_n) em B. Então $\alpha x_n \in \alpha B$. Como $\tilde{A}$ é compacto, $(\tilde{A}\alpha x_n)$ tem subsucessão convergente. Logo, (Ax_n) tem subsucessão convergente (pois $\tilde{A}\alpha = \beta A$), o implica que A é compacto.

Portanto, A é compacto se e somente se $\tilde{A}$ é compacto.

□

Observação 3.3.4. Para o estudo do operador linear integral em espaços com pesos no Capítulo 5, vamos utilizar as proposições 1–3 e 6 do Teorema 3.3.3, e não vamos utilizar as proposições 4 e 5. No entanto, as proposições 4 e 5 são de interesse independente e podem ser úteis para o estudo de operadores não lineares em espaços com pesos.

Capítulo 4

Operador integral linear em espaços C e L_∞

Este capítulo é dedicado ao estudo do operador integral da forma

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

também conhecido como operador de Fredholm, nos espaços $C = C[a,b]$ e $L_\infty = L_\infty[a,b]$. São investigadas as propriedades deste operador, condições de existência e comportamento nos referidos espaços, com base em resultados de [3]–[10], [13] e [15].

4.1 Operador Integral de Fredholm[1]

Definição 4.1.1. Seja $k : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$. O operador integral (no sentido de integral de Lebesgue) $K : X \to Y$ com núcleo k, definido por

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

chama-se **operador integral de Fredholm**.

Proposição 4.1.2. *O operador integral de Fredholm é linear.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ e $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned} K(\lambda_1 x + \lambda_2 y)(t) &= \int_a^b k(t,s)(\lambda_1 x(s) + \lambda_2 y(s))ds \\ &= \lambda_1 \int_a^b k(t,s)x(s)ds + \lambda_2 \int_a^b k(t,s)x(s)ds \\ &= \lambda_1 Kx + \lambda_2 Ky. \end{aligned}$$

[1]Erik Ivar Fredholm (1866–1927) — Matemático Sueco

Portanto, o operador integral de Fredholm é linear. □

4.2 Condições de Caratheodory[2]

Definição 4.2.1. Diz-se que uma função $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as **condiçõeses de Caratheodory**, se a funçõ $f(\cdot,u)$ é mensurável para cada $u \in \mathbb{R}$, e a função $f(s,\cdot)$ é contínua em quase todos pontos $s \in [a,b]$.

Teorema 4.2.2. *Se uma função $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Caratheodory e $(\forall x \in C)\ \int_a^b f(s,x(s))\,ds < \infty$, então*

$$(\forall x \in L_\infty)\ \int_a^b f(s,x(s))\,ds < \infty.$$

Teorema 4.2.3. *Se D é um conjunto convexo e fechado em $\mathbb{R}$ e uma função $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Caratheodory então*

$$\sup_{x\in C,\ x([a,b])\subseteq D} \left| \int_a^b f(s,x(s))\,ds \right| = \sup_{x\in \mathcal{M},\ x([a,b])\subseteq D} \left| \int_a^b f(s,x(s))\,ds \right| = \int_a^b \sup_{u\in D} |f(s,u)|\,ds \tag{4.1}$$

(as partes da igualdade podem ter um valor finito ou $+\infty$), em particular, a função $\sup_{u\in D} |f(\cdot,u)| \in \mathcal{M}$ é mensurável.

Teorema 4.2.4. *Se uma função $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Caratheodory então*

$$\sup_{x\in D_r(C)} \left| \int_a^b f(s,x(s))\,ds \right| = \sup_{x\in D_r(\mathrm{L}_\infty)} \left| \int_a^b f(s,x(s))\,ds \right| = \int_a^b \sup_{u\in[-r,r]} |f(s,u)|\,ds \tag{4.2}$$

(as partes da igualdade podem ter um valor finito ou $+\infty$), em particular, a função $\sup_{u\in[-r,r]} |f(\cdot,u)| \in \mathcal{M}$ é mensurável.

4.3 Actuação e limitação

Lema 4.3.1. *Seja K um operador que actua de C em C. Então, tem lugar*

$$\sup_{x\in D_1(C)} |(Kx)(t)| = \int_a^b |k(t,s)|\,ds, \qquad t \in [a,b],\ e \tag{4.3}$$

$$\sup_{x\in D_1(C)} |(Kx)(t) - (Kx)(t_0)| = \int_a^b |k(t,s) - k(t_0,s)|\,ds, \qquad t, t_0 \in [a,b]. \tag{4.4}$$

[2] Constantin Caratheodory (1873-1950) — Matemático Grego

Demonstração. A função $x(t) \equiv 1$ é contínua, logo, $\forall t \in [a,b]$ temos $\int_a^b k(t,s)\,ds \in \mathbb{R}$, em particular, a função $k(t,\cdot)$ é mensurável, tal que, as grandezas nas partes direitas de (4.3) e (4.4) existem (finitas ou infinitas).

