



FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Estatística

**Análise do Sistema de Atendimento no Centro de
Saúde da Liberdade aplicando a Teoria de Filas de
Espera e Simulação**

Autora: Carina Ismail Dala Cosmo

Maputo, 06 de Abril de 2026



FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Estatística

**Análise do Sistema de Atendimento no Centro de
Saúde da Liberdade aplicando a Teoria de Filas de
Espera e Simulação**

Autora: Carina Ismail Dala Cosmo
Supervisor: Prof. Doutor Alberto Mulenga, UNL

Maputo, 06 de Abril de 2026

Declaração de honra

Declaro por minha honra que o presente trabalho é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciada em Estatística, na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, 06 de Abril de 2026

Carina Ismail Dala Cosmo

Dedicatória

Dedico este trabalho, com profunda gratidão, aos meus queridos pais, Ismail Dala Cosmo e Lizete Raulino Mabjaia, pelo amor incondicional e pelos ensinamentos que sempre me guiaram. Estendo também esta dedicatória aos meus irmãos, Etelvina Cosmo, Iasser Cosmo, Gabriela Cosmo e Maida Cosmo, pelo apoio, companheirismo e incentivo em toda a caminhada.



Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pelo amor, protecção e sabedoria concedidas ao longo desta caminhada, permitindo-me superar os desafios e concluir mais esta etapa da minha vida académica.

Expresso também a minha profunda gratidão aos meus parentes, pelo amor incondicional, apoio constante e incentivo em todos os momentos. Sem o suporte, a confiança e a paciência deles, este trabalho não teria sido possível.

Agradeço, de forma especial, ao meu supervisor, Prof. Doutor Alberto Mulenga, pela sua dedicação e orientação ao longo da realização desta monografia. O seu acompanhamento, a sua disponibilidade e o seu espírito amável foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos, em especial o grupo Presente, agradeço pela amizade, companheirismo e palavras de encorajamento, que foram fundamentais para que eu tivesse ânimo e perseverança durante esta jornada.

Resumo

Em muitos serviços de atendimento, ocorrem filas de clientes por muito tempo à espera pelo serviço, significando que o sistema não está bem dimensionado. Este fenómeno de filas extensas e tempos de espera elevados, também ocorre no Centro de Saúde da Liberdade, na província de Maputo. O objectivo do estudo é analisar o sistema operacional de atendimento no Centro de Saúde da Liberdade na área de triagem de adultos. Os dados foram recolhidos medindo os tempos de chegada e de atendimento de cada utente em dois dias consecutivos. Para a análise aplicaram-se os modelos da teoria de filas de espera, técnicas de simulação de eventos discretos e os testes Qui-Quadrado e Kolmogorov-Smirnov. Os resultados mostraram que as chegadas seguem a distribuição de Poisson e os tempos de atendimento ajustam-se à distribuição Gama, classificando o sistema como o modelo $(M/G/2)$. Da análise dos parâmetros do sistema, obteve-se a taxa de utilização de 43,75% e tempo médio de espera de 0,55 minutos. A alta variabilidade das chegadas ($C_v = 140\%$) explica os picos de congestionamento. A simulação revelou que a actualização da taxa de atendimento de 20 clientes por hora é mais eficiente do que adicionar servidores, diminuindo o tempo médio no sistema para 3,30 minutos. Do estudo conclui-se que a melhoria do processo interno de atendimento é a estratégia mais eficaz para reduzir as filas e aumentar a eficiência operacional.

Palavras-chave: Distribuição de Poisson, Taxa de utilização, Teoria de filas, Tempo médio de espera e Simulação.

Abstract

In many service systems, long customer queues occur as clients wait extended periods to be served, indicating that the system is not properly dimensioned. This phenomenon of long queues and high waiting times also occurs at the Liberdade Health Center in Maputo Province. The aim of this study is to analyze the operational service system at the Liberdade Health Center in the adult triage area. Data were collected by measuring the arrival and service times of each patient over two consecutive days. For the analysis, queueing theory models, discrete-event simulation techniques, and the Chi-Square and Kolmogorov–Smirnov tests were applied. The results showed that arrivals follow a Poisson distribution and service times fit a Gamma distribution, classifying the system as the $M/G/2$ model. From the analysis of the system parameters, a utilization of 43.75% and an average waiting time of 0.55 minutes were obtained. The high variability of arrivals ($C_v = 140\%$) explains the congestion peaks. The simulation revealed that increasing the service rate to 20 clients per hour is more efficient than adding servers, reducing the average time in the system to 3.30 minutes. The study concludes that improving the internal service process is the most effective strategy for reducing queues and increasing operational efficiency.

Keywords: Average Waiting Time, Poisson Distribution, Queueing Theory, Simulation, Utilization Rate.

Lista de Abreviaturas

FIFO	<i>First-In, First-Out</i> (Primeiro a entrar, primeiro a sair)
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FDE	Função de Distribuição Empírica
FDA	Função de Distribuição Acumulada
KS	Kolmogorov–Smirnov
$M/M/1$	Modelo de fila com chegadas e atendimentos exponenciais e um servidor
$M/M/s$	Modelo de fila com chegadas e atendimentos exponenciais e múltiplos servidores
$M/G/2$	Modelo de fila com chegadas de Poisson e dois servidores com tempos gerais

Índice

Declaração de honra	i
Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Abreviaturas e Símbolos	vi
Lista de figuras	ix
Lista de tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Descrição do problema	2
1.3 Objectivos	2
1.3.1 Objectivo geral	2
1.3.2 Objectivos específicos	3
1.4 Relevância do estudo	3
1.5 Estrutura do trabalho	3
2 Revisão da literatura	5
2.1 Conceitos básicos de filas de espera	5
2.2 Distribuições de probabilidade	6
2.2.1 Distribuição normal	6
2.2.2 Distribuição de Poisson	7
2.2.3 Distribuição Exponencial	9
2.2.4 Distribuição Gama	9
2.3 Testes de ajustamento a distribuições	10
2.3.1 O teste de Kolmogorov-Smirnov	11
2.3.2 O teste de Qui-Quadrado	11
2.4 Sistema de filas de espera	13
2.4.1 Elementos associados ao funcionamento das filas de espera	14
2.4.2 Estrutura de sistemas de filas de espera	16
2.4.3 Medidas de desempenho nos sistemas de filas de espera	18
2.4.4 Descrição dos modelos de filas não Markovianos	22

2.4.5	Indicadores de variabilidade e desempenho em sistemas de filas	24
2.5	Simulação	25
2.5.1	Tipos de simulação	25
2.5.2	Etapas do processo de realização de uma simulação	26
2.5.3	Aplicações da simulação	27
3	Material e métodos	29
3.1	Material	29
3.2	Métodos	30
3.2.1	Análise exploratória dos dados	30
3.2.2	Análise da distribuição dos dados	32
3.2.3	Identificação do modelo do sistema de filas de espera do Centro de Saúde da Liberdade	34
4	Resultados e discussão	35
4.1	Descrição dos dados	35
4.2	Análise da distribuição de probabilidade das chegadas e atendimentos dos utentes do Centro de Saúde da Liberdade	38
4.3	Resultados dos sistemas de filas de espera	41
4.3.1	Análise da variabilidade do Centro de Saúde da Liberdade	43
4.3.2	Simulação de cenários alternativos para o Centro de Saúde da Liberdade	44
4.4	Discussão dos resultados	45
5	Conclusões e recomendações	47
5.1	Conclusões	47
5.2	Recomendações	48
	Referências	49

Lista de Figuras

2.1	Estrutura básica de um sistema de filas.	17
2.2	Sistema de uma fila e um canal de atendimento.	17
2.3	Sistema de uma fila e atendimento sequencial.	17
2.4	Sistema de uma fila com dois servidores.	17
2.5	Sistema de 3 filas com 3 servidores.	18
3.1	Actual sistema de atendimento do Centro de Saúde da Liberdade.	34
4.1	Distribuições ajustadas dos tempos de atendimento no primeiro e segundo dia.	41
4.2	Comparações dos ajustamentos a distribuição dos tempos de atendimento no primeiro e segundo dia.	41

Lista de Tabelas

3.1	Descrição das variáveis.	30
4.1	Distribuição de frequências dos tempos de chegadas no intervalo de 15 minutos no primeiro e segundo dias.	36
4.2	Distribuição de frequências dos tempos de atendimento no primeiro e segundo dias.	37
4.3	Estatísticas dos tempos de chegadas e atendimentos.	37
4.4	Teste de Qui-Quadrado para o ajustamento das chegadas a distribuição de Poisson.	38
4.5	Teste de Qui-Quadrado para o ajustamento da distribuição dos atendimentos à Exponencial.	38
4.6	Resumo dos testes de Qui-quadrado para ajustamento das distribuições.	39
4.7	Ajustes de distribuição e teste de Kolmogorov-Smirnov para o primeiro dia.	39
4.8	Ajustes de distribuição e teste de Kolmogorov-Smirnov para o segundo dia.	40
4.9	Medidas de desempenho do sistema de atendimento do Centro de Saúde da Liberdade.	42
4.10	Coeficiente de variação e taxa de utilização.	43
4.11	Indicadores de desempenho para os cenários simulados.	45
.1	Distribuição do número de chegadas para o primeiro dia.	53
.2	Distribuição do número de chegadas para o segundo dia.	53
.3	Distribuição de chegadas, probabilidades e teste qui quadrado para o primeiro dia.	54
.4	Distribuição de chegadas, probabilidades e teste qui quadrado para o segundo dia.	54

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

A análise do sistema de atendimento em Centros de Saúde tem ganhado relevância no sector da saúde pública. Em ambientes com grande fluxo de pacientes, é essencial que o sistema de atendimento responda rapidamente, a fim de evitar longas filas de espera e melhorar a eficiência dos serviços prestados. O estudo da teoria de filas, também conhecido como teoria das filas de espera, é essencial para entender e otimizar o atendimento em diversos sectores de serviços, incluindo o sector público. Esta teoria fornece um conjunto de ferramentas matemáticas e modelos que permitem analisar sistemas de espera e prever o comportamento das filas, auxiliando na tomada de decisões estratégicas para melhorar a eficiência de atendimento.

É comum, em muitas empresas de prestação de serviços encontrar situações que requerem filas de espera. Por exemplo, nas deslocações diárias, quando os passageiros esperam o autocarro, nos bancos, nos hospitais, cinema, etc. Nesses locais está-se sujeito a filas de espera. As filas de espera são um fenómeno que ocorre no dia a dia, onde existem prestadores de serviços e que haja um número de clientes superior ao número de servidores.

Segundo Muller (2011), uma situação de fila de espera é caracterizada por um fluxo de clientes ou utentes que chegam a um ou mais postos de serviço, tais como supermercados, bancos, correios, portagem, cinema, a fim de solicitar um serviço. Dessa forma, a Teoria das Filas procura por meio de análises matemáticas encontrar um ponto de equilíbrio que satisfaça o cliente e seja viável economicamente para a entidade prestadora do serviço.

A aplicação da simulação é importante na teoria de filas, especialmente para avaliar as mudanças no sistema sem a necessidade de modificações reais. A simulação, quando combinada com a teoria de filas, permite criar modelos mais realistas do sistema de atendimento. Segundo Jun, Jacobson e Swisher (1999), a simulação pode capturar a variabilidade e a complexidade dos processos de saúde, oferecendo uma visão relativa ao desempenho do sistema sob diferentes cenários.

1.2 Descrição do problema

Nos serviços de atendimento, as filas são uma ocorrência comum e, muitas vezes inevitáveis. De salientar que longas esperas podem levar à desistência de alguns utentes e gerar insatisfação, impactando negativamente a experiência geral. A ausência de filas de espera pode indicar eficiência no atendimento, mas também traz desafios, especialmente em locais onde a organização da espera é essencial. Sem filas, pode haver ociosidade de recursos, o que aumenta os custos operacionais e dificulta a previsibilidade da procura. Em ambientes onde as filas são necessárias, a falta de um sistema de espera causa desorganização, favorece atendimentos desordenados e prejudica a equidade. Em serviços como de saúde e o atendimento público, a falta de um sistema de espera compromete a transparência e a justiça na prestação de serviços. Assim, é fundamental avaliar se a ausência de filas resulta de uma otimização eficaz ou revela ineficiências ocultas. No Centro de Saúde da Liberdade, especialmente na triagem de adultos, mesmo com dois canais de atendimento disponíveis, as filas permanecem extensas e os tempos de espera são elevados. Esse problema não só causa descontentamento entre os utentes, como também pode estar relacionado à ineficiência dos processos de atendimento ou a outros factores que contribuem para a formação e duração das filas de espera.

Assim, é fundamental aplicar a teoria das filas para diagnosticar o funcionamento do sistema operacional, analisando se as longas esperas são causadas por ineficiência geral do processo de atendimento ou pelo alto fluxo da demanda, que compromete a satisfação dos utentes. Este trabalho visa aplicar a teoria das filas para diagnosticar o funcionamento do sistema operacional no Centro de Saúde da Liberdade, com foco na triagem de adultos. A análise será realizada com base em dados reais do sistema, que serão utilizados para simular o processo de atendimento. A simulação permitirá criar um modelo do sistema de filas, possibilitando a realização de diferentes cenários para em seguida escolher um, com um nível de desempenho desejado, isto é, que optimize em termos da operação do sistema e da satisfação dos utentes. Neste contexto, coloca-se a seguinte questão de pesquisa:

As extensas filas e os elevados tempos de espera observados são causados por ineficiência interna no processo de atendimento ou resultam do elevado fluxo da procura que ultrapassa a capacidade do sistema?

1.3 Objectivos

1.3.1 Objectivo geral

Analisar o sistema operacional de atendimento no Centro de Saúde da Liberdade na área de triagem de adultos.

1.3.2 Objectivos específicos

- Descrever o actual sistema de atendimento dos utentes no Centro de Saúde da Liberdade na triagem de adultos;
- Calcular os indicadores de desempenho do actual sistema de atendimento no Centro de Saúde da Liberdade na triagem de adultos;
- Testar mudanças no número de canais de atendimento, taxas de atendimento e calcular os indicadores de desempenho para cada caso simulado, para o Centro de Saúde da Liberdade;
- Comparar os vários modelos em termos de desempenho desejado e escolher o mais adequado.

1.4 Relevância do estudo

A análise do sistema de atendimento no Centro de Saúde da Liberdade, utilizando a teoria de filas e técnicas de simulação, é importante para a melhoria da eficiência e qualidade dos serviços de atendimento prestados pelo centro de Saúde. O presente estudo identificou possíveis soluções para o problema de longo tempo de espera, que os utentes do Centro de Saúde da Liberdade tem enfrentado, de modo a aumentar a satisfação dos utentes do centro. Depois de avaliar o desempenho do actual sistema e identificar possíveis alternativas através da simulação, realizou-se a comparação dos diferentes modelos de filas, como a alocação de recursos e a gestão dos canais de atendimento.

Aplicar a teoria de filas e técnicas de simulação no Centro de Saúde da Liberdade permite uma percepção e análise do sistema actual de atendimento, e ajuda para a melhoria de atendimento, que resulta na redução do tempo de espera para o atendimento, e contribui para um sistema de saúde mais eficiente. Com a realização de diferentes cenários e estratégias de gestão sem interromper as operações diárias do Centro de Saúde da Liberdade, pôde-se ajudar a prever o efeito das mudanças específicas e implementar soluções baseadas em dados concretos.

1.5 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos.

- O Capítulo 1, apresenta a introdução, destacando o problema de investigação, os principais objectivos do estudo e a sua relevância.
- No capítulo 2, são discutidos os fundamentos teóricos que sustentam o estudo. Inicialmente, na secção 2.1, são apresentados os conceitos básicos relacionados às filas de espera e sua importância no contexto de sistemas de atendimento. Em seguida, nas secções 2.2 e 2.3, descrevem-se as principais distribuições de probabilidade e os testes estatísticos de ajuste utilizados para avaliar a adequação de modelos probabilísticos. Na secção 2.4, é abordado o

funcionamento dos sistemas de filas de espera, incluindo a estrutura, medidas de desempenho e a descrição de modelos Markovianos e não Markovianos. Nesta secção também apresentam-se os indicadores de variabilidade e desempenho, ligando a teoria ao impacto dos picos de chegada e à taxa de utilização efectiva. Por fim, na secção 2.5, discute-se o conceito de simulação, seus tipos, etapas do processo de realização e algumas aplicações práticas.

- No capítulo 3, descrevem-se os materiais e métodos utilizados no estudo. Na secção 3.1 apresentam-se os recursos e dados necessários para a análise. Na secção 3.2 expõem-se as etapas metodológicas, que incluem a recolha e análise exploratória dos dados, a análise da sua distribuição, bem como a identificação do actual modelo de filas de espera aplicado ao sistema de atendimento do Centro de Saúde da Liberdade.
- O Capítulo 4, apresenta os resultados obtidos a partir da análise dos dados recolhidos no Centro de Saúde da Liberdade. Na secção 4.1, são descritos os dados referentes às chegadas de utentes e aos tempos de atendimento, incluindo a distribuição do número de chegadas em intervalos de 15 minutos, bem como as estatísticas descritivas correspondentes. Em seguida, na secção 4.2, é realizada a análise das distribuições de probabilidade das chegadas e dos tempos de atendimento para verificar a adequação das distribuições bem como os ajustamentos de distribuições mais apropriados para os dados de atendimento e os gráficos de distribuições ajustadas. Por fim, na secção 4.3, discutem-se os resultados obtidos nos sistemas de filas de espera, avaliando o desempenho de atendimento e destacando as implicações práticas para o dimensionamento de recursos e optimização do fluxo de utentes.
- No capítulo 5, apresentam-se as conclusões e recomendações. São sintetizados os principais resultados, relacionando aos objectivos definidos no Capítulo 1. Também são propostas recomendações para a gestão de atendimento no Centro de Saúde da Liberdade, incluindo estratégias de mitigação da variabilidade, ajuste no número de servidores e uso de simulações como apoio à tomada de decisão.
- Por fim, reúnem-se as referências que sustentam teoricamente o trabalho, bem como o anexo e o apêndice, que apresentam os materiais complementares que apoiam a investigação desenvolvida.

Capítulo 2

Revisão da literatura

2.1 Conceitos básicos de filas de espera

De acordo com o Grande Dicionário da Língua Portuguesa (Porto Editora, 2010), o termo “utente” deriva do latim *utente*, que significa pessoa que utiliza bens, serviços públicos ou privados.

Segundo Tomasi (2007), um atendimento refere-se ao processo de interacção entre uma organização (empresa, instituição, etc.) e o cliente ou utente, com o objectivo de atender suas necessidades ou solucionar problemas. O atendimento pode ser prestado de diversas formas, como presencial, telefónico, online, entre outros. A qualidade de atendimento é essencial para a satisfação do cliente e a fidelização.

Segundo Pelissari et al. (2012), um serviço é uma série de interacções entre o cliente e os recursos humanos, físicos e tecnológicos da entidade prestadora. O serviço é, por natureza, intangível, ou seja, não resulta num produto físico, mas sim num benefício ou valor entregue ao cliente, como por exemplo, consultas médicas, serviços de telecomunicações, transporte, entre outros.

Segundo Moraes e Silva (2021), a gestão de filas, refere-se ao processo de organizar e controlar o fluxo de pessoas ou solicitações em uma fila, para que o atendimento seja realizado de forma eficiente e ordenada. A gestão de filas é crucial em locais como bancos, hospitais, supermercados e empresas de serviços, para garantir que os clientes sejam atendidos no menor tempo possível e sem frustração. Existem diversas técnicas e tecnologias utilizadas para otimizar esse processo, como sistemas de senhas, softwares de gestão de filas e aplicativos digitais. Os sistemas de senhas, permitem organizar o atendimento por ordem de chegada ou prioridade, evitando conflitos e desorganização, os softwares de gestão possibilitam monitorar o tempo médio de espera, identificar gargalos no atendimento e auxiliar na tomada de decisões. Além disso, aplicativos móveis permitem que os usuários acompanhem a fila, reduzindo a necessidade de permanência física no local.

2.2 Distribuições de probabilidade

Segundo Ross (2014), uma distribuição de probabilidade é uma função que atribui a cada possível valor de uma variável aleatória a probabilidade correspondente à sua ocorrência, representando assim o comportamento aleatório de um fenômeno. Para variáveis aleatórias discretas, essa função é denominada função massa de probabilidade, e para variáveis contínuas, é descrita por uma função densidade de probabilidade. As distribuições de probabilidade são fundamentais para a análise e modelação de sistemas, permitindo a aplicação de métodos analíticos ou simulações para análise do desempenho e previsão do comportamento do sistema.

Segundo Hillier e Lieberman (2006), as operações de um sistema de filas dependem principalmente de duas distribuições probabilísticas: o tempo de atendimento e o intervalo entre chegadas. Na prática, essas distribuições podem ter várias formas, desde que não contenham valores negativos.

Para criar um modelo de filas que seja fiel ao sistema real, é importante definir como são essas distribuições, escolher distribuições que representem bem o sistema, que sejam simples, para permitir análises e previsões concretas do desempenho como tempos de espera, tamanho médio da fila e taxa de ocupação do servidor.

Modelar as chegadas com processos de Poisson, e os tempos de serviço podem seguir distribuições exponencial, Erlang, ou outras, conforme o caso. Isso ajuda a estimar medidas para verificar o nível de otimidade do sistema.

2.2.1 Distribuição normal

De acordo com Montgomery e Runger (2018), a distribuição normal ou Gaussiana, é uma distribuição de probabilidade contínua, caracterizada por sua curva simétrica em formato de sino. Ela é definida por dois parâmetros: a média (μ), que é o parâmetro que representa a localização da distribuição, e o desvio padrão (σ), que é o parâmetro de dispersão dos dados ao redor da média.

Segundo Casella e Berger (2002), a função densidade de probabilidade (FDP) da distribuição normal é dada pela expressão (2.1).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

Onde:

- μ é a média ou valor esperado da variável aleatória X .
- σ^2 é a variância da variável aleatória X , que mede a dispersão dos valores em torno da média.

Na teoria de filas, a sua aplicação está associada principalmente ao Teorema Central do Limite, segundo o qual a soma ou média de um grande número de variáveis aleatórias independentes e

identicamente distribuídas tende a seguir uma distribuição normal, independentemente das distribuições originais dessas variáveis (Casella e Berger, 2002). Assim, embora os tempos de chegada e de atendimento sejam frequentemente modelados por outras distribuições, como a exponencial e a de Poisson, a distribuição normal é utilizada para aproximar o comportamento médio do sistema, permitindo análises estatísticas e previsões sobre o tempo de espera e o desempenho do atendimento.

Padronização e cálculo de probabilidades na distribuição normal

Para transformar uma variável aleatória contínua X , que segue uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ , numa distribuição normal padrão com média 0 e desvio padrão 1, utiliza-se a seguinte transformação:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Esta transformação é denominada padronização e permite utilizar a tabela da distribuição normal padrão para o cálculo de probabilidades.

Seja $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, a probabilidade de X estar entre dois valores a e b pode ser calculada transformando X em Z , através da fórmula da padronização:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Segundo Walpole et al.(2008), uma distribuição normal tem as seguintes propriedades:

1. A média, a mediana e a moda são iguais. A moda, que corresponde ao ponto no eixo horizontal onde a curva atinge o máximo, ocorre quando $x = \mu$.
2. A curva normal tem um formato de sino e é simétrica em torno da média μ . Ou seja, os valores equidistantes da média apresentam a mesma densidade.
3. A curva apresenta pontos de inflexão em $\mu \pm z \times \sigma$. É côncava para baixo entre estes pontos
4. A curva aproxima-se do eixo x à medida que se afasta da média, mas nunca o toca.

2.2.2 Distribuição de Poisson

Segundo Ross (2014), a distribuição de Poisson é uma distribuição discreta utilizada para representar a quantidade de vezes, ou seja o número de ocorrências de um evento dentro de um intervalo de tempo ou espaço, quando essas ocorrências são independentes e acontecem com uma taxa constante. A distribuição de Poisson é utilizada em modelos de filas para descrever o número de chegadas em um intervalo específico de tempo. Ela é fundamentada em um único parâmetro, λ , que representa

a taxa média de ocorrências por unidade de tempo. Quando uma variável aleatória segue essa distribuição, a probabilidade de observar um determinado número de ocorrências em um intervalo de tempo t pode ser expressa por uma fórmula baseada nesse parâmetro.

$$P(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad (2.2)$$

Onde:

- x é o número de ocorrências no intervalo t ,
- $\lambda = n \times p$ é a taxa média por unidade de tempo,
- t é o intervalo de tempo analisado,
- O termo λt representa a média de ocorrências dentro do intervalo t .

Uma variável aleatória X segue a distribuição de Poisson se sua probabilidade for dada por:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \lambda > 0 \quad (2.3)$$

onde:

- $P(X = x)$ é a probabilidade de ocorrerem x eventos em uma unidade de tempo, sendo λ a taxa média de ocorrências por unidade de tempo.
- A distribuição de Poisson é discreta e aplica-se somente a valores inteiros de x .

A média e variância de um variável aleatória que segue a distribuição de Poisson são: $E(x) = \lambda$ e $var(x) = \lambda$.

Segundo Walpole et al. (2008), a distribuição de Poisson tem as seguintes propriedades:

1. O número de ocorrências de um evento é independente do número de ocorrências de outro evento.
2. A probabilidade de que um único resultado ocorra durante um breve intervalo de tempo ou em uma pequena região é proporcional à extensão do intervalo de tempo ou ao tamanho da região, e não depende do número de resultados que ocorram fora desse intervalo de tempo ou dessa região.
3. A probabilidade de que mais de um resultado ocorra em um intervalo de tempo é muito pequena.

2.2.3 Distribuição Exponencial

Segundo Ross (2014), a distribuição exponencial é usada para modelar o tempo de espera até o próximo evento em um processo de Poisson. Ela é caracterizada por um único parâmetro, λ , que representa a taxa média de ocorrência de eventos por unidade de tempo. Uma variável aleatória X segue uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda > 0$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } \lambda > 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Na equação (2.4), a variável aleatória x representa o tempo e λ é a taxa de chegada ou taxa de ocorrência de eventos por unidade de tempo, sendo o mesmo parâmetro utilizado na distribuição de Poisson. A função de distribuição acumulada da variável aleatória X é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (2.5)$$

A média e variância da distribuição são dadas por: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

2.2.4 Distribuição Gama

Segundo Carreira et.al (2002), a distribuição Gama é uma generalização da distribuição exponencial, utilizando a função Gama, cuja definição é dada pela integral:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad \text{para } \alpha > 1 \quad (2.6)$$

A função Gama possui a propriedade recursiva: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.

Ainda segundo Carreira et.al (2002), uma variável aleatória X segue uma distribuição Gama com parâmetros t e λ se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\lambda^t}{\Gamma(\alpha)} x^{t-1} e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Distribuições relacionadas à distribuição Gama

De acordo com Walpole (2008) algumas distribuições conhecidas podem ser obtidas como casos especiais da distribuição Gama, tais como:

Distribuição Exponencial: A distribuição Exponencial é um caso especial da distribuição Gama quando o parâmetro de forma $\alpha = 1$. Sua função densidade de probabilidade (PDF) é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (2.8)$$

Neste caso, o parâmetro λ representa a taxa de ocorrência de eventos em um processo de Poisson.

Distribuição Qui-Quadrado: A distribuição Qui-Quadrado (χ^2) também é um caso particular da distribuição Gama. Se os parâmetros da distribuição Gama forem definidos como: $\beta = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{k}{2}$, onde k representa o número de graus de liberdade, então a distribuição Gamma assume a forma da distribuição Qui-Quadrado. Sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0. \quad (2.9)$$

A distribuição Qui-Quadrado é frequentemente utilizada em testes estatísticos, como o teste de independência e o teste de ajuste de modelos.

Distribuição Weibull

A distribuição Weibull é uma distribuição de probabilidade contínua utilizada na modelação de tempos de vida, falhas de componentes e análise de confiabilidade. Ela generaliza a distribuição exponencial e está relacionada à distribuição Gama por meio de uma transformação de variáveis.

Seja X uma variável aleatória com distribuição Weibull com parâmetros α e β , sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.10)$$

Onde x representa a variável aleatória (tempo ou valor observado); λ é o parâmetro de escala, que define a dispersão dos dados; e k é o parâmetro de forma, que determina o formato da distribuição e o comportamento da taxa de falha.

2.3 Testes de ajustamento a distribuições

Os testes de ajustamento a distribuições são ferramentas estatísticas utilizadas para avaliar se um conjunto de dados segue uma específica distribuição teórica, como a normal, exponencial ou uniforme. Esses testes permitem verificar a hipótese de que uma amostra aleatória foi extraída de uma população com uma distribuição específica.

Entre os testes de ajustamento mais comuns estão o teste do qui-quadrado, o teste de Kolmogorov-Smirnov e o teste de Lilliefors. O teste do qui-quadrado, proposto por Karl Pearson, é utilizado para verificar a adequação de uma distribuição teórica a distribuição empírica dos dados da amostra.

A seguir vai-se apresentar os testes de Kolmogorov Smirnov (KS) e teste de Qui Quadrado.

2.3.1 O teste de Kolmogorov-Smirnov

Segundo Berger (2005), o teste de Kolmogorov-Smirnov é um teste estatístico não paramétrico, é utilizado para testar a qualidade do ajuste de um conjunto de dados a uma distribuição teórica, comparando a função de distribuição empírica (FDE) de uma amostra com a função de distribuição acumulada (FDA) de uma distribuição teórica. A principal aplicação deste teste é para verificar se uma amostra de dados segue a distribuição normal.

De acordo com Porto (2017), o teste de Kolmogorov-Smirnov mede a maior discrepância absoluta entre a função de distribuição acumulada assumida (teórica) e a função de distribuição acumulada empírica obtida a partir dos dados observados, definida pela estatística D_n , expressa como:

$$D_n = \sup |F_n(x) - F(x)| \quad (2.11)$$

onde:

- $F_n(x)$ representa a função de distribuição empírica da amostra,
- $F(x)$ é a função de distribuição teórica da população,
- $\sup$ denota o supremo da diferença absoluta ao longo de todos os valores de x .

As hipóteses para o teste de Kolmogorov-Smirnov são formuladas da seguinte forma:

- **Hipótese nula (H_0):** A amostra segue a distribuição teórica, $F(x)$, ou seja, as frequências observadas não possuem diferenças significativas das frequências esperadas.
- **Hipótese alternativa (H_1):** A amostra não segue a distribuição teórica $F(x)$, ou seja, as frequências observadas são significativamente diferentes das frequências esperadas.

Caso o valor de D_n exceda um limite crítico tabelado, rejeita-se a hipótese nula H_0 , indicando que a amostra não segue a distribuição teórica esperada, caso contrário, aceita-se a hipótese nula, significando que os dados seguem a distribuição em análise.

2.3.2 O teste de Qui-Quadrado

O teste de Qui-quadrado é utilizado para verificar se o conjunto de dados se adequam a uma distribuição teórica. Segundo Ugoni e Walker (1995), o teste Qui-quadrado é usado para medir a associação entre duas variáveis categóricas.

Segundo Mulenga (2018), o teste de Qui-quadrado para o ajustamento de frequências consiste em verificar se há diferenças significativas entre as frequências observadas e as frequências esperadas ou teóricas.

- As frequências observadas devem ser obtidas usando uma amostra aleatória.
- Cada frequência esperada deve ser maior ou igual a 5.
- **Hipótese nula (H_0):** Os dados seguem a distribuição teórica esperada.
- **Hipótese alternativa (H_1):** Os dados não seguem a distribuição teórica esperada.

Matematicamente, o valor da estatística do teste é calculado pela expressão (2.14).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad (2.12)$$

onde:

- o_i representa a frequência observada na classe i ;
- e_i é a frequência esperada na mesma classe;
- k é o número total de classes consideradas.

A fórmula (2.14), pode ser aplicada somente para verificar se os dados seguem uma distribuição teórica.

Se o valor de χ^2 for menor que o valor crítico, não se rejeita a hipótese nula, significando que os dados seguem a disposição teórica proposta.

Teste Qui-Quadrado de Associação

O teste de Qui-quadrado para independência, é utilizado para verificar se existe relação entre duas variáveis categóricas. Ele avalia se a ocorrência de uma categoria de uma variável influencia a probabilidade de ocorrência das categorias da outra variável.

Para aplicar o teste, os dados devem ser organizados numa tabela de contingência composta por duas ou mais categorias para cada variável. As condições de aplicação incluem a presença de frequências esperadas adequadas em cada célula da tabela.

As hipóteses para o teste de Qui-Quadrado de associação são formuladas da seguinte forma:

- **Hipótese nula (H_0):** As variáveis são independentes, ou seja, não há associação entre as duas variáveis categóricas.
- **Hipótese alternativa (H_1):** As variáveis não são independentes, ou seja há associação entre as duas variáveis categóricas.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad (2.13)$$

onde:

- O_{ij} é a frequência observada na célula da linha i e coluna j ;

- E_{ij} é a frequência esperada, dada por:

$$E_{ij} = \frac{(\text{soma da linha } i) \times (\text{soma da coluna } j)}{\text{total geral}}$$

- r é o número de linhas da tabela de contingência;
- c é o número de colunas da tabela de contingência.