Seja $t \in [a,b]$. Aplicando o Teorema 4.2.4 para $r = 1$ e a função $f(s,u) = k(t,s)u$, obtemos

$$\begin{gathered}\sup_{x\in D_1(C)} |(Kx)(t)| = \sup_{x\in D_1(C)} \left| \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds \right| = \\ \int_a^b \sup_{u\in[-1,1]} |k(t,s)|\,|u|\,ds = \int_a^b |k(t,s)|\,ds.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Analogamente, quaisquer que sejam $t, t_0 \in [a,b]$ fixos, aplicando o Teorema 4.2.4 para $r = 1$ e a função $f(s,u) = [k(t,s) - k(t_0,s)]u$, obtemos a igualdade (4.4).

□

Introduzimos a grandeza

$$\|k\|_u = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,ds \tag{4.6}$$

Lema 4.3.2. *Se $\forall t \in [a,b]$ a função $k(t,\cdot)$ é mensurável, então a grandeza $\|k\|_u \in [0,+\infty]$ é definida correctamente.*

Demonstração. Segue directamente das Proposições 2.2.42 e 2.2.44.

□

No primeiro teorema será estabelecido o facto da actuação e a limitaçõ do operador K de L_∞ em L_∞ e de C em L_∞, e também será estabelecido o critério deste factos em termos de núcleo k do operador, com a expressão exacta da norma do operador em termos de núcleo.

Teorema 4.3.3. *Seja K um operador que actua de C em C. Então, K é limitado se e somente se $\|k\|_u < \infty$. Mais ainda, $\|K\| = \|k\|_u$.*

Demonstração. Passando ao supremo por $t \in [a,b]$ em ambas partes da igualdade (4.3) do Lema (4.3.1), obtemos

$$\|K\| = \sup_{x\in D_1(C)} \|Kx\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \sup_{x\in D_1(C)} |(Kx)(t)| = \|k\|_u. \tag{4.7}$$

A igualdade $\|K\| = \|k_u\|$ está demostrada (a grandeza pode ser finita ou infinita).

Agora, desta igualdade segue directamente que

$$\|k\|_u < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \|K\| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ é limitado.}$$

$\square$

Teorema 4.3.4. *Se $K \in \mathcal{L}(C, C)$ então $K \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_\infty, L_\infty)$ e*

$$\|K\|_{\mathrm{L}_\infty \to L_\infty} = \|K\|_{C \to C} = \|k\|_u.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.3, temos $\|k\|_u < \infty$. Mais ainda, $\forall t \in [a, b]$ e $\forall x \in \mathrm{L}_\infty$ a função $k(t, \cdot)x(\cdot)$ é mensurável, então:

$$|(Kx)(t)| = \left| \int_a^b k(t, s)x(s)\, ds \right| \leq \int_a^b |k(t, s)|\, \|x\|_\infty\, ds \leq \|k\|_u \|x\|_\infty < \infty.$$

Em particular, Kx é uma função de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\|Kx\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |(Kx)(t)| < \|k\|_u \|x\|_\infty < \infty. \tag{4.8}$$

Daqui segue que o operador K actua de L_∞ em P_u, é limitado e $\|K\|_{L_\infty \to P_u} \leq \|k\|_u$.

Além disso, como é evidente, se $x \sim y$ em relação à medida de Lebesgue em $[a, b]$ então $(Kx)(t) = (Ky)(t)$ ($\forall t \in [a, b]$). Então, está definido correctamente o operador linear K que actua de L_∞ em P_u, que é limitado e $\|K\|_{\mathrm{L}_\infty \to P_u} \leq \|k\|_u$.

Notemos que

$$\|K\|_{C \to C} = \|K\|_{C \to P_u} \leq \|K\|_{\mathrm{L}_\infty \to P_u} \leq \|k\|_u,$$

e pelo Teorema 4.3.3, $\|K\|_{C \to C} = \|k\|_u$. Assim,

$$\|K\|_{\mathrm{L}_\infty \to P_u} = \|K\|_{C \to C} = \|k\|_u.$$

Agora, é suficiente demonstrar que $\forall x \in \mathrm{L}_\infty$ a função Kx é mensurável.

Seja $x \in \mathrm{L}_\infty$. Então, pelo Teorema de 2.2.33, existe uma secessão de funções contínuas x_n que converge para x em quase todo ponto em $[a, b]$.

Para cada $t \in [a, b]$,

$$(Kx_n)(t) = \int_a^b k(t, s)x_n(s)\, ds$$

é uma função contínua, pois $k(t,s)$ é um núcleo contínuo e x_n é contínua.

Como $x_n \to x$ em quase todo ponto em $[a,b]$, temos que

$$(Kx_n)(t) = \int_a^b k(t,s)x_n(s)\,ds \to \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds = (Kx)(t)$$

para quase todo $t \in [a,b]$, pelo Teorema 2.2.46, pois $|k(t,s)x_n(s)| \leq \|k\|_\infty \|x_n\|_\infty$ e $\|x_n\|_\infty \leq M$ para algum $M > 0$.