O valor calculado de χ^2 é comparado a um valor crítico tabelado, obtido com base nos graus de liberdade $k=(l-1)(c-1)$ e no nível de significância adoptado (α). Se χ^2 for menor que o valor crítico, não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar a hipótese de que as variáveis são independentes. Caso contrário, a hipótese é rejeitada, indicando que as variáveis são dependentes, isto é, existe associação entre as variáveis categóricas em análise.

O uso do teste de Qui-quadrado na análise de filas permite validar modelos probabilísticos antes de sua aplicação prática, garantindo que as distribuições assumidas sejam representativas da realidade observada. Dessa forma, a aplicação correcta desse teste contribui para uma melhor modelação e análise de desempenho em sistemas de atendimento.

2.4 Sistema de filas de espera

Segundo Fogliatti e Mattos (2007), o sistema de filas pode ser definido como um processo no qual os utentes de uma determinada população chegam para receber um serviço, pelo qual esperam, se for necessário, e saem do sistema após o serviço ser prestado. Essa espera ocorre devido à demanda ser maior do que a capacidade de atendimento. Segundo Hillier e Lieberman (2013), o estudo da teoria de sistemas de filas de espera tem como objectivo calcular diversos indicadores de desempenho do sistema, possibilitando a realização de análises críticas para melhorar os serviços de uma organização.

De acordo com Prado (2006), a abordagem sobre a teoria das filas teve início em 1908, com Erlang, considerado o pai da teoria das filas, quando trabalhava em uma companhia telefónica, onde realizou um estudo sobre o congestionamento das linhas telefónicas da companhia. No entanto, somente a partir da Segunda Guerra Mundial (1939-1945), ela foi aplicada a outros problemas de filas.

Segundo Mendonça (2014), um sistema com fila é composto por utentes, canais ou postos de atendimento e por um espaço destinado para a espera. Os utentes chegam em um determinado tempo, caracterizado como processo de chegada, para serem atendidos em determinado ponto de atendimento. Enquanto os postos estão ocupados, os utentes aguardam em uma fila e, assim que um canal de serviço fica livre, um dos utentes é chamado para atendimento. Uma vez completado

o serviço, o utente sai do sistema.

Segundo Prado (2004), a teoria das filas racionaliza matematicamente a formação das filas e o comportamento de um sistema, cuja procura pode crescer continuamente. A aplicação destes modelos consiste na recolha e análise de dados referentes ao sistema, testando hipóteses sobre seu comportamento. Assim, a teoria das filas se tornou uma das principais técnicas de investigação operacional para abordagem de problemas de congestionamento nos sistemas.

2.4.1 Elementos associados ao funcionamento das filas de espera

Processo de chegada dos clientes

Segundo Arenales et al.(2007), o processo de chegada dos clientes indica o padrão de chegada dos clientes no sistema e ocorre de maneira aleatória. Esse processo é medido pelo número médio de chegadas por unidade de tempo ou pelo tempo médio entre chegadas sucessivas. A distribuição mais comum para a chegada dos clientes é a distribuição de Poisson, na qual os tempos entre chegadas são exponencialmente distribuídos. Ou seja, o número de clientes que chegam até um dado momento tem uma distribuição de Poisson com uma média de λ chegadas por unidade de tempo, e $1/\lambda$ é o tempo médio entre chegadas.

Tempo de serviço ou atendimento

O tempo de serviço é o tempo relacionado ao atendimento do cliente. É o intervalo de tempo que o cliente ficou realmente em atendimento. Uma distribuição de probabilidade é necessária para descrever a sequência de tempos de serviços dos clientes. Aplicam-se as considerações sobre a distribuição do processo de chegada ao tempo de serviço. As distribuições dos tempos de serviços são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. A taxa de serviço μ , corresponde ao número médio de clientes que são atendidos por cada servidor em cada unidade de tempo, e $1/\mu$ é o tempo médio de serviço a um cliente.

Processo de atendimento

Segundo Moreira (2007b), o processo de atendimento é especializado pelo comportamento do fluxo de utentes atendidos e sua caracterização análoga ao processo de chegadas. Usualmente, nos modelos de atendimento, usa-se o parâmetro μ , e assim como nos modelos de chegada, existem duas nomenclaturas comumente utilizadas, associadas a este parâmetro: número de atendimentos por unidade de tempo e o tempo decorrido entre dois atendimentos consecutivos. Cada uma dessas grandezas apresenta uma distribuição de probabilidade.

Número de canais de serviço

Segundo Fogliatti e Mattos (2007), os canais ou postos de serviços são os locais onde são atendidos os clientes ou seja, o número de servidores do sistema disponíveis para o atendimento dos clientes. Os modelos de atendimento podem apresentar diversas configurações: canal único, canal múltiplo, atendimento único, atendimento múltiplo. O canal único se configura por ter apenas uma unidade de atendimento, podendo ter um ou mais postos de atendimento, porém em série.

Capacidade do sistema

Segundo Andrade (2009), a capacidade do sistema em um modelo de filas corresponde ao número máximo de utentes que podem estar simultaneamente no sistema, considerando tanto os utentes em atendimento quanto aqueles na fila de espera. Fogliatti e Mattos (2007), classificaram os sistemas de filas em duas categorias principais com base na capacidade:

Capacidade infinita: sistemas onde não há restrições para a entrada de novas entidades no sistema, permitindo um número não limitado de utentes que podem estar no sistema para o atendimento;

Capacidade finita: sistemas que impõem um limite máximo de utentes. Quando esse limite é atingido, novas chegadas são bloqueadas ou desviadas para outro sistema.

Disciplina das filas

Segundo Winston (2004), a disciplina da fila descreve o método usado para determinar a ordem em que os clientes são seleccionados para serem atendidos. As principais disciplinas de atendimento incluem:

- FIFO (First-In, First-Out): a regra mais comum de atendimento é a que prioriza o cliente que chega primeiro, ou seja, o primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido. Essa disciplina é considerada a mais justa na maioria dos sistemas de atendimento.
- LIFO (Last-In, First-Out): o último cliente a chegar é o primeiro a ser atendido.
- Prioridade: em alguns sistemas, os clientes podem ser atendidos de acordo com a sua prioridade, como em sistemas de emergência médica, os doentes que apresentam maior gravidade da doença são os primeiros a serem atendidos.
- Atendimento aleatório (SIRO - Service In Random Order): a escolha dos clientes para serem atendidos é feita de forma aleatória.
- Algoritmo Round-Robin (RR): cada cliente recebe um tempo determinado para o atendimento, podendo este, voltar ao canal de atendimento depois de o abandonar, como acontece no estacionamento rotativo de automóveis.
- Disciplina Geral (GD - General Discipline): as filas não têm uma especificação clara sobre a ordem de atendimento. Porém esta poderá ser especificada mediante o ambiente, o número dos clientes e a quantidade de servidores.

- SJF (Shortest Job First): nesta disciplina são atendidos primeiro os clientes que exigem menos tempo de atendimento.

2.4.2 Estrutura de sistemas de filas de espera

Segundo Taha (2008), Silva (2010), Hillier e Lieberman (2013), um sistema de filas pode ser descrito como um processo de chegada de clientes para um determinado atendimento. Segundo Hillier e Lieberman (2006), um sistema de filas é aquele em que os clientes que necessitam de atendimento chegam ao longo do tempo por uma fonte de entrada. Esses clientes entram no sistema de filas e ficam à espera numa fila. Um membro da fila é selecionado para o atendimento por alguma regra conhecida como disciplina da fila. O atendimento necessário é, então, realizado para o cliente, após o qual o cliente deixa o sistema de filas.

A estrutura básica de um sistema de filas é composta pela fonte de clientes, pela fila e pelo canal de atendimento.

Clientes

Segundo Mulenga (2010), um cliente é cada unidade de chegada que requer atendimento que pode vir de uma fonte finita ou infinita. Os clientes podem ser pessoas, máquinas, peças, entre outros.

Fila de clientes ou fila de espera

Segundo Costa (2002), uma fila de espera é onde os clientes esperam até serem atendidos. Essas filas podem ser simples, quando se forma apenas uma fila mesmo que o sistema tenha vários canais de atendimento, e múltiplas quando cada canal de atendimento possui sua própria fila.

Canal de atendimento

Ainda segundo Mulenga (2010), um canal de atendimento, é o sistema que realiza o atendimento, e pode ter um ou mais canais de atendimento.

Servidores

Segundo Magalhães (1996), um servidor é o elemento do sistema de filas que realiza o atendimento ao cliente. Cada servidor tem uma taxa de serviço associada, que define a quantidade média de clientes que ele pode atender por unidade de tempo.

Embora o canal de atendimento e o servidor muitas vezes serem tratados de forma equivalente, canal de atendimento refere-se ao meio físico onde o serviço pode ser realizado, representa o espaço disponível para o atendimento, que pode estar ocupado ou livre, e pode existir sem a presença contínua de um servidor. E o servidor é quem efectivamente presta o serviço, seja uma pessoa, máquina ou sistema. Assim, enquanto o canal representa o local onde o atendimento pode ocorrer,

o servidor é o agente que o realiza.

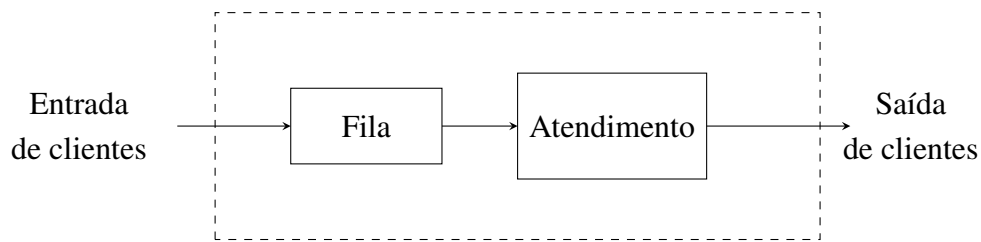


Figura 2.1: Estrutura básica de um sistema de filas.

Fonte: Hiller e Liberman (2006).

Existem diversos tipos de configurações de canais de atendimento em um sistema de filas:

- **Uma fila, um canal de atendimento:** este é um sistema em que existe apenas um único canal de atendimento com um servidor disponível para realizar todos os atendimentos.

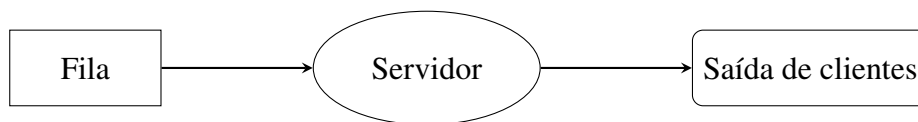


Figura 2.2: Sistema de uma fila e um canal de atendimento.

Fonte: Adaptado de Moreira (2007a).

- **Uma fila, um canal de atendimento sequencial:** os clientes passam por dois ou mais estágios de atendimento em sequência, sendo que cada fase representa uma etapa distinta do processo.

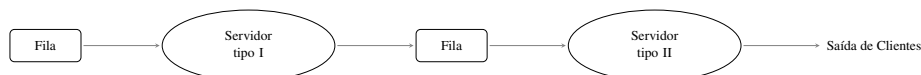


Figura 2.3: Sistema de uma fila e atendimento sequencial.

Fonte: Adaptado de Moreira (2007a).

- **Uma fila, vários canais de atendimento:** os clientes aguardam em uma única fila e são atendidos por dois ou mais servidores simultaneamente, permitindo que o atendimento ocorra em paralelo.

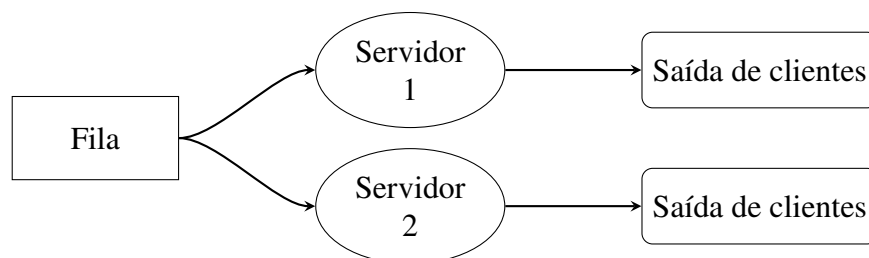


Figura 2.4: Sistema de uma fila com dois servidores.

Fonte: Adaptado de Moreira (2007a).

- **Múltiplos canais, múltiplos atendimentos:** o atendimento é feito simultaneamente por diferentes servidores, mas de maneira independente.

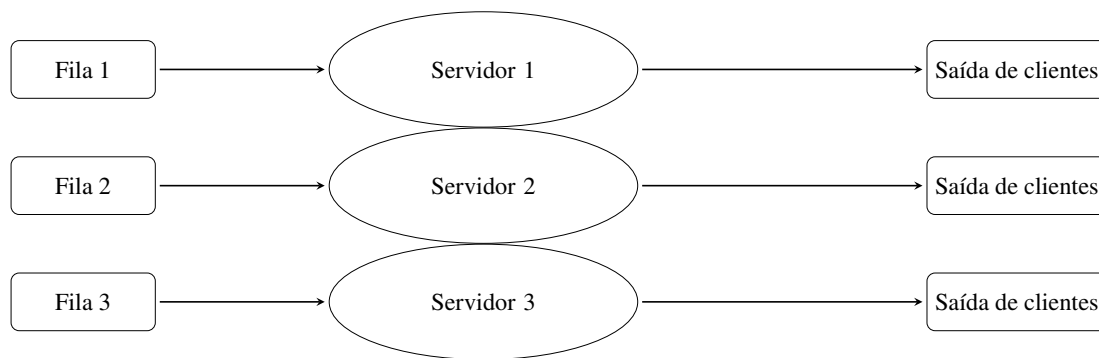


Figura 2.5: Sistema de 3 filas com 3 servidores.

Fonte: Adaptado de Moreira (2007a).

2.4.3 Medidas de desempenho nos sistemas de filas de espera

A eficiência de um sistema de filas pode ser avaliada por meio de indicadores de desempenho que fornecem informações essenciais para a tomada de decisão e otimização de recursos. A avaliação de desempenho de um sistema de filas consiste em obter dados quantitativos referentes ao número de clientes atendidos, número de pedidos feitos, o tempo gasto por cada cliente no sistema, entre outros, que possam subsidiar a análise operacional e a experimentação de alternativas para a otimização.

Conforme Taha (2004), Mulenga (2010) e Hillier e Lieberman (2006), as principais medidas utilizadas para medir o desempenho de sistemas de filas são as seguintes:

- **Taxa de chegada (λ):** é a taxa média de chegada dos clientes no sistema, geralmente expressa como o número médio de clientes que chegam ao sistema por unidade de tempo.
- **Taxa de serviço (μ):** é a taxa média de atendimento dos servidores, ou seja, a quantidade média de clientes atendidos por unidade de tempo.
- **Número médio de clientes na fila (L_q):** é o número médio de clientes que estão na fila aguardando o atendimento.
- **Número médio de clientes no sistema (L_s):** é o número médio de clientes que estão no sistema, seja sendo atendidos ou aguardando o atendimento.
- **Tempo médio de espera na fila (W_q):** é o tempo médio que um cliente espera na fila antes de ser atendido.
- **Tempo médio no sistema (W_s):** é o tempo médio que um cliente leva desde a chegada até a saída do sistema.
- **Probabilidade de espera na fila ($P_{n>c}$):** é a probabilidade de que um cliente, chegue no sistema, e tenha que esperar na fila.

Notação de Kendal

Segundo Prado (1999), um modelo de filas pode ser descrito pela seguinte notação: **A/B/c/K/m/Z**. Esta notação recebe o nome de Notação de Kendall, onde:

- **A**: descreve a natureza da distribuição dos intervalos entre chegadas;
- **B**: descreve a natureza da distribuição do processo de atendimento;
- **c**: corresponde ao número de servidores no sistema;
- **K**: é a capacidade máxima do sistema;
- **m**: é o tamanho da população de onde saem os clientes;
- **Z**: é a disciplina de atendimento da fila.

Descrição dos modelos de filas markovianas

Segundo Dantas e Rodrigues (1977), citado por Nascimento (2012), nestes modelos os tempos entre as chegadas sucessivas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, seguindo uma distribuição de Poisson com parâmetro λ , onde esse parâmetro é denominado taxa de chegada. O tempo de atendimento é modelado segundo uma distribuição Exponencial com parâmetro μ , sendo independente do processo de chegada.

Modelo $M/M/1$

Segundo Arenales et al. (2007), o modelo de fila $M/M/1$ é um sistema composto de apenas uma fila, que é atendida por apenas um servidor. Este modelo é descrito por uma distribuição de Poisson de parâmetro λ para o processo de chegada, e o tempo de atendimento descrito por uma distribuição exponencial negativa, com parâmetro μ . Não há limites para o tamanho da fila e nem para o tamanho da população de utentes. A capacidade do sistema e a população são infinitas, e a disciplina é de atender primeiro o cliente que entra primeiro no sistema.

Equações do modelo $M/M/1$

As principais equações que ajudam a calcular as medidas de desempenho do sistema desse modelo são:

(1) Número médio de clientes na fila:

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.14)$$

(2) Número médio de clientes no sistema:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \quad (2.15)$$

(3) Tempo médio gasto por um cliente na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.16)$$

(4) Tempo médio gasto por um cliente no sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (2.17)$$

(5) Probabilidade do sistema estar desocupado (vazio):

$$P_0 = 1 - \rho \quad \text{com } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.18)$$

(6) Probabilidade de encontrar n clientes no sistema:

$$P_n = \rho^n \times P_0 \quad (2.19)$$

(7) Probabilidade de haver mais de k clientes no sistema:

$$P(n \geq k) = \rho^{k+1} \quad (2.20)$$

(8) Probabilidade de o tempo de espera na fila ser igual a zero:

$$P(W_q = 0) = P_0 \quad (2.21)$$

(9) Probabilidade de o tempo de espera na fila exceder um tempo t :

$$P(W_q > t) = \rho \times e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0 \quad (2.22)$$

Modelo $M/M/s$

Segundo Tavares et al. (1996), o modelo $M/M/s$ difere do anterior apenas no número de servidores disponíveis, s . Tem-se assim um modelo em que o número de canais é c , o sistema tem uma distribuição das chegadas de Poisson com taxa λ e dos tempos de atendimento exponencial com taxa μ . A capacidade do sistema e da população são infinitas. A disciplina de atendimento é segundo a ordem de chegada, isto é, First In First Out (FIFO).

Equações do modelo $M/M/s$

(1) Taxa de utilização do sistema:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \quad (2.23)$$

(2) Probabilidade do sistema estar vazio (sem clientes):

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \times \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right]^{-1} \quad (2.24)$$

(3) Número médio de clientes na fila:

$$L_q = \frac{P_0 \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \times \rho}{s!(1-\rho)^2} \quad (2.25)$$

(4) Número médio de clientes no sistema:

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.26)$$

(5) Tempo médio de espera na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (2.27)$$

(6) Tempo médio de um cliente no sistema (espera + atendimento):

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (2.28)$$

(7) Probabilidade de haver n clientes no sistema:

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times P_0, & \text{se } n < s \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times \frac{1}{s^{n-s}} P_0, & \text{se } n \geq s \end{cases} \quad (2.29)$$

Modelo $M/M/1/k$

Segundo Hillier e Lieberman (2006), o modelo $M/M/1/k$ representa um sistema de filas com uma fila finita, onde as chegadas seguem um processo de Poisson com taxa λ , e os tempos de serviço são exponencialmente distribuídos com taxa μ . A capacidade do sistema é limitada a K clientes (incluindo o cliente que está em atendimento), de forma que chegadas adicionais quando o sistema está cheio são bloqueadas e perdidas.

Equações do modelo $M/M/1/k$

(1) Taxa de ocupação:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.30)$$

(2) Probabilidade do sistema estar vazio:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (2.31)$$

(3) Probabilidade de haver n clientes no sistema:

$$P_n = \rho^n \times P_0, \quad 0 \leq n \leq k \quad (2.32)$$

(4) Taxa de chegada (clientes que entram no sistema):

$$\lambda_{\text{efectiva}} = \lambda \times (1 - P_k) \quad (2.33)$$

(5) Número médio de clientes no sistema:

$$L_s = \sum_{n=0}^k n \times P_n \quad (2.34)$$

(6) Tempo médio no sistema:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{efectiva}}} \quad (2.35)$$

2.4.4 Descrição dos modelos de filas não Markovianos

Segundo Winston (2003) e Gross et al. (2008), os modelos de filas não Markovianos são caracterizados por possuírem processos de chegada ou de atendimento que não seguem necessariamente uma distribuição Exponencial, sendo identificados pela letra G (Geral) na Notação de Kendall. Sistemas como o $M/G/1$ ou o $M/G/2$ possuem soluções aproximadas bem estabelecidas, outros modelos como o $G/M/s$ e o $G/G/s$ são considerados modelos de complexidade analítica. Esta complexidade deve-se ao facto de estes sistemas não apresentarem, na maioria das vezes, fórmulas fechadas simples para o cálculo exato de medidas de desempenho, como o tempo médio de espera na fila. No presente trabalho, o sistema de atendimento é modelado como $M/G/s$, assumindo chegadas Poisson e tempos de serviço com distribuição geral. Abaixo são descritos os modelos $M/G/1$, onde G represente uma distribuição geral

Modelo $M/G/1$

Segundo Winston (2003), o modelo $M/G/1$ representa um sistema de filas com um único servidor, capacidade de espera não limitada e população de clientes infinita. As chegadas ocorrem segundo um processo de Poisson com taxa constante λ , o que significa que os tempos entre chegadas são independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição exponencial. O tempo de serviço segue uma distribuição geral G com média $1/\mu$ e variância σ^2 .

Equações do modelo $M/G/1$

(1) Taxa de ocupação do servidor:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.36)$$

(2) Número médio de clientes no sistema:

$$L_s = L_q + \rho \quad (2.37)$$

(3) Número médio de clientes na fila:

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)} \quad (2.38)$$

(4) Tempo médio no sistema:

$$W_s = \frac{\lambda\sigma^2}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} \quad (2.39)$$

(5) Tempo médio na fila:

$$W_q = \frac{\lambda\sigma^2}{2(1-\rho)} \quad (2.40)$$

(6) Probabilidade de o servidor estar ocupado:

$$P_{\text{ocupado}} = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.41)$$

Modelo $M/G/2$

Esse modelo usa taxas de chegadas com distribuição de Poisson (taxa λ , dois servidores com tempos de serviço de distribuição geral (média $1/\mu$, variância σ^2) e capacidade infinita da fila e disciplina FIFO (primeiro a entrar, primeiro a sair).

Equações aproximadas para o modelo $M/G/2$

(1) Probabilidade de o servidor estar ocupado:

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} \quad (2.42)$$

(2) Quadrado do coeficiente de variação do tempo de serviço:

$$C_{ts}^2 = \frac{\sigma^2}{(1/\mu)^2} = \sigma^2\mu^2 \quad (2.43)$$

(3) Tempo médio de espera na fila (aproximação de Allen-Cunneen):

$$W_q \approx \frac{C_{ts}^2 + 1}{2} \times \frac{\rho \sqrt{2(s+1) - 1}}{s(1-\rho)} \times \frac{1}{\mu} \quad (2.44)$$

Para $s = 2$, a expressão é simplificada para (2.46):

$$W_q \approx \frac{C_{ts}^2 + 1}{2} \times \frac{\rho\sqrt{5}}{2(1-\rho)} \times \frac{1}{\mu} \quad (2.45)$$

(4) Número médio de clientes na fila:

$$L_q = \lambda W_q \quad (2.46)$$

(5) Tempo médio no sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (2.47)$$

(6) Número médio de clientes no sistema:

$$L_s = \lambda W_s \quad (2.48)$$

A teoria das filas de espera tem sido utilizada na modelação de sistemas de atendimento em unidades de saúde (Costa, 2007; Silva et al., 2015). Em especial, modelos como $M/M/1$ e $M/M/s$ têm mostrando boa capacidade de representar sistemas com chegadas aleatórias e múltiplos servidores.

2.4.5 Indicadores de variabilidade e desempenho em sistemas de filas

Segundo Triola (2005), o coeficiente de variação, denotado por C_v , é uma medida estatística que descreve o nível de variabilidade, ou seja o desvio padrão dos dados em relação à média. O coeficiente de variação é definido como a razão entre o desvio-padrão σ e a média aritmética $\bar{x}$, conforme a Equação (2.51):

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (2.49)$$

Na análise de sistemas de filas, o coeficiente de variação é utilizado para avaliar a variabilidade dos tempos de atendimento e dos tempos entre chegadas, uma vez que essas variabilidades influenciam directamente o desempenho do sistema, como o tempo médio de espera e o comprimento médio das filas.

Segundo Mulenga (2018), a distribuição possui menor variabilidade quando o coeficiente de variação for até 10%, média quando estiver entre 10% a 20% e maior variabilidade quando a variabilidade ultrapassar 20%, Podendo também considerar-se outras escalas como:

- $C_v < 15\%$: baixa variabilidade;
- $15\% \leq C_v \leq 30\%$: variabilidade moderada;
- $C_v > 30\%$: alta variabilidade.

Valores baixos do coeficiente de variação indicam menor variabilidade dos dados em relação à média o que significa que o sistema apresenta um comportamento mais previsível, com tempos de atendimento ou de chegada mais regulares. Valores elevados de C_v estão associados a maior irregularidade nos processos, aumenta o tempo médio de espera e a formação de filas mais longas.

A taxa de utilização efectiva durante os períodos de pico é calculada por:

$$\rho_{\text{efectiva}} = \frac{\lambda_{\text{pico}}}{s \cdot \mu} \quad (2.50)$$

onde λ_{pico} é a taxa de chegada durante os picos, s é o número de servidores e μ é a taxa de atendimento por servidor.

A taxa de utilização do sistema (ρ) permite avaliar o quão próximo os servidores estão da saturação. Durante períodos de pico, os sistemas podem apresentar uma utilização efectiva elevada, resultando em longas filas temporárias e aumento do tempo de espera. Valores de ρ próximos de 1, significam um sistema instável, a demanda excede a capacidade dos servidores, fazendo com que a fila cresça.

2.5 Simulação

De acordo com Silva et al. (1998), simular significa reproduzir o funcionamento de um sistema, com o auxílio de um modelo, o que permite testar algumas hipóteses sobre o valor das variáveis controladas, é usada para aumentar o desempenho do sistema em estudo.

Segundo Winston (2003), a simulação é uma técnica que permite a análise de sistemas complexos imitando seu funcionamento ao longo do tempo, superando limitações dos modelos analíticos tradicionais que exigem simplificações excessivas. Utilizando modelos matemáticos ou lógicos, a simulação gera dados para analisar o desempenho do sistema em diferentes cenários, oferecendo maior flexibilidade para a tomada de decisão. Embora não seja uma técnica de optimização, é utilizada para responder a questões do tipo “e se?” e tem se tornado mais acessível com avanços computacionais.

Shannon (1975), descreve a simulação como uma metodologia voltada à resolução de problemas, estruturada em um processo de modelação e análise de sistemas físicos ou virtuais propostos em computador. Esse processo permite testar diferentes cenários, analisar o desempenho de sistemas e optimizar processos sem os custos ou riscos associados à execução de experimentos no mundo real, proporcionando uma previsão detalhada dos efeitos de mudanças em um sistema antes de sua implementação.

Segundo Mulenga (2010), os modelos de simulação procuram oferecer uma representação do mundo real com o objectivo de permitir a geração e a análise de alternativas, antes da implementação de qualquer uma delas, dando ao executivo um grau de liberdade e flexibilidade na escolha da acção mais conveniente.

No contexto de sistemas de filas, é possível simular alterações no número de servidores ou na taxa de chegada de clientes, sem realizar modificações reais que poderiam afectar negativamente o funcionamento do sistema.

2.5.1 Tipos de simulação

A simulação, enquanto técnica de modelação e análise de sistemas complexos, pode ser classificada de acordo com diferentes critérios. Um dos critérios mais comuns é baseado na forma como o tempo e o estado do sistema são representados, originando dois eixos de classificação principais:

simulação estática e dinâmica, e simulação discreta e contínua (Winston, 2003). A simulação estática refere-se a modelos que não consideram a passagem do tempo. São geralmente usados para estimativas pontuais ou análises de distribuição. Por outro lado, a simulação dinâmica envolve a evolução do sistema ao longo do tempo, sendo apropriada para estudar o comportamento de sistemas cuja estrutura e desempenho se alteram em função de eventos ou de processos contínuos.

Simulação de sistemas discretos

Segundo Hillier e Lieberman (2013), a simulação de eventos discretos caracteriza-se por alterações no estado do sistema que acontecem de forma imediata em instantes específicos e não contínuos, determinados pela ocorrência de eventos definidos. Na prática, grande parte das aplicações de simulação enquadra-se neste tipo de abordagem.

Simulação de sistemas contínuos

A simulação contínua é aquela na qual as mudanças no estado do sistema ocorrem continuamente ao longo do tempo. A simulação contínua pode ser frequentemente representada por equações diferenciais, como no caso do movimento de um foguete. A maioria das aplicações práticas envolve a simulação discreta, embora existam casos em que o uso da simulação contínua é mais apropriado. A escolha entre os dois tipos depende da natureza do sistema a ser analisado e dos objectivos da modelação

No presente estudo, a simulação de eventos discretos será aplicada para representar o processo de triagem no Centro de Saúde da Liberdade, possibilitando a análise do desempenho do sistema actual e a experimentação de cenários alternativos de funcionamento.

2.5.2 Etapas do processo de realização de uma simulação

Segundo Mulenga (2010), um trabalho de simulação pode ser desenvolvido segundo as seguintes etapas:

Formulação do problema: antes de iniciar a simulação, devem ser definidos os objectivos, a amplitude e a profundidade da análise, bem como os recursos disponíveis. É essencial entender o sistema e as questões que precisam ser respondidas.

Recolha de dados: consiste na colecta de informações relevantes que serão processadas conforme necessário. Os dados devem ser confiáveis e significativos para a tomada de decisão.

Identificação das variáveis: devem ser identificadas todas as variáveis importantes para garantir que os resultados do modelo sejam confiáveis. As variáveis podem ser classificadas em:

- **variáveis controláveis (endógenas):** são determinadas dentro do sistema e podem ser ajustadas.
- **variáveis não controláveis (exógenas):** são influenciadas por factores externos, mas afectam a tomada de decisão.

Formulação do modelo: representa a tradução do sistema real para um modelo computacional. Essa etapa é uma das mais críticas e requer grande atenção.

Avaliação do modelo: verifica-se se ele atende aos objectivos da simulação e representa correctamente o sistema em estudo. Testes devem ser realizados para validar a consistência dos dados.

Formulação do programa de computador: a maioria dos estudos de simulação é complexa e requer implementação computacional detalhada.

Teste do programa: o modelo é ajustado e testado, geralmente com poucos dados, para verificar se os resultados estão de acordo com as expectativas.

Construção do modelo de simulação: apresenta-se um fluxograma do modelo, que pode ser implementado em um computador para análise do sistema.

2.5.3 Aplicações da simulação

Segundo Hillier e Lieberman (2013), a simulação é aplicada em diversas áreas, como a saúde, a economia e até na área militar. No sector militar, a simulação é utilizada para treino e adestramento de tropas, permitindo uma preparação adequada e a economia de recursos. No sector da saúde, a simulação é essencial para o planeamento de sistemas hospitalares, como a alocação de recursos médicos e a análise de estratégias de gestão de filas de pacientes. Na economia, a simulação pode ser usada para modelar e prever o comportamento dos mercados, avaliar políticas económicas e compreender o impacto de diferentes cenários antes da sua implementação.

Segundo Winston (2004), a simulação é utilizada para modelar o comportamento de sistemas dinâmicos, como o atendimento em bancos, nos hospitais, etc, permitindo a análise de variáveis como tempo de espera, alocação de recursos e desempenho operacional. Essa abordagem possibilita testar cenários e tomar decisões sem interferir no sistema real.

De acordo com Banks et al. (2010), um dos maiores problemas relacionados com a simulação está relacionado com o alto custo e o tempo necessários para criar modelos detalhados e precisos. Além disso, Shannon (1975), enfatiza que a verificação e validação do modelo são etapas essenciais, pois garantem que os resultados obtidos sejam confiáveis e representem com precisão o sistema real. A qualidade dos dados usados e a interpretação correcta dos dados podem ser obstáculos significativos, especialmente em situações complexas, como em modelos de filas de espera. O custo e o tempo para construir modelos detalhados são sempre complexo. Além disso, a análise de grandes volumes de dados gerados pela simulação pode ser complexa, exigindo ferramentas de cálculo mais avançadas (Banks et al.,2010).