Como (Kx_n) é uma sucessão de funções contínuas que converge para (Kx) em quase todo ponto, (Kx) é uma função mensurável.

□

Teorema 4.3.5. *O operador K actua de L_∞ em C e é contínuo (limitado) se e somente se satisfaz simultaneamente as condições:*

1. $\forall D \in \Sigma : \displaystyle\int_D k(\cdot,s)ds \in C$;
2. $\|k\|_u = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|ds < \infty$.

Mais ainda, se $K \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_\infty, C)$, então $\|K\| = \|k\|_u$.

Demonstração. De 2. segue que $k(t,\cdot)$ e $|k(t,\cdot)x(\cdot)|$ são menuravéis, $\forall x \in \mathrm{L}_\infty, t \in [a,b]$ e

$$\int_a^b |k(t,s)x(s)|ds \leq \|x\| \int_{D_i} |k(t,s)|ds \leq \alpha\|x\| < \infty$$

$\Rightarrow K_t$ definido por $K_t = (Kx)(t)$ (para t fixos) actua de L_∞ em $\mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathcal{M}_0$, por definição

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{D_i}(t),$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \neq \alpha_j, D_i \in \Sigma, D_i \cap D_i = \emptyset$, se $i \neq j$.

Temos que

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds = \int_a^b k(t,s)\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{D_i}(s)ds = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{D_i} k(t,s)ds$$

De 1., segue que

$$\varphi_i(\cdot) = \int_{D_i} k(\cdot,s)ds \in C,$$

então

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \in C,$$

ou seja, $K : \mathcal{M}_0 \to C$. Pelo Lema 2.2.32 para $x \in \mathrm{L}_\infty$ existe $x_n \in \mathcal{M}_0$, tal que $x_n \to x$. Avaliando a diferença $(Kx_n - Kx)(t)$, temos

$$|(Kx_n - Kx)(t)| = \Big| \int_a^b k(t,s)(x_n(s) - x(s))ds \Big| \leq \|x_n - x\| \int_a^b |k(t,s)|ds \leq \|k\|_u \|x_n - x\| \to 0$$

Então $\sup\limits_{t\in[a,b]} |(Kx_n - Kx)(t)| = 0$, isto é, $Kx_n \rightrightarrows Kx$. Mais ainda, se $Kx_n \in C$, então pelo Teorema 2.1.34 $Kx \in C$, isto é, $K : \mathrm{L}_\infty \to C$.

Considerando agora $x \in \mathrm{L}_\infty$, obtemos

$$|(Kx)(t)| = \Big| \int_a^b k(t,s)x(s)ds \Big| \leq \alpha \|x\|$$

Logo

$$||Kx|| = \sup_{t\in[a,b]} |(Kx)(t)| \leq \|k\|_u \|x\| \tag{4.9}$$

De 2) e (4.9) concluimos que $K \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_\infty, C)$ e

$$\|K\| \leq \|k\|_u \tag{4.10}$$

E portanto K é limitado.

Suponhamos que 1) e 2) são válidos. Fixemos $\varepsilon > 0$ e escolhamos $t^* \in [a,b]$, tal que

$$\|k\|_u - \int_a^b |k(t^*,s)|ds < \varepsilon \tag{4.11}$$

Consideremos $E_1 = \{s : k(t^*,s) \geq 0\}$ e $E_2 = \{s : k(t^*,s) < 0\}$ e defininamos $x_0(t) = \chi_{E_1}(t) - \chi_{E_2}(t)$. É obvio que $x_0 \in \mathrm{L}_\infty$, $\|x_0\| = 1$ e

$$(Kx_0)(t^*) = \int_a^b k(t^*,s)(\chi_{E_1} - \chi_{E_2})(s)ds = \int_{E_1} |k(t^*,s)|ds + \int_{E_2} |k(t^*,s)|ds = \int_a^b |k(t^*,s)|ds$$

De onde resulta imediatamente que

$$\|K\| \geq \|Kx_0\| = \sup_{t\in[a,b]} |(Kx_0)(t)| \geq (Kx_0)(t^*) = \int_a^b |k(t^*,s)|ds$$

De 2) e (4.11) segue que

$$\|K\| \geq \int_a^b |k(t^*,s)|ds \geq \|k\|_u - \varepsilon$$

Como ε é tomado arbitrariamente, então

$$\|K\| \geq \|k\|_u \tag{4.12}$$

De (4.10) e (4.12), segue que $\|K\| = \|k\|_u$.

Suponhamos que $K : \mathrm{L}_\infty \to C$ e é limitado. Seja $D \in \Sigma$ e $x_0(t) = \chi_D(t)$, é evidente que $x_0 \in \mathrm{L}_\infty$ e $Kx_0 \in C$ e

$$(Kx_0)(t) = \int_a^b k(t,s)\chi_D(s)ds = \int_D k(t,s)ds$$

, de onde segue que $\varphi(\cdot) = \displaystyle\int_a^b k(\cdot,s)ds \in C \Rightarrow 1)$.