Estudos empíricos relacionados a simulação em unidades de saúde

A simulação aliada à teoria das filas tem sido utilizada na área da saúde para otimizar processos de atendimento e reduzir tempos de espera. Diversos estudos mostram a aplicabilidade e as vantagens

desta abordagem.

Isaac (2023), utilizou a simulação estatística para analisar o dimensionamento do sistema de atendimento no Centro de Saúde Dream para Crianças, em Moçambique. O estudo tinha como objectivo de reduzir o tempo de espera dos pacientes. A aplicação da teoria de filas de espera e técnicas de simulação permitiu identificar o desempenho do sistema de fila em diversos gabinetes. A análise revelou que as distribuições de Poisson e Exponencial ajustaram-se aos padrões de chegada e tempos entre chegadas, respectivamente. Para o gabinete de aconselhamento, foi observada uma distribuição uniforme com tempos de serviço entre 9 e 52 minutos, enquanto os demais gabinetes apresentaram outras distribuições empíricas. Os maiores tempos de espera foram observados na farmácia e no magazine, contrastando com o gabinete de recolha de sangue, onde a média de espera era de apenas três minutos com cerca de duas pessoas em fila. Ao adicionar um técnico de apoio na farmácia e um no magazine, o tempo médio de permanência dos pacientes no centro de saúde foi reduzido de 2 horas e 27 minutos para 1 hora e 28 minutos, uma redução de aproximadamente 60%.

Um outro estudo realizado por Moraes e Silva (2019), numa unidade hospitalar brasileira utilizou o software *FlexSim* para desenvolver um modelo de simulação baseado em parâmetros reais, com o objectivo de representar fielmente a jornada de atendimento dos pacientes e identificar possíveis restrições no sistema. Do estudo concluiu-se que embora o hospital tenha capacidade para atender entre 300 e 350 pacientes por dia, algumas áreas apresentavam sinais de saturação. A principal restrição identificada refere-se à realização de consultas médicas, onde há elevada procura e grande variabilidade no tempo de atendimento por especialidade, comprometendo a fluidez do sistema. Apesar de outras áreas funcionarem abaixo da capacidade máxima, as consultas médicas não apresentaram a mesma taxa de atendimento. Diante disso, o estudo recomendou considerar a possibilidade de aumentar o número de especialistas ou implementar um planeamento estratégico para redistribuição da procura e redução do tempo de espera nas filas.

Green et al. (2006), realizaram um estudo nos Estados Unidos da América aplicando a teoria de filas para aumentar a efectividade da alocação de profissionais em um departamento de emergência de um hospital urbano. Utilizando dados sobre as chegadas de pacientes, os autores aplicaram o modelo Lag SIPP (Stationary Independent Period-by-Period com defasagem temporal). Com base na análise, foi possível propor mudanças nos turnos dos profissionais de saúde que apesar de um aumento de 6,3% no volume de chegadas, resultaram em uma redução de 22,9% na proporção de pacientes que deixaram o atendimento sem serem vistos. Em uma análise focada em apenas quatro dias da semana, sem aumento nas horas totais trabalhadas, a simples redistribuição da equipe guiada pelo modelo Lag SIPP levou a uma redução de 21,7% nesse mesmo indicador, mesmo com um aumento adicional de 5,5% na demanda. O estudo mostrou que o acesso oportuno a um profissional era essencial para a qualidade no atendimento de urgência e que modelos de filas que consideram a variabilidade temporal, como o Lag SIPP, são procedimentos altamente eficazes na optimização da alocação de recursos humanos em ambientes críticos e frequentemente subdimensionados.

Capítulo 3

Material e métodos

A metodologia constitui um percurso racional que visa organizar de forma sistemática as etapas do trabalho, tendo em consideração que para ser aplicada no domínio científico, é necessário seguir um procedimento rigoroso. Por esse motivo, neste capítulo são descritos os materiais e os métodos utilizados para atingir os objectivos definidos no Capítulo 1.

3.1 Material

No presente estudo, pretende-se analisar o sistema de atendimento do Centro de Saúde da Liberdade, que conta com dois postos de atendimento e um padrão de chegadas aleatórias. Para tal, foram utilizados modelos de filas de espera com suporte em distribuições de probabilidade como a exponencial (para os tempos entre chegadas), a distribuição de Poisson (para o número de chegadas por unidade de tempo) e a distribuição normal ou Erlang (para os tempos de atendimento).

Para a realização deste estudo, os dados foram recolhidos no Centro de Saúde da Liberdade, situado na província de Maputo, Distrito da Matola, Bairro da Liberdade. O Centro de Saúde da Liberdade tem horário de funcionamento das 07:30 às 15:30, de segunda a sexta-feira, e conta com dois canais de atendimento de consultas para adultos, um canal para crianças e dois canais para adolescentes e jovens. O presente trabalho restringe-se apenas às consultas para adultos. A população em estudo é constituída pelos utentes do Centro de Saúde da Liberdade, e a amostra é composta pelos utilizadores do sistema, ou seja, os utentes que chegaram e foram atendidos nos dias de recolha de dados nas consultas para adultos.

O processo de atendimento segue a seguinte ordem: o paciente chega ao Centro de Saúde e recebe uma senha, depois dirige-se para a fila de espera, aguarda até ser atendido, e após o atendimento segue para a farmácia para adquirir os medicamentos.

A recolha de dados decorreu entre as 07h30 e as 14h, período em que se observa maior afluência de utentes, tendo-se considerado este intervalo de tempo como o mais adequado para garantir a representatividade da amostra, a Tabela 3.1 mostra a descrição das variáveis.

Recolha de dados

De acordo com Moresi (2003), as técnicas de recolha de dados correspondem a um conjunto de procedimentos e instrumentos concebidos para assegurar o registo adequado das informações, bem como o respectivo controlo e análise. Segundo Aires (2015) a recolha de dados por observação implica obter informação de forma sistemática, mediante o contacto directo com situações concretas. Este método pode ser aplicado tanto em abordagens quantitativas quanto qualitativas de observação.

Tabela 3.1: Descrição das variáveis.

Variável	Classificação
Número da sala de atendimento (NS)	Discreta
Tempo de chegada (TC)	Contínua
Início de atendimento (IA)	Contínua
Fim de atendimento (FA)	Contínua
Tempo de atendimento (TA)	Contínua

A recolha de dados foi realizada por observação directa do funcionamento do sistema de fila de espera nas instalações do Centro de Saúde da Liberdade, seguindo um plano previamente definido.

Para este estudo, o número de elementos que compõem a amostra é o número de pacientes que chegaram no intervalo de tempo, das 07h30 às 14h00. Nesse intervalo, foram registados 97 atendimentos no primeiro dia e 78 no segundo dia. Como o objectivo foi analisar o funcionamento completo do sistema nesse período, todas as chegadas e atendimentos observados neste período, foram considerados parte da amostra.

Segundo Alves (2017), a observação como técnica de recolha de dados envolve acompanhar os participantes no seu contexto habitual ou em ambientes especialmente estruturados para fins investigativos, como é o caso dos laboratórios. Este procedimento pode integrar tanto abordagens quantitativas como qualitativas, variando em função das opções metodológicas definidas no estudo.

Os dados foram introduzidos no Microsoft Excel. Para cada cliente, registou-se: a hora em que o utente solicitou uma senha, a hora de início e a hora do fim de atendimento. Para o respectivo processamento recorreu-se ao Microsoft Excel e o software R, o trabalho foi redigido no $\text{\LaTeX}$.

3.2 Métodos

3.2.1 Análise exploratória dos dados

Segundo Tukey (1977), a análise exploratória de dados visa aumentar o conhecimento do pesquisador sobre uma população a partir de uma amostra. Dessa forma, pode ser descrita como um conjunto de métodos para organizar, descrever e interpretar conjuntos de dados numéricos. Estes

métodos permitem a exploração dos dados com objectivo de identificar padrões e representar os dados de acordo com esses padrões.

Organização dos dados

Para este estudo, os dados foram organizados em tabelas de distribuição de frequência. Para o número de chegadas considerou-se um intervalo de tempo de 15 minutos. Visto que os tempos de atendimento correspondem a uma variável quantitativa contínua, esta foi representada em intervalos de classe. Para a organização dos dados em classes, seguiram-se as seguintes etapas:

1. **Amplitude total (AT)** - é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo observados no conjunto de dados, isto é:

$$AT = X_{\max} - X_{\min} \quad (3.1)$$

2. **Número de classes (k)** - segundo Mulenga (2018), não existe um método exacto ou um número fixo a escolher. O que se encontra na literatura são diferentes procedimentos, aplicados de acordo com a conveniência e a extensão dos dados analisados. Entre os métodos mais utilizados destacam-se:

- (a) **Método 1:** definir arbitrariamente o número de classes k entre 5 a 20, de acordo com a opção do investigador e a amplitude dos dados.
- (b) **Método 2:** utilizar a fórmula de Sturges, dada por:

$$k \approx 1 + 3,3 \times \log n \quad (3.2)$$

onde n representa o número total de observações. O valor obtido deve ser arredondado para o número inteiro mais próximo.

- (c) **Método 3:** determinar o número de classes pela regra da raiz quadrada:

$$k \approx \sqrt{n} \quad (3.3)$$

onde n corresponde ao total de observações.

Nesse estudo, utilizou-se o terceiro método, apresentado na equação 3.3 para determinar o número de classes.

- **Amplitude de classe (h)** - a amplitude da classe representa o intervalo de tempo entre o atendimento mais rápido e o mais demorado, e entre a chegada mais cedo e a mais tardia registada num intervalo de classe. Quando não são conhecidos os limites de classe, a amplitude de classe é determinada pelo quociente entre a amplitude total e o número de classe, conforme a equação 3.4:

$$h = \frac{AT}{k} \quad (3.4)$$

- **Média aritmética ($\bar{x}$)** - a média aritmética representa a tendência central dos dados e permite resumir os valores observados em uma única medida. Para o caso dos tempos de chegada e dos tempos de atendimento, a média é determinada pelas expressões a seguir para a média aritmética simples e ponderada respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.5)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (3.6)$$

onde x_i representa cada observação e n o número total de observações e o f_i o número de observações no intervalo de classe i ou a frequência absoluta da classe i . No contexto da teoria de filas, a média fornece uma estimativa do tempo de chegada dos clientes e do tempo médio de atendimento.

- **Desvio padrão (σ)** - o desvio padrão nas filas de espera mede a variabilidade dos tempos em relação à média, é determinado pelas expressões a seguir para desvio padrão simples e ponderado respectivamente:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.7)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \times f_i}{n-1}} \quad (3.8)$$

Onde x_i representa cada valor observado, $\bar{x}$ a média amostral e n o número de observações.

Para verificar a variabilidade dos dados, foram calculados os coeficientes de variação, C_v , para os tempos de chegadas e para os tempos de atendimento, bem como a taxa de utilização efectiva durante os períodos de pico (ρ_{efectiva}), conforme as fórmulas 2.51 e 2.52 apresentadas na subsecção 2.4.5.

3.2.2 Análise da distribuição dos dados

Após analisar os tempos de chegada e de atendimento nas filas, considerou-se que: As chegadas podem ser modeladas por uma distribuição de Poisson, com média λ chegadas por unidade de tempo; os tempos de atendimento seguem uma distribuição Exponencial (ou outra adequada ao sistema), com média μ atendimentos por unidade de tempo.

Verificação da adequação das distribuições

A adequação das distribuições foi avaliada por dois métodos, a análise gráfica e os testes estatísticos formais. Na análise gráfica, foram construídos histogramas e linhas das funções densidade

de distribuição de probabilidades, para observar visualmente o padrão dos dados, permitindo identificar concentrações ou dispersões, foi aplicado o teste de aderência qui-quadrado, que verifica se a distribuição observada se aproxima da distribuição teórica escolhida (Poisson, Exponencial, Erlang, Weibull.), se é adequada ao sistema de filas estudado.

Regras de decisão do teste de Qui-quadrado

O teste de qui-quadrado foi realizado com um nível de significância de 2.5%, se a diferença entre os valores observados (O_i) e esperados (E_i) for pequena, a estatística χ^2 será baixa, e não se rejeita a hipótese nula (H_0). Se a diferença for grande ou se o p-valor for menor que 0.025, rejeita-se a H_0 , indicando que os dados não seguem a distribuição teórica.

Cálculo dos graus de liberdade

Os graus de liberdade do teste são calculados pela expressão: $gl = k - g - 1$, onde k é o número de classes originais e g é o número de classes que foram combinadas devido a frequências esperadas menores que 5.

Cálculo das frequências esperadas

Para determinar as frequências esperadas (E_i), primeiro calculou-se as probabilidades das distribuições teóricas, em seguida, as frequências esperadas são obtidas multiplicando-se cada probabilidade pelo número total de observações n :

Para a distribuição de Poisson, a probabilidade de cada valor foi determinada por:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

As frequências esperadas foram determinadas por:

$$E_i = n \times P(X = x_i) = n \cdot \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Para a distribuição exponencial, a probabilidade de cada valor foi determinado por:

$$P(t_i < X \leq t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu t_i} - e^{-\mu t_{i+1}} \quad (3.11)$$

As frequências esperadas foram determinadas por:

$$E_i = n P(X = x_i) \quad (3.12)$$

onde $P(X = x_i)$ refere-se à $P(t_i < X \leq t_{i+1})$.

3.2.3 Identificação do modelo do sistema de filas de espera do Centro de Saúde da Liberdade

No Centro de Saúde da Liberdade, existem dois canais de atendimento destinados às consultas de adultos, onde foi realizada a recolha de dados. O atendimento ocorre conforme a ordem de chegada dos utentes, e o número de pessoas atendidas é suficientemente grande para que a população seja considerada infinita. Assim, utilizando a notação de Kendall, esse sistema de filas pode ser representado como: $A/B/s/\infty/\infty/\text{FIFO}$, em que os parâmetros A e s indicam as distribuições dos tempos de chegada e de serviço, respectivamente.

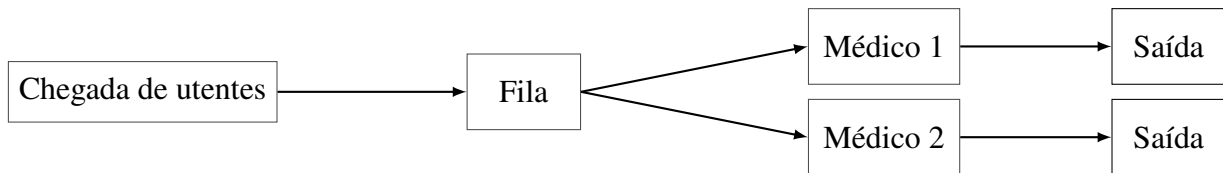


Figura 3.1: Actual sistema de atendimento do Centro de Saúde da Liberdade.

O modelo que descreve o Centro de Saúde da Liberdade, é o modelo $M/G/2$, com chegadas seguindo um processo de Poisson (M), tempos de serviço com distribuição geral (G) e dois servidores (2). Os principais parâmetros que descrevem o sistema do centro de saúde da liberdade são: A taxa de utilização do sistema (ρ); o número médio de clientes na fila (L_q); o número médio de clientes no sistema (L_s); o tempo médio de espera na fila (W_q), o tempo médio total no sistema (W_s); a probabilidade de espera na fila. Esses parâmetros permitem avaliar o desempenho do sistema, identificar possíveis restrições e criar decisões estratégicas para otimizar o processo de atendimento no Centro de Saúde da Liberdade, considerando dois servidores. As fórmulas para o cálculo destes parâmetros são apresentadas no capítulo 2, na subsecção 2.4.4.

Capítulo 4

Resultados e discussão

Neste capítulo, apresenta-se a análise dos resultados obtidos com base na metodologia descrita no Capítulo 3. Inicia-se com a descrição dos dados, seguida da avaliação do desempenho do sistema de atendimento actualmente em funcionamento no Centro de Saúde da Liberdade e por fim, são analisadas as alternativas propostas e uma comparação entre elas, com o objectivo de identificar a alternativa mais eficiente e adequada ao contexto do Centro de Saúde da Liberdade.

4.1 Descrição dos dados

Com base na metodologia adoptada, foram registados os tempos de chegada, início e término de atendimento, verificando-se que no primeiro dia, chegaram 97 utentes, dos quais 94 foram atendidos. Os três restantes não tiveram o atendimento registado. Em termos da Teoria de Filas, o não registo de atendimento de três utentes pode estar associado a diferentes factores, como a capacidade limitada do sistema, o tempo total de serviço disponível, limitação do período de observação ou, ainda, à desistência da fila por parte de alguns utentes. O tempo total de atendimento no primeiro dia foi de 6 horas e 10 minutos.

No segundo dia, chegaram 78 utentes, tendo sido atendidos 78, com um tempo total de atendimento de 4 horas e 47 minutos, aproximadamente 5 horas. O período total de observação e recolha de dados foi de 6 horas e 30 minutos (das 07h30 às 14h00), durante dois dias úteis. Este intervalo foi escolhido por ser o período de maior fluxo de utentes, o que garante a representatividade da amostra.

De acordo com a Tabela 4.1, observa-se que no primeiro dia a maior frequência de chegadas foi de 2 utentes por intervalo, ocorrendo em 7 intervalos, com 3 intervalos sem registo de chegadas. O número máximo de chegadas em um único intervalo foi de 14 utentes, registado entre 07:45–07:59, indicando picos de demanda no início do expediente (Tabela 4.1(a)).

No segundo dia, a maior frequência foi de 2 utentes em 8 intervalos, com 4 intervalos sem chegadas, e o número máximo de chegadas em um intervalo foi de 22 utentes (Tabela 4.1(b)).

Tabela 4.1: Distribuição de frequências dos tempos de chegadas no intervalo de 15 minutos no primeiro e segundo dias.

n	Tempo de chegadas(min)	Número de utentes
1	07:30–07:44	11
2	07:45–07:59	14
3	08:00–08:14	8
4	08:15–08:29	2
5	08:30–08:44	2
6	08:45–08:59	4
7	09:00–09:14	2
8	09:15–09:29	7
9	09:30–09:44	4
10	09:45–09:59	5
11	10:00–10:14	3
12	10:15–10:29	2
13	10:30–10:44	5
14	10:45–10:59	4
15	11:00–11:14	6
16	11:15–11:29	0
17	11:30–11:44	3
18	11:45–11:59	3
19	12:00–12:14	2
20	12:15–12:29	4
21	12:30–12:44	0
22	12:45–12:59	2
23	13:00–13:14	1
24	13:15–13:29	2
25	13:30–13:44	1
26	13:45–14:00	0
Total	—	97

(a)

n	Tempo de chegadas (min)	Número de utentes
1	07:30–07:44	22
2	07:45–07:59	6
3	08:00–08:14	2
4	08:15–08:29	4
5	08:30–08:44	6
6	08:45–08:59	2
7	09:00–09:14	0
8	09:15–09:29	4
9	09:30–09:44	2
10	09:45–09:59	0
11	10:00–10:14	2
12	10:15–10:29	0
13	10:30–10:44	1
14	10:45–10:59	2
15	11:00–11:14	3
16	11:15–11:29	2
17	11:30–11:44	2
18	11:45–11:59	3
19	12:00–12:14	4
20	12:15–12:29	0
21	12:30–12:44	3
22	12:45–12:59	3
23	13:00–13:14	1
24	13:15–13:29	1
25	13:30–13:44	2
26	13:45–14:00	1
Total	—	78

(b)

Da Tabela 4.2, observa-se que a maior parte dos atendimentos está concentrada nos primeiros intervalos de classe em ambos os dias, para o primeiro dia Tabela 4.2(a), o intervalo de 02:50 - 03:54 apresenta o maior número de atendimentos (36 utentes), seguido do intervalo de 03:43 – 04:36 com 20 utentes. No segundo dia, Tabela 4.2(b), o intervalo de 02:34 – 03:46 concentra o maior número de atendimentos (33 utentes), seguido do intervalo de 01:22 – 02:34 com 19 utentes.

Tabela 4.2: Distribuição de frequências dos tempos de atendimento no primeiro e segundo dias.

n	Classes(ti)	fi
1	01:02 – 01:57	4
2	01:57 – 02:50	14
3	02:50 – 03:43	36
4	03:43 – 04:36	20
5	04:36 – 05:29	5
6	05:29 – 06:22	4
7	06:22 – 07:15	3
8	07:15 – 08:08	5
9	08:08 – 09:02	1
10	09:02 – 09:55	2
Total	—	94

(a)

n	Classes(ti)	fi
1	01:22 – 02:34	19
2	02:34 – 03:46	33
3	03:46 – 04:57	15
4	04:57 – 06:09	5
5	06:09 – 07:21	1
6	07:21 – 08:33	4
7	08:33 – 09:45	0
8	09:45 – 10:56	0
9	10:56 – 12:08	1
Total	—	78

(b)

A Tabela 4.3, indica as estatísticas descritivas das chegadas e dos tempos de atendimento para o primeiro e segundo dias. No primeiro dia, o número máximo de chegadas em um intervalo de 15 minutos foi de 14 utentes, e a média de chegadas foi de 3.37 (aproximadamente 4 utentes). O tempo máximo de atendimento registrado foi de aproximadamente 9.88 minutos, o mínimo foi de 1.03 minutos, e a média de tempo de atendimento por utente foi de 3.95 minutos (aproximadamente 4 minutos). No segundo dia, o número máximo de chegadas em um intervalo de 15 minutos foi de 22 utentes, com média de 3 utentes. O tempo máximo de atendimento foi de 11.93 minutos, o mínimo de 1.37 minutos, e a média de tempo de atendimento por utente foi de 3.68 minutos. Isso significa que considerando intervalos de 15 minutos, em média 3 a 4 utentes chegam por intervalo em ambos os dias, e cada utente é atendido em aproximadamente 3.7 a 4 minutos. Observa-se maior variação nos tempos de atendimento e nas chegadas no segundo dia, evidenciada pelos valores máximos e pelo desvio padrão, indicando períodos de maior fluxo e atendimentos mais prolongados.

Tabela 4.3: Estatísticas dos tempos de chegadas e atendimentos.

Estatísticas	Tempo de chegadas		Tempo de atendimentos	
	1º dia	2º dia	1º dia	2º dia
Máxima	14	22	9.88	11.93
Média	3.73	3.00	3.95	3.68
Desvio padrão	3.32	4.21	1.81	1.68
Mínima	0.00	0.00	1.03	1.37
Coefficiente de variação	0.89	1.40	0.42	0.39

4.2 Análise da distribuição de probabilidade das chegadas e atendimentos dos utentes do Centro de Saúde da Liberdade

Nos resultados do teste de aderência de Qui-quadrado, apresentado na Tabela 4.4, observa-se que no primeiro dia, obteve-se um valor global de χ^2 de 4.523. A discrepância mais acentuada ocorreu no intervalo 0–2, em que a frequência observada (12) é maior que a esperada (7.287). Nas demais classes, as diferenças entre frequências observadas e esperadas foram de menor magnitude.

Os valores observados do teste de Qui-quadrado para os dois dias são inferiores aos valores críticos ($4.523 < 7.3777$ para o primeiro dia e $3.947 < 5.023$ para o segundo dia), indicando que não há evidências para rejeitar a hipótese de que os atendimentos seguem uma distribuição de Poisson.

Tabela 4.4: Teste de Qui-Quadrado para o ajustamento das chegadas a distribuição de Poisson.

Intervalo	O_i	p_i	E_i	χ^2
≤ 2	12	0.280	7.287	3.049
3	3	0.207	5.395	1.063
4	4	0.194	5.032	0.211
≥ 11	7	0.319	8.287	0.200
total	26	1	26.000	4.523

(Primeiro dia)

Intervalo	O_i	p_i	E_i	χ^2
≤ 2	16	0.423	11.003	2.269
3 - 4	7	0.392	10.194	1.001
≥ 5	3	0.185	4.803	0.677
total	26	1.000	26.000	3.947

(Segundo dia)

A Tabela 4.5, apresenta o teste de Qui-quadrado para o ajustamento dos tempos de atendimento à distribuição Exponencial. Observa-se que o tempo de atendimento é uma variável quantitativa contínua, agrupada em classes com amplitudes de 53 segundos para o primeiro dia e 71 segundos para o segundo dia. No primeiro dia, as frequências observadas nos intervalos com atendimentos diferentes de zero foram 4, 14, 36, 20, 9 e 11 utentes, enquanto no segundo dia foram 19, 33, 15, 5 e 6 utentes. A maior concentração ocorreu em intervalos intermédios.

Tabela 4.5: Teste de Qui-Quadrado para o ajustamento da distribuição dos atendimentos à Exponencial.

Intervalo (min)	O_i	p_i	E_i	χ^2
0.00 – 1.03	0	0.23	21.62	21.62
1.03 – 1.95	4	0.16	14.92	8.00
1.95 – 2.83	14	0.12	11.53	0.53
2.83 – 3.72	36	0.10	9.21	77.88
3.72 – 4.60	20	0.08	7.36	21.68
4.60 – 6.37	9	0.11	10.59	0.24
6.37 – 9.91	11	0.12	11.10	0.00
≥ 9.91	4	0.08	7.66	7.66
Total	94	1.00	94	137.61

(Primeiro dia)

Intervalo (min)	O_i	p_i	E_i	χ^2
00.0 – 1.37	0	0.31	24.25	24.25
1.37 – 2.56	19	0.19	14.85	1.16
2.56 – 3.76	33	0.14	10.83	45.42
3.76 – 4.96	15	0.10	7.81	6.61
4.96 – 6.15	5	0.07	5.60	0.06
6.15 – 12.13	6	0.15	11.77	2.83
≥ 12.13	0	0.04	2.89	2.89
Total	78	1.00	78	83.23

(Segundo dia)

O teste de Qui-quadrado indicou a exclusão das hipóteses de ajuste à distribuição exponencial,

mostrando que essa distribuição não representa significativamente a variabilidade observada nos tempos de atendimento.

Os resultados da Tabela 4.6, obtidos por meio do teste do qui-quadrado, indicam que o número de chegadas segue a distribuição de Poisson, uma vez que não houve evidência para rejeitar a hipótese nula para ambos os dias analisados. Para atendimentos, os resultados mostram que os tempos de atendimento não seguem a distribuição Exponencial, uma vez que os valores obtidos levaram à rejeição da hipótese nula.

Tabela 4.6: Resumo dos testes de Qui-quadrado para ajustamento das distribuições.

Dia	Distribuição	χ^2_{obs}	g.l.	χ^2_{crit} (2.5%)	Decisão
1º dia	Poisson	4.435	2	7.378	Não rejeitar H_0
2º dia	Poisson	3.947	1	5.023	Não rejeitar H_0
1º dia	Exponencial	137.61	6	9.49	Rejeitar H_0
2º dia	Exponencial	83.23	5	7.82	Rejeitar H_0

Para aprofundar a investigação, procedeu-se ao ajuste de diferentes distribuições de probabilidade Exponencial, Gama e Weibull, aplicando o teste de Kolmogorov-Smirnov, cujos resultados são apresentados na Tabela 4.7 para o primeiro dia e na Tabela 4.8 para o segundo dia.

No primeiro dia Tabela 4.7, verificou-se que a distribuição Exponencial apresentou um valor de *p-valor* igual a 0.0000, confirmando a inadequação do modelo. A distribuição Weibull também não se mostrou satisfatória, com *p-valor* de 0.0059. Já a distribuição Gama evidenciou melhor ajustamento, com parâmetros estimados de forma (α) = 5.57 e taxa (β) = 1.41, correspondendo a um tempo médio aproximado de 3.95 minutos por atendimento.

Tabela 4.7: Ajustes de distribuição e teste de Kolmogorov-Smirnov para o primeiro dia.

Distribuição	Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	K-S	p-valor
Exponencial	taxa (λ)	0.2534	0.0261	0.3550	0.0000
Gama	forma (α)	5.5718	0.7896	0.1411	0.0473
	taxa (β)	1.4120	0.2094		
Weibull	forma (k)	2.3121	0.1708	0.1760	0.0059
	escala (λ)	4.4664	0.2116		

De forma semelhante, no segundo dia (Tabela 4.8), a distribuição Exponencial apresentou inadequação, com *p-valor* igual a 0.0000, e a distribuição Weibull revelou um resultado igualmente insatisfatório (*p-valor* = 0.0443). Já a distribuição Gama mostrou-se mais apropriada, com parâmetro de forma (α) = 6.43 e taxa (β) = 1.75, resultando numa média de 3.68 minutos por atendimento. O valor de *p-valor* de 0.1128 reforça a adequação da distribuição Gama aos dados do segundo dia.

Tabela 4.8: Ajustes de distribuição e teste de Kolmogorov-Smirnov para o segundo dia.

Distribuição	Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	K-S	p-valor
Exponencial	taxa (λ)	0.2718	0.0308	0.3990	0.0000
Gama	forma (α)	6.4319	1.0044	0.1358	0.1128
	taxa (β)	1.7485	0.2840		
Weibull	forma (k)	2.2649	0.1724	0.1563	0.0443
	escala (λ)	4.1587	0.2213		

Os resultados dos testes de ajuste apresentados, o Teste de Qui-Quadrado (Tabela 4.6) e o Teste de Kolmogorov-Smirnov (Tabelas 4.7 e 4.8) mostram que a distribuição exponencial não se adequa para representar os tempos de atendimento, pois os p-valores obtidos em ambos os dias foram iguais a 0.0000. Esse resultado, descartou a possibilidade de modelar o sistema como Markoviano (M/M/2), mostrando uma necessidade de adotar uma distribuição geral (G) para os tempos de serviço, portanto o modelo $M/G/2$.

Entre as distribuições não markovianas testadas, a distribuição Gama mostrou um ajustamento mais consistente e superior, uma alternativa mais adequada para descrever a variabilidade de atendimento.

Desta forma, a distribuição Gama foi a única com um ajuste aceitável e consistente nos dois dias de observação, permitindo classificar o sistema do Centro de Saúde da Liberdade como um modelo $M/G/2$.

Os gráficos das Figuras 4.1 e 4.2 evidenciam que os tempos de atendimento não seguem a distribuição exponencial, a qual subestima a concentração central e não representa adequadamente a cauda. As distribuições Gama e Weibull apresentaram melhor ajustamento, descrevendo de forma mais realista os padrões observados em ambos os dias. Em particular, a Weibull revelou ligeira superioridade no segundo dia, sugerindo maior robustez para modelação do processo.

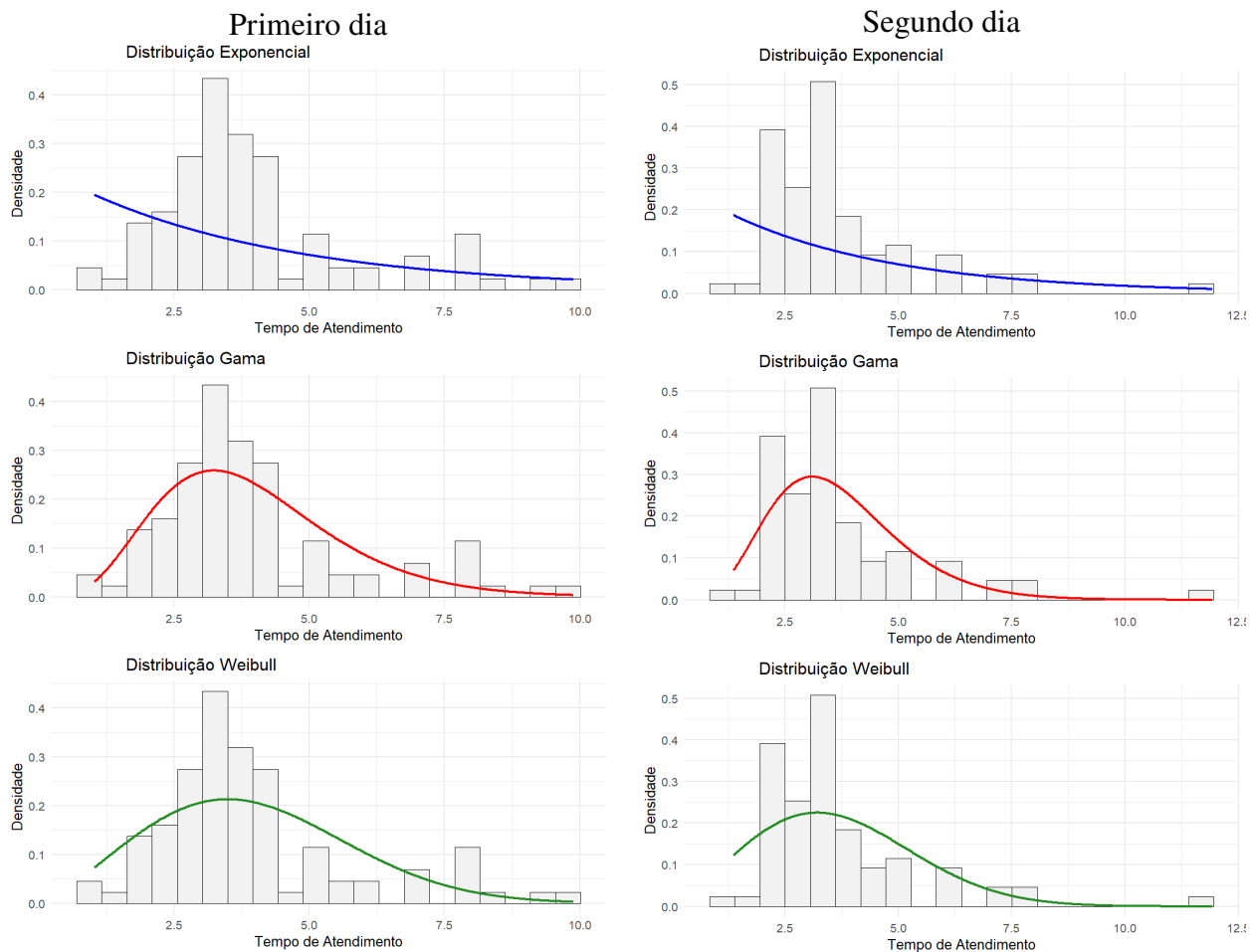


Figura 4.1: Distribuições ajustadas dos tempos de atendimento no primeiro e segundo dia.