Suponhamos agora que existem $t_n \in [a,b]$, tal que

$$\int_a^b |k(t_n,s)|ds > n \ (n \in \mathbb{N})$$

Comsideremos $E_1, n = \{s : k(t_n,s) \geq 0\}$ e $E_2, n = \{s : k(t_n,s) < 0\}$ e defininamos $x_n(t) = \chi_{E_1,n}(t) - \chi_{E_2,n}(t)$.É evidente que $x_n \in \mathrm{L}_\infty$, $\|x_n\| = 1$ e

$$\|Kx_n\| \geq (Kx_n)(t_n) = \int_a^b k(t_n,s)x(s)ds > n, \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

o que contradiz o facto de K ser limitado. Portanto, se verifica 2..

$\square$

Observação 4.3.6. Se K actua de C em C, não segue necessariamente que K actua de L_∞ em C, vejamos o exemplo abaixo. A demonstração pode ser vista em [10, p. 127-129], , ou mais detalhada em [13, p. 11-15], (ver também [11] e [4, p. 13]).

Exemplo 4.3.7. Sejam $a = 0$, $b = 1$. Definamos os conjuntos $E(t)$ $(0 < t < 1)$ por

$$E(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 - (1-t)^{n-1} - t^2(1-t)^{n-1};\ 1 - (1-t)^{n-1}\right],$$

e consideremos o operador linear integral K com núcleo

$$k(t,s) = \begin{cases} t^{-1}\chi_{E(t)}(s) & \text{quando} \quad 0 < t < 1, \\ 1 & \text{quando} \quad t \in \{0;1\} \end{cases}$$

Este operador K satisfaz as seguintes proposições:

1. $K : \mathrm{L}_\infty \to L_\infty$ e é contínuo, mais ainda $\forall x \in L_\infty$ a função $Kx|_{(0,1]}$ é contínua;

2. $K : C \to C$ e é contínuo;

3. K não actua de $\mathcal{M}_\sigma$ em C, consequentemente não actua de L_∞ em C.

4.4 Continuidade completa

Teorema 4.4.1. *Seja K um operador que actua de C em C. O operador K é completamente contínuo, se e somente se*

$$\forall t_0 \in [a,b] \quad \lim_{t \to t_0} \int_a^b |k(t,s) - k(t_0,s)| ds = 0. \tag{4.13}$$

Demonstração. Seja $K : C \to C$ completamente contínuo. Seja $t_0 \in [a,b]$. Do Teorema 4.2.2 segue que $\forall x \in L_\infty$ $(Kx)(t_0) < \infty$. Definamos os conjuntos E_+, E_- e a a função x^* por

$$E_+ = \{s \in [a,b] \colon k(t_0,s) \geq 0\}, \quad E_+ = \{s \in [a,b] \colon k(t_0,s) < 0\}, \quad x^* = \chi_{E_+} - \chi_{E_-}.$$

É claro que $x^* \in L_\infty$, então

$$\int_a^b |k(t_0,s)|\, ds = \int_{E_+} k(t_0,s)\, ds - \int_{E_-} k(t_0,s)\, ds = (Kx*)(t_0) < \infty. \tag{4.14}$$

Aplicando a igualdade (4.3) do Lema 4.3.1, obtemos

$$\sup_{x \in D_1(C)} |(Kx)(t_0)| = \int_a^b |k(t_0,s)|\, ds < \infty$$

Isto significa que o conjunto $K(D_1(C))$ é equilimitado no ponto t_0.

Aplicando a igualdade (4.4) do Lema 4.3.1, obtemos

$$\lim_{t \to t_0} \sup_{y \in K(D_1(C))} |y(t) - y(t_0)| = \lim_{t \to t_0} \sup_{x \in B_1[C]} |(Kx)(t) - (Kx)(t_0)| =$$
$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b |k(t,s) - k(t_0,s)|\, ds = 0.$$

Isto significa que o conjunto $K(D_1(C))$ é equicontínuo.

É demostrado que o conjunto $K(D_1(C))$ é equilimitado em cada ponto e é equicontúnuo. Pelo Teorema 2.3.20 o conjunto $K(D_1(C))$ é relativamente compacto em C. Pelo Teorema 2.3.22, o operador K é completamente contínuo.