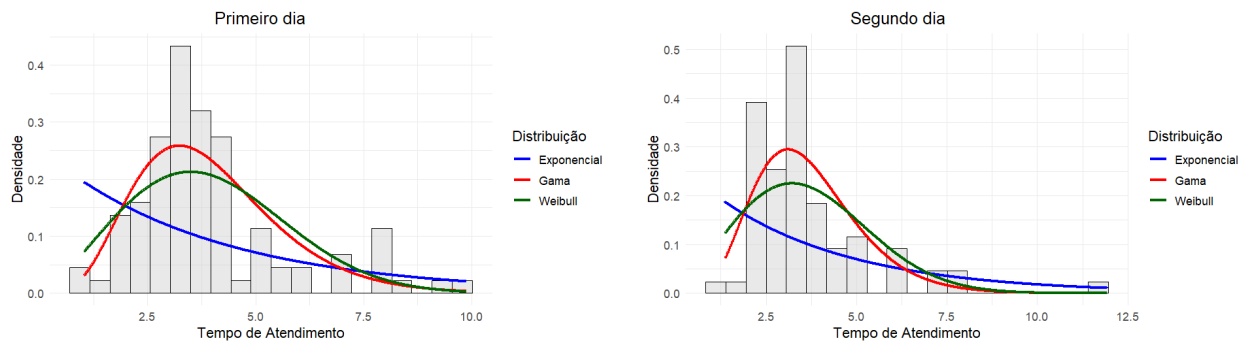


Figura 4.2: Comparações dos ajustamentos a distribuição dos tempos de atendimento no primeiro e segundo dia.

4.3 Resultados dos sistemas de filas de espera

O processo de atendimento para as consultas, no Centro de Saúde da Liberdade, funciona com uma fila única e dois servidores, ou seja, dois servidores operam em paralelo. O utente é atendido assim que um dos médicos fica disponível. Ambos os médicos desempenham a mesma função, e o sistema de filas segue a disciplina FIFO (First-In, First-Out), onde o primeiro utente a chegar é o primeiro a ser atendido. Para esta análise, foram considerados dois dias de funcionamento.

Os tempos de chegada e de atendimento aproximam-se das distribuições de Poisson e Gama, respectivamente. Assim, foram calculadas as medidas de desempenho do modelo de Kendall do Centro de Saúde da Liberdade, que é classificado como A/B/2/FIFO/ ∞ / ∞ . As médias dos tempos de atendimento, que constam na Tabela 4.3, correspondem à taxa de serviço (μ), o tempo médio de serviço por utente foi calculado como $\frac{1}{\mu}$, resultando em 0.0625 horas.

Considerando que a recolha de dados foi feita em um período de dois dias, a média das chegadas e dos atendimentos foi utilizada para o cálculo dos indicadores de desempenho do sistema de fila de espera. As estimativas obtidas foram $\lambda = 3.366$ e $\mu = 0.272$, que foram uniformizadas numa única medida. A taxa de chegada foi calculada em intervalos de 15 minutos, enquanto a taxa de atendimento foi expressa em horas.

A Tabela 4.9, apresenta os resultados das medidas de desempenho do sistema de atendimento actual do Centro de Saúde da Liberdade, assumindo $\lambda = 14$ pessoas por hora, $\mu = 16$ pessoas por hora e $c = 2$. Para o cálculo das medidas de desempenho do modelo não-Markoviano $M/G/2$.

Tabela 4.9: Medidas de desempenho do sistema de atendimento do Centro de Saúde da Liberdade.

Medidas de desempenho	Valor aproximado
Taxa de chegada (λ)	14 clientes/hora
Taxa de atendimento (μ)	16 clientes/hora
Taxa de utilização (ρ)	43.75%
Tempo médio de espera (W_q)	0.55 minutos
Número médio de utentes na fila (L_q)	0.13 clientes
Número médio de utentes no sistema (L_s)	1.02 clientes
Tempo médio no sistema (W_s)	4.35 minutos

De acordo com a Tabela 4.9, verifica-se que os utentes do Centro de Saúde da Liberdade chegam a uma taxa média de aproximadamente $\lambda = 14$ utentes por hora, enquanto cada servidor atende em média $\mu = 16$ utentes por hora.

Relativamente à operação do sistema, observa-se que o factor de utilização (ρ) é cerca de 43.75%. Este valor indica que em média, os dois servidores não se encontram permanentemente ocupados, existindo períodos de ociosidade em pelo menos um dos canais.

No que concerne ao número médio de utentes na fila e no sistema, constata-se que permanecem em média apenas 0.08 utentes à espera e aproximadamente 1 utente no sistema. Estes resultados sugerem que na maioria das situações, apenas um dos servidores está ocupado, o que é coerente com o valor de $\rho = 43.75\%$.

Relativamente ao tempo de espera, observa-se que o tempo médio na fila (W_q) é reduzido, para cerca de 0,55 minutos, enquanto o tempo médio total no sistema (W_s) é de 4,35 minutos. Estes tempos médios revelam que em geral, os utentes são atendidos de forma célere, com um tempo de

permanência global no sistema relativamente curto.

4.3.1 Análise da variabilidade do Centro de Saúde da Liberdade

Coeficiente de variação das chegadas e de atendimento

A análise do coeficiente de variação (C_v) permite compreender a dispersão das chegadas e de atendimento em relação a média. Para o 1º dia, o C_v das chegadas foi aproximadamente 0.89, indicando uma alta variabilidade, de igual maneira, no 2º dia, a variabilidade foi alta tendo atingido 1.40, mostrando que as chegadas apresentaram picos muito acima da média. O coeficiente de variação dos tempos de atendimento foi calculado com base nos parâmetros da distribuição Gama ajustada aos dados. Para o primeiro dia, obteve-se 0.42 e para o segundo dia 0.39. Considerando os dois dias, o coeficiente de variação médio de atendimento é de aproximadamente 0.41, indicando que os tempos de atendimento apresentam baixa variabilidade quando comparados às chegadas.

Taxa de utilização efectiva durante picos

A taxa de utilização média do sistema (ρ) foi de aproximadamente 43,75%, indicando que em média, os servidores estão longe da saturação. Entretanto, ao analisar os picos de chegada, a taxa de utilização efectiva é de 68.75% para o primeiro dia e 43.75% para o segundo dia. Durante os momentos de picos, a demanda excede a capacidade de atendimento, criando congestionamentos temporários e filas mais longas. Essa diferença entre a taxa média e a taxa efectiva, evidencia que a espera do paciente em horários de alta demanda não é reflectida pelos valores médios, justificando a necessidade de considerar os picos na análise.

Os dados utilizados para o cálculo do coeficiente de variação e da taxa de utilização efectiva encontram-se na Tabela 4.3, obtidos a partir da contagem de chegadas por intervalos de 15 minutos e dos tempos de atendimento em minutos.

Os resultados apresentados na Tabela 4.10, mostram o coeficiente de variação de atendimento e das chegadas para os dois dias analisados, bem como a taxa de utilização média ($\rho_{\text{média}}$) e a taxa de utilização nos períodos de pico (ρ_{efectiva}). O que indica a estabilidade dos tempos de atendimento, enquanto o reflecte a variabilidade da demanda ao longo do dia.

Tabela 4.10: Coeficiente de variação e taxa de utilização.

Indicador	Dia 1	Dia 2
C_v (Atendimento)	42%	39%
C_v (Chegadas)	89%	140%
$\rho_{\text{média}}$ (Taxa de utilização média)	43.75%	43.75%
ρ_{efectiva} (Taxa de utilização nos picos)	68.75%	43.75%

4.3.2 Simulação de cenários alternativos para o Centro de Saúde da Liberdade

As simulações foram realizadas com base no modelo $M/G/s$, que conforme os resultados da análise de ajustamento, é o mais adequado para o Centro de Saúde da Liberdade, considerando chegadas de Poisson e tempos de serviço com distribuição geral. O sistema actual opera com 2 servidores e uma taxa de atendimento (μ) de 16 clientes por hora por servidor, com uma taxa de chegada de 14 clientes por hora.

Foram realizados três cenários alternativos: no cenário 1, considerou-se o aumento do número de servidores para $c = 3$, mantendo a taxa de atendimento de $\mu = 16$ clientes por hora, no cenário 2, manteve-se $c = 2$ servidores, mas com aumento da taxa de atendimento para $\mu = 20$ clientes por hora e no cenário 3, também com $c = 2$ servidores, adoptou-se um aumento da taxa de atendimento para $\mu = 18$ clientes por hora.

A Tabela 4.11, apresenta os indicadores de desempenho para os três cenários simulados. Os resultados das simulações mostram o efeito directo das alterações propostas nos indicadores de desempenho do Centro de Saúde da Liberdade.

1. **Cenário 1** ($c = 3, \mu = 16$): A adição de um terceiro servidor, resulta na diminuição do tempo médio de espera na fila (W_q), No entanto, esta melhoria é acompanhada por uma redução considerável da taxa de utilização (ρ) para 29%, indicando maior ociosidade dos servidores e potenciais custos adicionais. Estes são os valores mais baixos de espera entre todos os cenários.
2. **Cenário 2** ($c = 2, \mu = 20$): Este cenário mostrou uma melhoria em todos os indicadores. O tempo médio de espera na fila (W_q) reduz para 0,30 minutos, e o tempo médio no sistema (W_s) atinge o valor mais baixo de todos os cenários (3.30 minutos). A taxa de utilização (ρ) situa-se em 35.00%. Este resultado sustenta a recomendação central do trabalho, que sugere priorizar a melhoria do processo interno de atendimento em vez do aumento imediato do número de servidores.
3. **Cenário 3** ($c = 2, \mu = 18$): Com um aumento moderado na taxa de atendimento, este cenário também apresenta melhorias em relação ao sistema actual. O tempo médio de espera na fila (W_q) é de 0.45 minutos, a taxa de utilização (ρ) é de 39%. Embora represente uma melhoria positiva, o impacto do Cenário 3 é inferior ao do Cenário 2, validando a eficácia de um aumento mais robusto na taxa de atendimento por servidor.

Tabela 4.11: Indicadores de desempenho para os cenários simulados.

Medida de desempenho	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3
Taxa de chegada (λ)	14 clientes/hora	14 clientes/hora	14 clientes/hora
Taxa de atendimento (μ)	16 clientes/hora	20 clientes/hora	18 clientes/hora
Nº de servidores (c)	3	2	2
Taxa de utilização (ρ)	29%	35.5%	39%
Tempo médio de espera (W_q)	0.12 minutos	0.30 minutos	0.45 minutos
Nº médio na fila (L_q)	0.03 clientes	0.07 clientes	0.10 clientes
Tempo médio no sistema (W_s)	3.87 minutos	3.30 minutos	3.80 minutos
Nº médio no sistema (L_s)	0.90 clientes	0.77 clientes	0.89 clientes

4.4 Discussão dos resultados

Após a recolha e análise dos dados relativos às chegadas e aos tempos de atendimento, por meio de representações gráficas e testes de ajustamento Qui-Quadrado e Kolmogorov-Smirnov, constatou-se que os dados seguem distribuições consistentes com a literatura. O processo de chegada ajustou-se ao modelo de Poisson, conforme relatado em estudos de sistemas de saúde, e os tempos de atendimento ajustaram-se à distribuição Gama, o que é consistente com a teoria, pois a distribuição Gama generaliza a distribuição exponencial. Desta forma, o sistema do Centro de Saúde da Liberdade enquadra-se no modelo $M/G/2$.

O sistema actual, com dois médicos, apresenta uma taxa de chegada de 14 pessoas por hora e uma taxa de atendimento de 16 pessoas por hora, resultando em uma utilização média dos servidores de aproximadamente 44%. Considerando que o Centro de Saúde da Liberdade funciona com dois servidores na triagem de adultos, população de utentes, infinita e disciplina onde o primeiro a chegar, é o primeiro a ser atendido. Os indicadores de desempenho foram calculados para o modelo com dois canais. O tempo médio de espera foi relativamente baixo, porém ainda existe uma probabilidade de os utentes encontrarem fila em horários de maior procura. Os indicadores revelaram um tempo médio na fila de 0.55 minutos e o tempo médio no sistema de 4.35 minutos, com média de 0.13 utentes na fila e 1.02 utentes no sistema.

Com base na análise, a variabilidade das chegadas dos pacientes foi maior que a de atendimento, especialmente no segundo dia, o coeficiente de variação das chegadas foi de 1.40, isso indica que os picos de chegada são a principal causa de filas temporárias. Embora a taxa média de utilização do sistema seja baixa, durante os períodos de pico essa taxa chega a 68.75%, mostrando que os pacientes enfrentam situações diferentes da média em horários de alta demanda. Isso explica porque alguns pacientes enfrentam esperas longas, mesmo que o tempo médio de espera seja baixo.

Além disso, a distribuição do tempo de espera mostra que uma parte dos pacientes pode esperar mais tempo durante os picos, mostrando que as filas longas não estão relacionadas à média. Portanto, os tempos de espera mais longos, ainda que menos frequentes, são determinantes para

explicar as reclamações dos pacientes e a ocorrência de filas prolongadas.

A simulação de cenários alternativos mostrou que o aumento do número de servidores reduz a probabilidade de espera e o número médio de utentes na fila, mas aumenta a ociosidade dos recursos, implicando custos operacionais adicionais. Por exemplo, um cenário com apenas um canal de atendimento, apresenta uma sobrecarga no médico responsável. No cenário com três canais, considerando também variações na taxa de chegada dos pacientes (λ) e na taxa de atendimento dos médicos (μ), a ociosidade dos recursos aumentou consideravelmente, resultando em custos operacionais adicionais. Essa comparação evidencia como a alteração conjunta do número de servidores e das taxas de λ e μ pode modificar os indicadores de desempenho do sistema.

No Centro de Saúde da Liberdade, a análise da taxa de utilização efectiva nos períodos de pico em comparação com a utilização média evidenciou a necessidade de soluções para gerir a alta variabilidade da procura, alinhando-se a abordagens que consideram a variabilidade temporal, como o modelo Lag SIPP. A escolha do Cenário 2, que consistiu no aumento da taxa de atendimento para $\mu = 20$, mostrou-se mais eficiente do que o Cenário 1, que propunha a ampliação do número de servidores para $c = 3$. Essa decisão reflecte uma estratégia semelhante aos estudos de Moraes e Silva (2019), que utilizaram o planeamento estratégico voltado para a optimização do serviço ou o aumento do número de especialistas em situações de saturação das consultas médicas. Dessa forma, a análise evidencia que ajustar a capacidade de atendimento individual pode ser mais eficaz para reduzir os congestionamentos e melhorar o desempenho operacional do que apenas ampliar o quadro de profissionais.

A aplicação da simulação aliada à teoria das filas de espera revelou-se essencial para analisar e tomar de decisões estratégica no Centro de Saúde da Liberdade. Assim como no estudo de Isaac (2023) no Centro de Saúde Dream para Crianças, a simulação permitiu superar limitações dos modelos analíticos tradicionais, tal como o $M/M/1$.

No Centro de Saúde da Liberdade, onde as chegadas de pacientes seguem uma Distribuição de Poisson, os tempos de atendimento não se ajustaram à Distribuição exponencial, mas sim à Distribuição Gama, resultando em um modelo $M/G/2$. Esse modelo mostra a possibilidade de usar especificações não Markovianas para capturar a variabilidade real do processo de filas de espera.

Além disso, a simulação possibilitou a realização de cenários alternativos, permitindo avaliar diferentes estratégias de alocação de recursos sem interromper a operação real do Centro de Saúde da Liberdade. Tal abordagem foi importante para identificar intervenções capazes de reduzir o tempo médio de permanência dos pacientes no sistema, e uma diminuição significativa do tempo de atendimento. Dessa forma, a simulação contribui directamente para a melhoria do desempenho do Centro de Saúde da Liberdade.

Capítulo 5

Conclusões e recomendações

5.1 Conclusões

Com o objectivo de analisar o funcionamento do sistema de atendimento nas consultas do Centro de Saúde da Liberdade, recorreu-se à aplicação da Teoria das Filas de Espera e simulação, tendo-se concluído que:

- O sistema de atendimento na triagem de adultos do Centro de Saúde da Liberdade opera com dois canais de atendimento, seguindo a disciplina FIFO. A análise de ajustamento mostrou que o processo de chegada dos utentes se ajusta à distribuição de Poisson, os tempos de atendimento ajustaram-se à distribuição Gama, por isso, o sistema foi classificado como um modelo de filas $M/G/2$.
- A taxa média de chegada foi de 14 clientes por hora, e a taxa de atendimento em 16 clientes/hora por servidor. Os indicadores médios do sistema $M/G/2$ apresentaram uma taxa de utilização de 43.75%, indicando que em média, os dois servidores não estão permanentemente ocupados. O tempo médio de espera na fila é reduzido (0,55 minutos) e o tempo médio total no sistema é de 4.35 minutos.
- A análise da variabilidade dos tempos no sistema $M/G/2$ mostrou que as chegadas tinham uma taxa de utilização efectiva de 68,75% e os períodos de pico são as principais causas das filas longas temporárias, o que justifica as reclamações dos utentes.
- A simulação de modelos alternativos, mostrou que o cenário ($c=2; \mu=20$), é o mais eficiente e adequado. Esta alternativa optimiza o desempenho sem incorrer custos operacionais adicionais nem ociosidade elevada observada no cenário 1. A escolha do cenário 2 valida a estratégia de priorizar a melhoria do processo interno de atendimento e a capacidade de serviço, em detrimento do aumento imediato da capacidade física.

5.2 Recomendações

De acordo com o trabalho desenvolvido e as conclusões observadas através dos resultados, recomenda-se:

1. Priorizar a otimização do processo de Atendimento para Aumentar a Taxa de Serviço (μ) de 16 para 20 clientes/hora, conforme validado pelo cenário 2 da simulação.
2. A implementação de um plano de gestão flexível que minimize a influência da alta variabilidade das chegadas durante os horários de maior fluxo, como a alocação temporária de apoio administrativo ou de enfermagem para auxiliar os dois servidores da triagem em tarefas não clínicas (como registo inicial, triagem preliminar ou gestão de senhas) durante os picos.
3. Informar os pacientes sobre o tempo estimado de espera nos períodos de maior procura, pois isso contribui para melhorar a percepção de atendimento e a satisfação dos utentes.
4. Embora a adição de um terceiro servidor reduzisse o tempo de espera, recomenda-se a expansão da capacidade do sistema somente se houver um aumento consistente e justificado da demanda que os processos otimizados não consigam absorver.

Referências

- [1] Alves, D. V. (2017). *Métodos, instrumentos e técnicas de recolha de dado. Ciência e Educação*.
- [2] Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.
- [3] Andrade, E. L. de. (2009). *Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisões* (4ª ed.). Rio de Janeiro: LTC.
- [4] Arenales et al. (2007), *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier.
- [5] Banks, J., Carson, J. S., Nelson, B. L., Nicol, D. M. (2010). *Discrete-event system simulation* (5th ed.). Pearson Prentice Hall.
- [6] Berger, V. W. (2005). Teste de Kolmogorov–Smirnov: Visão geral. In *Enciclopédia de Estatísticas em Ciências Comportamentais*.
- [7] Carreira, A., Pinto, G., e Sousa, B. (2002). *Cálculo da Probabilidade*. Instituto Piaget. ISBN 9789727715138.
- [8] Casella, G., Berger, R. L. (2002). *Statistical inference* (2ª ed.). Duxbury Press.
- [9] Costa, L. M. G.. (2007). *Teoria das filas*. São Luis, MA: Universidade Federal do Maranhão.
- [10] Costa, R. A. (2002). *Elementos de investigação operacional (Vol. 247, Textos de Base)*. Universidade Aberta.
- [11] Dantas, A.B.; Rodrigues, F.R. (1977) *Tópicos de Processos Estocásticos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, .
- [12] Fogliatti, M. C.; Mattos, N. M. C. (2007). *Teoria das filas*. Rio de Janeiro: Interciência.
- [13] Green, L. V., Soares, J., Giglio, J. F., e Green, R. A. (2006). Using queueing theory to increase the effectiveness of emergency department provider staffing. *Academic Emergency Medicine*, 13(1), 61-68.
- [14] Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M., e Harris, C. M. (2008). *Fundamentals of queueing theory*. (4th ed.). Wiley.
- [15] Hillier, F. S e Lieberman, G. J (2006). *Introdução à pesquisa operacional*. (8ª ed.) São Paulo.

- [16] Hillier, F. S. e Lieberman, G. J. (2013). *Introdução à pesquisa operacional* (9ª ed.). AMGH Editora.
- [17] Isaac, I. (2023). *Otimização de filas de espera com simulação estatística no Centro de Saúde Dream para Crianças*. Instituto Superior de Transportes e Comunicações. Disponível em <https://www.isutc.ac.mz/wp-content/uploads/2023/11/Art7ISAAC.pdf>.
- [18] Jun, J. B., Jacobson, S. H., Swisher, J. R. (1999). Application of discrete-event simulation in health care clinics: A survey. *Journal of the Operational Research Society*. 50(2), 109–123. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600669>.
- [19] Tavares, L. V., Correia, F. N., Themido, I. H., Oliveira, R. C. (1997). *Investigação Operacional*. McGraw-Hill.
- [20] Magalhães, M. N. (1996). *Introdução à rede de filas*.
- [21] Mendonça, E. B. (2014). *Teoria de filas markovianas e aplicações (Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Estadual da Paraíba)*. Repositório UEPB.
- [22] Montgomery, D. C., Runger, G. C. (2018). *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros* (7ª ed.). Wiley.
- [23] Moraes, D. G., da Silva, A. M. (2021). Simulação discreta aplicada à gestão de filas no varejo. *Exacta*, 19(3), 659–677. <https://doi.org/10.5585/exactaep.disciplina.14842>.
- [24] Moraes, L., da Silva, S. (2019). Análise de um modelo de simulação, desenvolvido para observação da problemática de filas em hospitais. *Anais do Congresso Brasileiro de Pesquisa Operacional (CONBREPRO)*. Associação Brasileira de Pesquisa Operacional (APREPRO).
- [25] Moreira, A. (2007a). *Teoria das filas e modelos de atendimento* [Manuscrito ou material didático].
- [26] Moreira, D. A. (2007b). *Administração da produção e operações* (2ª ed.). São Paulo, SP: Cengage Learning.
- [27] Moresi, E. (2003). *Metodologia de Pesquisa*. Brasília: Universidade Católica.
- [28] Mulenga, A. (2010). *Investigação opercaional-modelos de apoio a decisão - curso de licenciatura em Estatística*. Volume II. Maputo.
- [29] Mulenga, A. (2018). *Introdução a Estatística*. Imprensa Universitária da UEM, Maputo.
- [30] Muller, A. et al. (2007). *Processos Estocásticos e Aplicações*. Almedina.
- [31] Nascimento, H. J. B. (2012). *Modelagem markoviana para análise de tráfego e dimensionamento de terminais de atendimentos: Um sistema aplicado ao Complexo Industrial e Portuário do Pecém – CE* [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Ceará].

- [32] Pelissari, AS, Solis, DR, Ianagui, EC, Gonzalez, IVDP, Setubal, FMR (2012).Aplicação e avaliação do modelo SERVQUAL para analisar a qualidade do serviço. *Lugar Interciências*, 1(23), 1-24.
- [33] Porto Editora. (2010). *Grande dicionário da língua portuguesa: Edição revista e atualizada com o Acordo Ortográfico*. Porto: Porto Editora.
- [34] Prado, D. (1999). *Teoria das Filas e da Simulação*. (4ª ed). Belo Horizonte.
- [35] orto, M.H.L. (2017). *A Matemática da fila de caixa em uma agência bancária do Distrito Federal*. Brasília.
- [36] Prado, D. (2004) *Teoria das Filas e Simulação*. (2ª ed). Nova Lima, MG: INDG Tecnologia e Serviços LTDA. Série Pesquisa Operacional, Vol.2.
- [37] Prado, D. S. (2006). *Teoria das filas e da simulação: Pesquisa Operacional* (Vol. 2). Interci-ência.
- [38] Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists* (4th ed.). Academic Press.
- [39] Silva, E. T., Costa, L. M. G., Gonçalves, A. R. (2015). *Teoria de filas aplicada no sistema de atendimento de uma empresa de serviços de saúde em Marabá-PA*. In Anais do XXXIX Encontro Nacional de Engenharia de Produção.
- [40] Silva, S. J. (2010).
- [41] Silva, E. M. da, Figueiredo, A. L., Souza, R. P. (1998). *Teoria das filas*. Repositório Institucional UNIR.
- [42] Shannon, R. E. (1975). *Systems simulation: The art and science*.
- [43] Taha, H. A. (2004). *Operations Research: An Introduction* (7ª ed.). Pearson.
- [44] Taha, A. A. (2008), *Pesquisa Operacional: uma visão geral*. (8ª ed). São Paulo: Pearson Prentice Hall.
- [45] Tomasi, M(2007). Manual de atendimento ao publico. Florianopolis.
- [46] Tavares, T, L., Nunes C, F., Hall T, I., Carvalho O, R. (1996). *Investigação Operacional*. Lisboa: McGraw-Hill.
- [47] Triola, M. F. (2005). *Introdução à estatística*. (9ª ed.). LTC.
- [48] Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Addison-Wesley.
- [49] Ugoni, A., Walker, B. F. (1995). The Chi square test: An introduction. *COMSIG Review*, 4(3), 61–65.

- [50] Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., Ye, K. (2008). *Probabilidade e estatística para engenharia e ciências* (8ª ed.). Pearson Universidades.
- [51] Winston, W. L. (2003). *Introduction to Probability Models: Operations Research*. Volume II (4ª ed.). Duxbury Resource Cente
- [52] Winston, W. L. (2004). *Operations Research: Applications and Algorithms*. (4ª.ed). Duxbury Press.

Apêndice

Tabela .1: Distribuição do número de chegadas para o primeiro dia.

Distribuição de nº de chegada	Frequência
0	3
1	2
2	7
3	3
4	4
5	2
6	1
7	1
8	1
11	1
14	1
Acima de 14	0
Total	26

Tabela .2: Distribuição do número de chegadas para o segundo dia.

Distribuição nr de chegada	Frequência
0	4
1	4
2	8
3	4
4	3
6	2
22	1
Acima de 22	0
Total	26

Tabela .3: Distribuição de chegadas, probabilidades e teste qui quadrado para o primeiro dia.

Número de chegadas x_i	Frequência O_i	$O_i \cdot X_i$	$P(x = k) \sim$	$E_k = n \cdot P(x = k) \sim$
0	3	0	0,024	0,623
1	2	2	0,089	2,326
2	7	14	0,167	4,338
3	3	9	0,207	5,395
4	4	16	0,194	5,032
5	2	10	0,144	3,754
6	1	6	0,090	2,334
7	1	7	0,048	1,244
8	1	8	0,022	0,580
9	0	0	0,009	0,241
10	0	0	0,003	0,090
11	1	11	0,001	0,030
12	0	0	0,000	0,009
13	0	0	0,000	0,003
14	1	14	0,000	0,001
Total	26	97	1,000	26,000

Tabela .4: Distribuição de chegadas, probabilidades e teste qui quadrado para o segundo dia.

Número de chegadas x_i	Frequência O_i	$O_i \cdot X_i$	$P(x = k) \sim$	$E_k = n \cdot P(x = k) \sim$
0	4	0	0,050	1,294
1	4	4	0,149	3,883
2	8	16	0,224	5,825
3	4	12	0,224	5,825
4	3	12	0,168	4,369
5	0	0	0,101	2,621
6	2	12	0,050	1,311
7	0	0	0,022	0,562
8	0	0	0,008	0,211
9	0	0	0,003	0,070
10	0	0	0,001	0,021
11	0	0	0,000	0,006
12	0	0	0,000	0,001
13	0	0	0,000	0,000
14	0	0	0,000	0,000
15	0	0	0,000	0,000
16	0	0	0,000	0,000
17	0	0	0,000	0,000
18	0	0	0,000	0,000
19	0	0	0,000	0,000
20	0	0	0,000	0,000
21	0	0	0,000	0,000
22	1	22	0,000	0,000
Total	26	78	1,000	26,000

Anexos



Faculdade de Ciências

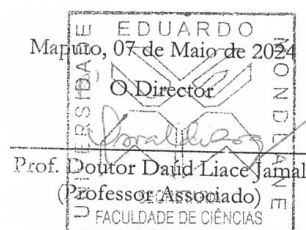
Ao
Centro de Saúde da Liberdade

CREDENCIAL

No âmbito de elaboração do Trabalho Final do Curso de Licenciatura em Informática, a Direcção da Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane, credencia a estudante **Carina Ismail Dala Cosmo**, para junto do MISAU, Centro de Saúde da Liberdade, efectuar um estágio, a fim de obtenção de dados para alimentar o seu trabalho de culminação de estudos.

Antecipadamente agradecemos o vosso apoio e colaboração.

Cordiais Saudações.



Av. Julius Nyerere, n.º 3453, Campus Principal, C. Postal 257, Tel.: (+258) 21 493377, Fax: (+258) 21 493377,
Maputo - Moçambique

Exmo Senhor

Director Provincial da saúde

Assunto: Solicitação de autorização para colheita de base de dados

Eu Carina Ismail Dala Cosmo, solteira, nascida aos 26 de Setembro de 1998, natural de Maputo, residente no bairro da Liberdade, Q.9, Casa n 697. Titular do Bilhete de Identidade nº 1102016685295C emitido na cidade de Maputo. Estudante finalista do curso de Estatística na Universidade Eduardo Mondlane, venho mui respeitosamente, requerer a vossa Excia se digne autorizar a colheita de dados por observação, na fila de espera para o atendimento aos utentes do Centro de Saúde da Liberdade, com o objectivo de obter dados para a realização do trabalho de conclusão do curso sob o título *“Análise do Sistema de Atendimento no Centro de Saúde da Liberdade aplicando a Teoria de Filas e Simulação”*.

Para que seja possível realizar o trabalho conto com a autorização desta instituição, coloco-me a disposição para qualquer esclarecimento.

Pelo que:

Pede deferimento

Matola, Junho de 2024

Carina Cosmo

Carina Cosmo



REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

PROVÍNCIA DE MAPUTO
DIRECÇÃO PROVINCIAL DE SAÚDE

À
Senhora
Carina Ismail Dala Cosmo
Celular: 84 827 37 50

Maputo

N/Ref.Nº.: 883 /DPSM-DFP/____/2024

Matola, 26 de Junho de 2024

Assunto: Autorização para recolha de dados no âmbito da elaboração da monografia com o tema *"Análise do Sistema de Atendimento no Centro de Saúde da Liberdade Aplicando a Teoria de Filas e Simulação"*.

No dia 21 de Junho do corrente ano, deu entrada nesta Direcção o seu pedido no qual solícita carta de cobertura para realização do estudo, no âmbito da elaboração de trabalho final do curso na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Sobre o pedido informa-se o seguinte:

- Autoriza-se a Senhora **Carina Ismail Dala Cosmo**, como pesquisadora principal a realizar pesquisa para subsidiar ao seu Trabalho de Conclusão de Curso com o tema em referência, no Centro de Saúde da Liberdade;
- Orienta-se que, antes de iniciar o estudo, obtenha a aprovação ética, através de submissão do seu protocolo ou projecto ao comité de ética para saúde humana. E agradece-se a partilha dos resultados com esta Direcção e local de estudo;
- Para qualquer necessidade de comunicação e monitoria, durante a realização do estudo, são indicadas, ao nível desta Direcção, os funcionários **Matelino Jafule Magoia** (847368412) e **Jamisse Rafael Muando** (845093372).

Cordiais saudações.

O Director Provincial

Daniel Arlindo Chemane
(Médico de Clínica Geral Principal)

CC:

- SDSMAS - Matola
- DFP – Matelino Jafule Magoia
- RTICI - Jamisse Rafael Muando

Direcção Provincial de Saúde de Maputo
Matola G, nº 12232 - Cidade da Matola – dfp.dpsmaputo@gmail.com