Reciprocamente, suponhamos que o operador $K : C \to C$ é completamente contínuo. Então, o conjunto $K(D_1(C))$ é relativamente compacto em C, e pelo Teorema 2.3.20 o conjunto $K(D_1(C))$ é equicontínuo. Isto significa que $\forall t_0 \in [a,b]$

$$\lim_{t \to t_0} \sup_{x \in D_1(C)} |(Kx)(t) - (Kx)(t_0)| = 0.$$

Daqui e da igualdade (4.4) do Lema 4.3.1 segue que:

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b |k(t,s)-k(t_0,s)|\,ds = \lim_{t\to t_0}\sup_{x\in D_1(C)} |(Kx)(t)-(Kx)(t_0)| = 0.$$

□

Teorema 4.4.2. *Seja K um operador que actua de L_∞ em C. O operador K é completamente contínuo, se e somente se*

$$\forall t_0 \in [a,b] \quad \lim_{t\to t_0}\int_a^b |k(t,s)-k(t_0,s)|ds = 0. \tag{4.15}$$

Demonstração. Suponhamos que (4.15) é válido, então

$$(\forall t_0\in[a,b])(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall t\in[a,b]:|t-t_0|<\delta): \int_a^b |k(t,s)-k(t_0,s)|ds<\varepsilon$$

$\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ e $\forall x \in D_1(\mathrm{L}_\infty)$ temos que

$$|(Kx)(t_1)-(Kx)(t_2)| \le \int_a^b |k(t_1,s)-k(t_2,s)|ds.$$

Portanto,

$$(\forall t_0\in[a,b])(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall t\in[a,b]:|t-t_0|<\delta): |(Kx)(t)-(Kx)(t_0)|<\varepsilon.$$

Ou seja, $K(D_1(\mathrm{L}_\infty))$ é equicontíno.

$K : L_\infty \to C$, então $\forall t \in [a,b]$ fixo

$$\int_a^b |k(t,s)|ds \in \mathbb{R}$$

e $\forall x \in B_1$, temos

$$|(Kx)(t)| \le \int_a^b |k(t,s)|ds < \infty,$$

o que implica que $\{(Kx)(t) : x \in D_1(\mathrm{L}_\infty)\}$ é limitado. Pelo teorema de Teorema 2.3.20 $K(D_1(\mathrm{L}_\infty))$ é relativamente compacto e segundo o Teorema 2.3.22 K é compacto (completamente contínuo).

Reciprocamente, seja $K : \mathrm{L}_\infty \to C$ um operador compacto.

Suponhamos que existe $t_n \in [a,b], t_n \to t_0$, tal que para algum $\varepsilon > 0$

$$\int_a^b |k(t_n,s)-k(t_0,s)| > \varepsilon,\ n\in\mathbb{N}$$

Consideremos $E_1, n = \{s : k(t_n, s) \geq k(t_0, s)\}$, $E_2, n = \{s : k(t_n, s) < k(t_0, s)\}$ e definimos $x_n(s) = \chi_{E_1,n}(s) - \chi_{E_2,n}(s)$, então

$$|(Kx_n)(t_n) - (Kx_n)(t_0)| > \varepsilon$$

Designando por $M = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, temos $M \subset D_1(\mathrm{L}_\infty)$ e $K(D_1(\mathrm{L}_\infty))$ não é equicontínuo. Consequentemente $K(D_1(\mathrm{L}_\infty))$ não é relativamente compacto, o que contradiz a continuidade completa do operador $K : L_\infty \to C$.

$\square$

O teorema abixo representa o critério de actuação e de compacidade do operador K de C em C, que é o mesmo que o critério de actuação e de compacidade do operador K de L_∞ em C.

Teorema 4.4.3. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O operador K actua de C em C e é completamente contínuo;*

2. *O operador K actua de L_∞ em C e é completamente contínuo;*

3. *Qualquer que seja $t_0 \in [a, b]$ são válidas as seguintes condições:*

   (a) A função $k(t_0, \cdot)$ é integrável em $[a, b]$,

   (b) $\lim\limits_{t \to t_0} \int_a^b |k(t, s) - k(t_0, s)| ds = 0.$

Demonstração. A implicação 2.⇒1. É evidente.

Seja 1. e $t_0 \in [a, b]$. Do Teorema 4.4.2 segue directamente a condição 3(b), mas a condição 3(a). decorre da condição (4.14) que foi uma parte da demonstração do Teorema 4.4.2 Deste modo, está demostrada a implicação 1.⇒3.

Seja 3. Da condição 3(a). segue que $\forall x \in L_\infty$

$$|(Kx)(t)| = \left| \int_a^b [k(t, s) - k(t_0, s)]x(s)\, ds \right| \leq \int_a^b |k(t, s)|\, |x(s)|\, ds =$$
$$\|x\|_\infty \int_a^b |k(t, s)|\, ds < \infty, \qquad t \in [a, b],$$

então é definida a função $Kx : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Depois, $\forall t_0 \in [a,b]$ temos

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{x\in D_1(\mathrm{L}_\infty)} |(Kx)(t)-(Kx)(t_0)| = \lim_{t\to t_0} \sup_{x\in D_1(\mathrm{L}_\infty)} \left| \int_a^b [k(t,s)-k(t_0,s)]x(s)\,ds \right| \leq$$

$$\lim_{t\to t_0} \sup_{x\in D_1(\mathrm{L}_\infty)} \int_a^b |k(t,s)-k(t_0,s)|\,\|x\|_\infty\,ds = \lim_{t\to t_0} \int_a^b |k(t,s)-k(t_0,s)|\,ds = 0.$$

Daqui decorrem as seguintes proposições:

1. $\forall x \in D_1(\mathrm{L}_\infty)$ a função Kx é contíntua em $[a,b]$, logo, o operador actua de $D_1(\mathrm{L}_\infty)$ em C. De acordo com a linearidade de K este operador actua de L_∞ em C.

2. O conjunto $K(D_1(\mathrm{L}_\infty))$ é equicontínuo em C. Depois, $\forall t_0 \in [a,b]$, temos, aplicando a igualdade (4.3) do Lema 4.3.1 e usando a condição 3(a)., que

$$\sup_{x\in D_1(\mathrm{L}_\infty)} |(Kx)(t_0)| \leq \sup_{x\in D_1(\mathrm{L}_\infty)} \int_a^b |k(t_0,s)|\,\|x\|_\infty\,ds == \int_a^b |k(t_0,s)|\,ds < \infty,$$

tal que o conjunto $K(D_1(\mathrm{L}_\infty))$ é equilimitado no ponto t_0.
Pelo Teorema 2.3.20 o conjunto $K(D_1(\mathrm{L}_\infty))$ é relativamente compacto em C. Pelo Teorema 2.3.22, o operador $K : \mathrm{L}_\infty \to C$ é completamente contínuo. É demostrada a implicaçõ 3.$\Rightarrow$2.

Portanto, temos a equivalência das condições 1., 2. e 3..

$\square$

Observação 4.4.4. Em contraste com a propriedade de limitação do operador linear integral K, que, como mostra o Exemplo 4.3.7 não garante que a imagem de C seja conservada pelo operador, caso este seja prolongado de C para L_∞, a propriedade de continuidade completa já garante essa proposição.

Capítulo 5

Operador integral linear em espaços com pesos C_α e $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}$

No captulo anterior, desenvolvemos o estudo das propriedades gerais do operador integral linear da forma

$$(Kx)(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

nos espaços sem peso $C[a,b]$ e $\mathrm{L}_\infty[a,b]$.

Neste capítulo, vamos generalizar os resultados obtidos sobre este operador para os espaços com peso $C_\alpha = C_\alpha[a,b]$ e $\mathrm{L}_{\infty,\alpha} = \mathrm{L}_{\infty,\alpha}[a,b]$, onde α é uma função peso. Utilizaremos a abordagem proposta na secção 3.3 do captulo 3, que estabelece uma conexão entre operadores em geral nos espaços sem e com peso.

Consideremos o operador $\tilde{K}$, definido por:

$$(\tilde{K}x)(t) = \beta K \alpha^{-1} x = \beta(t) \int_a^b k(t,s)\alpha^{-1}(s)x(s)ds. \tag{5.1}$$

e $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ duas funções mensuráveis (sendo contínuas para o caso dos espaços C_α e C_β).

5.1 Actuação e limitação

Introduzimos a grandeza

$$\|k\|_v = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |\beta(t)\alpha^{-1}(s)k(t,s)|\, ds.$$

Lema 5.1.1. *Se* $\forall t \in [a,b]$ *a função* $\beta(t)\alpha^{-1}(\cdot)k(t,\cdot)$ *é mensurável, então a grandeza* $\|k\|_v \in [0,+\infty]$ *é definida correctamente.*

Demonstração. Segue directamente das Proposições 2.2.42 e 2.2.44.

□

Teorema 5.1.2. *Seja* K *um operador que actua de* C_α *em* C_β *e* $\tilde{K}$ *(definido em (5.1)) um operador que actua de* C *em* C *(segundo o Teorema 3.3.1). Então,* K *é limitado se e somente se o operador* $\tilde{K}$ *é limitado, isto é, se e somente ae* $\|k\|_v < \infty$*. Mais ainda,* $\|K\| = \|k\|_v$*.*

Demonstração. Seja K um operador que actua de C_α em C_β e limitado é equivalente. Pelo ponto 2. do Teorema 3.3.3 $\tilde{K}$ é, por equivalência, limitado, pelo Teorema 4.3.3, $\|\tilde{K}\| = \|k\|_v < \infty$. Pelo ponto 3. do Teorema 3.3.3 $\|K\| = \|\tilde{K}\| \Rightarrow \|K\| = \|k\|_v$.

□

Teorema 5.1.3. *Se* $K \in \mathcal{L}(C_\alpha, C_\beta)$ *então* $K \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_{\infty,\alpha}, L_{\infty,\beta})$ *e*

$$\|K\|_{\mathrm{L}_{\infty,\alpha}\to L_{\infty,\beta}} = \|K\|_{C_\alpha\to C_\beta} = \|k\|_v.$$

Demonstração. Seja $K \in \mathcal{L}(C_\alpha, C_\beta)$. Pelos pomtos 1. e 2. do Teorema 3.3.3 $\tilde{K} \in \mathcal{L}(C, C)$. Pelo Teorema 4.3.4 $\tilde{K} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_\infty, L_\infty)$ e

$$\|\tilde{K}\|_{\mathrm{L}_\infty\to L_\infty} = \|\tilde{K}\|_{C\to C} = \|k\|_v.$$

Daqui, pelos pontos 1. e 2. do Teorema 3.3.3 $K \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_{\infty,\alpha}, L_{\infty,\beta})$ e pelo pomto 3. do mesmo Teorema

$$\|K\|_{\mathrm{L}_{\infty,\alpha}\to L_{\infty,\beta}} = \|K\|_{C_\alpha\to C_\beta} = \|\tilde{K}\|_{\mathrm{L}_\infty\to L_\infty} = \|\tilde{K}\|_{C\to C} = \|k\|_v.$$

□

Teorema 5.1.4. *O operador* K *actua de* $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}$ *em* C_β *e é contínuo (limitado) se e somente se satisfaz simultaneamente as condições:*

1. $\forall D \in \Sigma : \displaystyle\int_D \beta(\cdot)\alpha^{-1}(s)k(\cdot,s)ds \in C;$

2. $\|k\|_v = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |\beta(t)\alpha^{-1}(s)k(s,t)|ds < \infty.$

Mais ainda, se $K \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_{\infty,\alpha}, C_\beta)$*, então* $\|K\| = \|k\|_v$*.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.5 o operador $\tilde{K}$ actua de L_∞ em C e é contínuo (limitado). Pelo Teorema 3.3.1 K actua de $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}$ em C_β e pelo ponto 2. do Teorema 3.3.3 é contínuo (limitado). Reciprocamente, se K actua de L_α em C_β. □

5.2 Continuidade completa

Teorema 5.2.1. *Seja K um operador que actua de C_α em C_β e $\tilde{K}$ (definido em (5.1)) um operador que actua de C em C (segundo o Teorema 3.3.1). O operador K é completamente contínuo, se e somente se o operador $\tilde{K}$ é completamente contínuo, isto é, se e somente se*

$$\forall t_0 \in [a,b] \quad \lim_{t\to t_0} \int_a^b |\beta(t)\alpha^{-1}(s)k(t,s) - \beta(t_0)\alpha^{-1}(s)k(t_0,s)|ds = 0.$$

Demonstração. Segue directamente dos pontos 1 e 6 do Teorema 3.3.3 e do Teorema 4.4.1, respectivamente.

□

Teorema 5.2.2. *Seja K um operador que actua de $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}$ em C_β e $\tilde{K}$ (definido em (5.1)) um operador que actua de L_∞ em C (segundo o Teorema 3.3.1). O operador K é completamente contínuo se e somente se o operador $\tilde{K}$ é completamente contínuo, isto é, se e somente se*

$$\forall t_0 \in [a,b] \quad \lim_{t\to t_0} \int_a^b |\beta(t)\alpha^{-1}(s)k(t,s) - \beta(t_0)\alpha^{-1}(s)k(t_0,s)|ds = 0.$$

Demonstração. Segue directamente dos pontos 1 e 6 do Teorema 3.3.3 e do Teorema 4.4.1, respectivamente.

□

Teorema 5.2.3. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O operador K actua de C_α em C_β e é completamente contínuo;*

2. *O operador K actua de $\mathrm{L}_{\infty,\alpha}$ em C_β e é completamente contínuo;*

3. *Qualquer que seja $t_0 \in [a,b]$ são válidas as seguintes condições:*

   (a) A função $\beta(t_0)\alpha^{-1}(\cdot)k(t_0,\cdot)$ é integrável em $[a,b]$,

   (b) $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \int_a^b |\beta(t)\alpha^{-1}(s)k(t,s) - \beta(t_0)\alpha^{-1}(s)k(t_0,s)|ds = 0.$

Demonstração. Pelo Teorema 4.4.3 a afirmação 3. deste teorema equivale a cada uma das seguintes afirmações:

1. O operador $\tilde{K}$ actua de C em C e é completamente contínuo;

2. O operador $\tilde{K}$ actua de L_∞ em C e é completamente contínuo;

Pelo Teorema 3.3.1 e pelos pontos 1. e 6. do Teorema 3.3.3 essas duas afirmações são, respectivamente, equivalente as afirmações 1. e 2. do teorema que está sendo demontrado.

□

Conclusões e Recomendações

Conclusões

Inicialmente, foram apresentados os fundamentos teóricos da Teoria de Medida, da Integral de Lebesgue e da Análise Funcional, que constituem a base necessária para o estudo rigoroso de operadores integrais em espaços normados e, particularmente, em espaços de Banach. Em seguida, foram descritos os espaços com peso e estabelecida uma ligação entre operadores definidos em espaços clássicos e os correspondentes operadores em espaços com peso.

No desenvolvimento central do trabalho, foram obtidos critérios de actuação e limitação do operador integral linear em espaços com peso, expressos em termos do núcleo $k(t,s)$ e da função peso α. Além disso, foram determinadas expressões para a norma do operador e estabelecidas condiçes necessárias e suficientes para a continuidade completa do operador nesses espaços.

Os resultados obtidos generalizam propriedades clássicas conhecidas para os espaços $C[a,b]$ e $\mathrm{L}_\infty[a,b]$, mostrando que a introdução de funções peso, ampliando o enquadramento teórico sem comprometer propriedades fundamentais como limitação, continuidade e compacidade, desde que sejam satisfeitas condições adequadas sobre o núcleo e a função peso.

Conclui-se, portanto, que a abordagem desenvolvida permite estender de forma consistente a teoria dos operadores integrais lineares para espaços funcionais com peso, contribuindo para o aprofundamento da Análise Funcional e oferecendo suporte teórico para futuras aplicações em equações diferenciais funcionais, particularmente em contextos onde surgem singularidades ou comportamentos não uniformes.

Recomendações

Com base nos resultados alcançados, recomenda-se:

1. O aprofundamento do estudo de operadores integrais em espaços com peso no contexto dos espaços $L^p_\alpha(a,b)$, para $1 \leq p < \infty$, ampliando os resultados aqui estabelecidos.

2. A investigação de operadores integrais não lineares em espaços com peso, com vista à aplicação em equações diferenciais não lineares e problemas de contorno.

3. A aplicação dos resultados obtidos no estudo qualitativo de equações diferenciais funcionais singulares, nomeadamente na análise de existência, unicidade e dependência contínua das soluções.

4. O desenvolvimento da teoria espectral de operadores integrais lineares em espaços com peso, explorando propriedades relacionadas com autovalores e autovectores.

5. A continuidade de investigações que aprofundem a relação entre espaços sem peso e com peso, procurando generalizações em classes mais amplas de espaços de Banach.

Bibliografia

[1] Alves J.F. *Análise funcional.* Universidade do Porto, 2002.

[2] Alves M.J. *Equações diferenciais funcionais singulares de segunda ordem.* Estado Perm Imprensa Universitária, Perm, 2000.

[3] Alves M.J., Alves E.V, Munembe J.S,P., Nepomnyshchikh Y.V. *Funcionais integrais lineares e não lineares no espaço de funções vetoriais contínuas.* Vestn. Ross. Univ., Mat. 2023. Vol. 28, nº 142, pp. 111–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124 (em Russo).

[4] Alves M.J., Alves E.V., Munembe J.S.P., Nepomnyshchikh Y.V. *Operadores integrais lineares em espaços de funções vetoriais contínuas e essencialmente limitadas.* Vestn. Ross. Univ., Mat. 2024. Vol. 29, nº 145, pp. 5-19. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-5-19

[5] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Análise Funcional.* Pergamon Press Ltd. & "Nauka" Publishers, 1982.

[6] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional.* Editora Mir, Moscou, 1989.

[7] Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskij P.E. *Integral Operators in Spaces of Summable Functions.* Noordhoff, Leyden, 1976.

[8] Matusse A.J. *Operadores Locais nos Espaços de Funções Integráveis com Peso.* Trabalho de Leicenciatura, UEM, Maputo, 2010.

[9] Molchanova–Alves E., Alves M., Munembe J., Nepomnyshchikh Y. *Uniform continuity of the Urysohn operator in subespaces of the space of essentially bounded vector functions.* Functional Differential Equations. 2025. Vol. 32, nº 1-2, pp. 101-120.

[10] Nepomnyashchikh Y.V. *Operador de Urysohn nos Espaços de Funções Uniformemente Contínuas e Quase Periódicas.* PhD, Perm, Rússia, 1993 (em Russo).

[11] Nepomnyashchikh Y.V., Sambo T.A. *One example in the theory of linear integral operator.* In Proc. All-Russian Scient. Pract. Conf. with Intern. Particip., Perm State University, Perm, 2010, p. 282.

[12] Recai R.M. *Compacidade Relativa de Conjuntos nos Espaços de Funções Contínuas com Peso.* Trabalho de Leicenciatura, UEM, Maputo, 2024.

[13] Sambo T.A. *Operadores Integrais Lineares e Não-Lineares no Espaço de Funções Vetoriais Contínuas.* Trabalho de Leicenciatura, UEM, Maputo, 2009.

[14] Shragin I.V. *On one application of the theorems of Luzin, Tietze-Urysohn and the measurable choice theorem.* In: Boundary value problems, Interuniversity Collection of Scientific Papers, Perm Polytechnic Institute, Perm, 1979, pp. 171–175 (em Russo).

[15] Zabrejko P.P.,Koshelev A.I., Krasnosel'skii M.A., Mikhlin S.G., Rakovshchik L.S., Stecenko V.J. *Equações Integrais.* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975.